CONSTANTIN N. UDRIȘTE ◆ CONSTANTIN M. BUCUR

PROBLEME DE MATEMATICI ȘI OBSERVAȚII METODOLOGICE

EDITURA FACLA

Scanned with OKEN Scanner

CONSTANTIN N. UDRIȘTE CONSTANTIN M. BUCUR

PROBLEME DE MATEMATICI ȘI OBSERVAȚII METODOLOGICE

EDITURA FACLA
TIMIȘOARA, 1980

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea „Probleme de matematici și observații metodologice“ de Constantin N. Udrișteși Constantin M. Bucur a fost avizată de Comisia de matematică a Ministerului Educației și Învățământului.

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Este unanim recunoscut că un rol important în satisfacerea necesităților instruirii matematice a tineretului îl are existența unei bibliografii matematice corespunzătoare, larg accesibile, variate. În acest sens, prezenta lucrare își propune să ofere elevilor și profesorilor un material amplu, care cuprinde în prima parte probleme date la concursurile de admitere în facultăți în perioada 1970—1978, *iar în partea a doua probleme de sinteză și observații metodologice referitoare la precizarea și completarea unor noțiuni matematice, întîlnite în materia de liceu.*

În lucrare s-au folosit notații matematice binecunoscute, ocolind formalizarea prea accentuată care ar fi introdus un element suplimentar de dificultate în înțelegerea problemelor.

Observațiile metodologice cuprinse în text au ca scop semnalarea unor noțiuni demne de reținut, fiind mai importante decît rezolvarea după „tip" a unui anumit număr de probleme. Ele sînt necesare deoarece studiul matematicii, inclusiv al celei medii, presupune rezolvarea unui număr însemnat de probleme, dar nu se reduce la aceasta, fapt ignorat de unii elevi, care se orientează în pregătire după sistemul de teste de tip static, independente de reacția subiectului.

Aducem mulțumirile noastre tuturor acelora care prin observații și sugestii au contribuit la îmbunătățirea manuscrisului

Ianuarie 1980

Autorii

I. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂŢĂMÎNTUL SUPERIOR

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 1

ADMITERE SUBINGINERI ŞI INSTITUTE PEDAGOGICE

§ 1. ALGEBRĂ

1.1. Se consideră determinantul

$$D=\begin{vmatrix} 2(x-1) & 2x & 1 \\ 2 & -m^2 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix},$$

unde m este un parametru real. Se cere:

1) Să se calculeze D

2) Să se determine m astfel încît ecuaţia $D=0$ să admită o rădăcină egală cu 1. Ce rădăcină mai admite în acest caz această ecuaţie?

(I. P. Bucureşti, 1972)

Soluţie. 1) Succesiv avem

$$D=2(x-1)\begin{vmatrix} -m^2 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix}-2x\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -m^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2(x-1)(1-m^2x)-$$

$$-2x(2x+1)+2+m^2=-2(m^2+2)x^2+2m^2x+m^2.$$

2) Înlocuind pe $x=1$ în membrul stîng al ecuației $-2(m^2+2)x^2+2m^2x+m^2=0$ deducem $m^2=4$, adică $m_{1,2}=\pm 2$. Apoi observăm că ecuația $3x^2-2x-1=0$ mai are și soluția $x_2=-1/3$.

1.2. Fie $P(x)=(1-m)x^2+2(m+1)x+m+1$, $m\in R$, $m\neq 1$.

1) Să se determine m astfel încît $P(x)$ să fie pătratul unui polinom de gradul întîi.

2) Dacă $x_1; x_2$ sînt rădăcinile ecuației $P(x)=0$ să se rezolve inecuația $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\leqslant -1$ în raport cu $m\in R-\{1\}$.

3) Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $P(x)=0$ să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}=-2$ în raport cu $m\in R-\{1\}$.

(Universitatea Craiova, 1976)

Soluție. 1) $P(x)$ devine pătratul unui polinom de gradul întîi, dacă ecuația $P(x)=0$ are rădăcinile egale, adică $\Delta=b^2-4ac=0$; rezultă $(m+1)m=0$. Pentru $m=0$, $P(x)=(x+1)^2$; dacă $m=-1$, $P(x)=(x\sqrt{2})^2$.

2) Deoarece $S=-\frac{2(m+1)}{1-m}$, $P=\frac{m+1}{1-m}$, inecuația $\frac{S}{P}\leqslant -1$ devine $-2\leqslant -1$, pentru orice $m\in R$, $m\neq\pm 1$. Pentru $m=1$ ecuația devine de gradul întîi, $4x+2=0$, iar cînd $m=-1$ rezultă $x_1=x_2=0$.

3) Înmulțind cu expresia conjugată, $\sqrt[3]{x_1^2}-\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_2^2}$, rezultă $x_1+x_2=-2[(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})^2-3\sqrt[3]{x_1x_2}]$, sau $S=-2(4-3\sqrt[3]{P})$. În funcție de m ecuația devine $-2\frac{m+1}{1-m}=-2\left(4-3\sqrt[3]{\frac{m+1}{1-m}}\right)$, sau $t^3+3t-4=0$, unde $t=\sqrt[3]{\frac{m+1}{-m+1}}$. Singura soluție reală este $t=1$, sau $\frac{m+1}{m-1}=-1$; există $m=0$, care satisface egalitatea.

1.3. Să se rezolve inecuația

$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}<\frac{2}{x}$ (a este un număr pozitiv dat).

(I. P. București, 1976)

Soluție. Operațiile au sens pentru orice x real diferit de $-a$, 0, a. Trecînd totul în membrul stîng avem următorul șir de implicații: $\frac{2x}{x^2-a^2}-\frac{2}{x}<0\Rightarrow\frac{x^2-(x^2-a^2)}{x(x^2-a^2)}<0\Rightarrow\frac{a^2}{x(x^2-a^2)}<0\Rightarrow x(x^2-a^2)<0\Rightarrow x\in(-\infty,\ -a)\cup(0,\ a)$.

1.4. Se dă polinomul $P(x)=x^3+bx^2+cx+d$.

1) Să se arate că dacă $P(x)$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, atunci

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x & x \\ x_1 & x_2 & x & x \\ x_1 & x_2 & x_3 & x \end{vmatrix},\ \forall x.$$

2) Să se determine coeficienții b, c, d știind că $P(1)=27$, $P(-1)=-11$, $bd=-240$.

3) Să se arate că $P(x)=x^3-12x^2+18x+20$ admite o rădăcină de forma $a+\sqrt{3}$, cu a număr rațional, și să se rezolve ecuația $P(x)=0$.

(I. P. București, 1972)

Soluție. 1) Aplicăm proprietatea că dacă din elementele unei coloane scădem elementele corespondente din altă coloană, atunci determinantul nu se schimbă. Scăzînd coloana a treia din a patra, a doua din a treia și prima din a doua, găsim

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x & x \\ x_1 & x_2 & x & x \\ x_1 & x_2 & x_3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x-x_1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x-x_2 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & x-x_3 \end{vmatrix} =$$

$$=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\equiv P(x).$$

2) Deoarece $P(1)=1+b+c+d$, $P(-1)=-1+b-c+d$, rezultă sistemul

$$\begin{cases} b+d=8 \\ c=18 \\ bd=-240. \end{cases}$$

Acesta are soluțiile $b=-12$, $c=18$, $d=20$; $b=20$, $c=18$, $d=-12$.

3) Polinomul dat va admite și rădăcina $a-\sqrt{3}$ întrucît are coeficienții întregi (deci și raționali). Notînd cu x_1, $x_2=a+\sqrt{3}$, $x_3=a-\sqrt{3}$ cele trei rădăcini, relațiile lui Viète dau

$$\begin{cases} x_1+2a=12 \\ 2ax_1+a^2-3=18 \\ x_1(a^2-3)=-20. \end{cases}$$

Eliminînd pe x_1 între primele două ecuații găsim $a^2-8a+7=0$. Astfel $a=1$, $x_1=10$ sau $a=7$, $x_1=-2$; ținînd însă seama de a treia ecuație a sistemului precedent rămîne numai $a=1$, $x_1=10$ și deci $x_2=1+\sqrt{3}$, $x_3=1-\sqrt{3}$.

1.5. Se consideră ecuația $x^3+2(m-1)x^2-(m-2)x-m-1=0$, unde m este un parametru real.

1) Să se discute natura și semnele rădăcinilor știind că ecuația admite o rădăcină întreagă x_1.

2) Să se determine valorile lui m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=6$.

3) Să se determine soluțiile raționale ale ecuației

$$\log\frac{1}{2}|x_2-x_3|-\log(5m-6)+\log(m+3)=0,$$

unde x_2, x_3 sînt rădăcinile neîntregi ale ecuației inițiale.

(I. P. București, 1971)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1) Deoarece termenul liber este $-(m+u_1$ (încercăm cu ± 1. Găsim că $x_1=+1$ este o rădăcină a ecuației date. Împărțind cu $x-1$ găsim ecuația de gradul doi $x^2+(2m-1)x+m+1=0$. Discuția acesteia se face utilizînd $\Delta=4m^2-8m-3$, cu rădăcinile $m_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{2}$, și $P=1+m$, $S=1-2m$.

Dacă $m\in(-\infty, -1)$, atunci $\Delta>0$, $P<0$, $S>0$, adică x_2, x_3 sînt reale, distincte, de semne contrare, cea pozitivă are valoarea absolută mai mare; dacă $m=-1$, atunci $\Delta>0$, $P=0$, $S>0$, adică una din rădăcini este nulă, alta pozitivă; apartenența $m\in\left(-1, \frac{2-\sqrt{7}}{2}\right)$ implică $\Delta>0$, $P>0$, $S>0$, adică rădăcini reale pozitive, distincte; dacă $m=\frac{2-\sqrt{7}}{2}$, atunci $\Delta=0$, $P>0$, $S>0$ și astfel $x_2=x_3>0$; pentru $m\in\left(\frac{2-\sqrt{7}}{2}, \frac{2+\sqrt{7}}{2}\right)$ avem rădăcini complexe conjugate; pentru $m=\frac{2+\sqrt{7}}{2}$ avem $\Delta=0$, $P>0$, $S<0$, adică $x_2=x_3<0$; pentru $m\in\left(\frac{2+\sqrt{7}}{2}, \infty\right)$ găsim $\Delta>0$, $P>0$, $S<0$, adică $x_2<0$, $x_3<0$.

2) Deoarece $x_1=1$, deducem $x_2^3+x_3^3=5$, adică $(x_2+x_3)[(x_2+x_3)^2-3x_2x_3]=5$. Știm însă că $x_2+x_3=1-2m$, $x_2x_3=1+m$. Astfel găsim $8m^3-18m^2+3m+7=0$ cu rădăcinile $m_1=1$, $m_2=-\frac{1}{2}$, $m_3=\frac{7}{4}$.

3) Observăm că $|x_2-x_3|=\sqrt{(x_2-x_3)^2}=\sqrt{(x_2+x_3)^2-4x_2x_3}=\sqrt{4m^2-8m-3}$. În plus, existența logaritmilor impune $4m^2-8m-3>0$, $m>\frac{6}{5}$, $m>-3$, adică $m\in\left(\frac{2+\sqrt{7}}{2}, \infty\right)$. Apoi scriem ecuația în forma echivalentă $\log\frac{(m+3)\sqrt{4m^2-8m-3}}{2(5m-6)}=0$, adică $\frac{(m+3)\sqrt{4m^2-8m-3}}{2(5m-6)}=1$ sau $4m^4+16m^3-115m^2+150m-171=0$. Aceasta are soluția întreagă $m=3$; alte soluții ar putea fi date de $f(m)=4m^3+28m^2-31m+57=0$. Deoarece $f(m)>0$ pentru $m\in\left(\frac{2+\sqrt{7}}{2}, \infty\right)$, rămîne că singura soluție rațională este $m=3$.

1.6. Se dă polinomul $P(x)=x^4+4x^3+ax^2+bx-20$, unde a și b sînt numere întregi, și se cere:

1) Să se determine parametri a și b știind că $P(x)$ este divizibil cu x^2+bx+a.

2) Înlocuind pe a și b cu valorile aflate să se rezolve ecuația $P(x)=0$.

(I. P. București, 1972)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1) Procedăm prin identificare:

$$x^4+4x^3+ax^2+bx-20=(x^2+bx+a)(x^2+mx+n),\ \forall x$$

Rezultă sistemul

$$\begin{cases} b+m=4 \\ bm+n=0 \\ am+bn=b \\ an=-20 \\ a,\ b,\ m,\ n\in Z. \end{cases}$$

Acesta are soluția $a=5$, $b=2$, $m=2$, $n=-4$.

2) Ținînd seama de rezultatul precedent, ecuația dată se transcrie în forma

$$(x^2+2x+5)(x^2+2x-4)=0.$$

Din $x^2+2x+5=0$ găsim $x_{1,2}=-1\pm 2i$, iar din $x^2+2x-4=0$ obținem $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{5}$.

1.7. Considerăm polinomul: $P(x)=x^4+mx+n$, m și n fiind numere raționale.

1) Să se afle m, n dacă polinomul are rădăcina dublă $x=1$.

2) Să se afle m, n dacă polinomul are rădăcină $1+\sqrt{3}$ și să se rezolve ecuația $P(x)=0$ în acest caz.

(I. P. București, 1973)

Soluție. 1) Din identitatea $x^4+mx+n=(x-1)^2(x^2+px+q)$, sau $x^4+mx+n\equiv x^4+(p-2)x^3+(q-2p+1)x^2+(p-2q)x+q$, rezultă sistemul $p=2$, $q-2p+1=0$, $p-2q=m$, $q=n$ cu soluția $p=2$, $q=3$, $m=-4$, $n=3$.

Observație. Dacă $x=1$ este rădăcină dublă, înseamnă că $P(1)=0$, $P'(1)=0$, $P''(1)\neq 0$; deci $m+n+1=0$, $m+4=0$ cu soluțiile de mai sus.

2) Deoarece m, n — raționali, $P(x)=0$ admite soluțiile $x_1=1+\sqrt{3}$, $x_2=1-\sqrt{3}$. Relațiile lui Viete $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, $(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=0$ conduc la $x_3+x_4=-2$, $x_3x_4=6$, adică $x_{3,4}=-1\pm i\sqrt{5}$.

1.8. Se dă polinomul

$$S(x)=x^4+ax^2+bx+2;\ a,\ b\in R.$$

1) Să se determine a și b astfel încît suma a două rădăcini să fie -2, iar celelalte două rădăcini să fie egale între ele.

Să se rezolve ecuația $S(x)=0$ în acest caz.

2) Dacă x_1 este rădăcina dublă, să se determine polinomul $P(x)=\frac{S(x)}{x-x_1}$.

3) Să se determine un polinom $Q(x)$ de gradul al doilea pentru care $Q(x_1)=x_1$, $Q(x_4)=x_3$, $Q(x_3)=x_4$.

(Inst. pedagogic Tg. Mureș, 1973)

Soluție. 1) Din relațiile lui Viete $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, $x_1x_2x_3x_4=2$ și $x_3+x_4=-2$, $x_1=x_2$, rezultă $x_1=x_2=1$, $x_3x_4=2$; deci $x_{3,4}=-1\pm i$.

Din $S(1)=0$, $S'(1)=0$ rezultă sistemul $a+b+3=0$, $2a+b+4=0$ care se verifică pentru $a=-1$, $b=-2$.

2) $P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+2)$, adică $P(x)=x^3+x^2-2$.

3) $Q(x)=Ax^2+Bx+C$ trebuie să satisfacă condițiile impuse: $A+B+C=1$, $-2Ai-B+iB+C=-1-i$, $2Ai-B-iB+C=-1+i$. Rezultă $A=\frac{4}{5}$, $B=\frac{3}{5}$, $C=-\frac{2}{5}$ și $Q(x)=\frac{1}{5}(4x^2+3x-2)$.

1.9. Se consideră sistemul

$$\begin{cases}(1-x)y\alpha^2+(x^2y+x-201y-1)\alpha-x^2+201=0\\ 2x^2-y^2-xy-\alpha x+\alpha y=0,\end{cases}$$

unde α, x, y sînt numere reale. Se cere:

1) Să se descompună prima ecuație în două ecuații de gradul întîi în α.

2) Presupunînd $x\neq y$ să se rezolve sistemul în necunoscutele (x, y). Să se arate că aceste valori sînt întotdeauna reale.

3) Să se găsească mulțimea valorilor lui α astfel ca valorile obținute pentru x și y să fie cuprinse în intervalul $(-2, 1)$.

(I. P. București, 1972)

Soluție. 1) Se observă că pentru $x\neq 1$ și $y\neq 0$ prima ecuație este de gradul doi în α avînd discriminantul $(x^2y+x-201y-1)^2+4(x-1)y(-x^2+201)=(x^2y-x-201y+1)^2$. De aceea ea are rădăcinile

$$\alpha_{1,2}=\frac{-(x^2y+x-201y-1)\pm(x^2y-x-201y+1)}{2(1-x)y},$$

Cu acestea membrul stîng se descompune în $(\alpha y-1)[(1-x)\alpha+(x^2-201)]$, iar ecuația în $\alpha y-1=0$ sau $(1-x)\alpha+x^2-201=0$.

2) Se observă mai întîi că ecuația a doua se poate scrie în forma $(x-y)(2x+y-\alpha)=0$, adică $2x+y-\alpha=0$. Rezultă că sustemul dat este echivalent cu sistemele

$$\begin{cases}\alpha y-1=0\\ 2x+y-\alpha=0,\end{cases}\quad\text{,}\qquad\begin{cases}x^2-\alpha x+\alpha-201=0\\ 2x+y-\alpha=0\end{cases}.$$

Acestea au soluții $x_1=\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}$, $y_1=\frac{1}{\alpha}$ respectiv $x_{2,3}=\frac{1}{2}(\alpha\pm\sqrt{(\alpha-2)^2+800})$, $y_{2,3}=\pm\sqrt{(\alpha-2)^2+800}$.

3) Evident $x_{2,3}$; $y_{2,3}\notin(-2, 1)$. Astfel problema pusă se reduce la rezolvarea sistemului

$$-2<\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}<1,\quad -2<\frac{1}{\alpha}<1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima inegalitate dublă implică $\alpha\in(-2-\sqrt{5},\ 1-\sqrt{2})\cup(-2+\sqrt{5},\ 1+\sqrt{2})$, iar a doua implică $\alpha\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)\cup(1,\ \infty)$. Intersectînd aceste mulțimi găsim $\alpha\in\left(-2-\sqrt{5},-\frac{1}{2}\right)\cup(1,\ 1+\sqrt{2})$.

1.10. Se dă sistemul:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ a^3x-a^2y-8\ \ln a+b=0, \\ 2x-3y+4=0, \end{cases}$$

unde a și b sînt parametri reali.

1) Să se determine legătura între a și b astfel încît sistemul să fie compatibil.

2) Folosind teorema lui Rolle să se discute ecuația care exprimă legătura dintre a și b, considerînd pe a drept variabilă și b ca parametru.

3) Dacă $D(a)$ este determinantul coeficienților lui x și y din a doua și a treia ecuație, atunci să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $D^2(a)-1=0$.

(I. P. București, 1971)

Soluție. 1) Din $x+y-3=0$, $2x-3y+4=0$ găsim $x=1$, $y=2$. Punînd condiția ca aceasta să verifice ecuația a doua găsim $f(a)=a^3-2a^2-8\ln a+b=0$; $a>0$.

2) Derivata $f'(a)=3a^2-4a-\frac{8}{a}$ are rădăcina reală $a=2$. Deoarece $\lim\limits_{a\to 0} f(a)=\infty$, $f(2)=b-8\ln 2$, $\lim\limits_{a\to\infty} f(a)=\infty$, avem: — pentru $b\in(-\infty,\ 8\ln 2)$, există două rădăcini $a_1\in(0,\ 2)$ și $a_2\in(2,\ \infty)$;

— pentru $b=8\ln 2$, o rădăcină dublă $a=2$;

— pentru $b>8\ln 2$, nu există rădăcini reale.

3) Deoarece $D(a)=\begin{bmatrix} a^3 & -a^2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}=2a^2-3a^3$, găsim ecuația $(2a^2-3a^3)^2-1=0$ sau $(2a^2-3a^3-1)(2a^2-3a^3+1)=0$. Ecuația $3a^3-2a^2-1=0$ are o singură rădăcină reală $a=1$, ecuația $3a^3-2a^2+1=0$ are o singură rădăcină reală $a\in(-1,\ 0)$.

1.11. În mulțimea numerelor reale strict negative se consideră legea de compoziție $a*b=\frac{ab}{a+b}$.

1) Să se arate că operația $*$ este definită pe toată mulțimea;

2) Să se arate că operația $*$ este asociativă;

3) Să se rezolve inecuația $(x-5)*(x-2)\leqslant(x-1)*(x-6)$ (trecînd pe corpul numerelor reale).

(Inst. pedagogic Tg. Mureș, 1973)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1) Se arată că dacă $a<0$, $b<0$, atunci $a*b<0$;

$$\{a<0,\ b<0\} \to \{ab>0,\ a+b<0\} \to a*b=\frac{ab}{a+b}<0.$$

2) Deoarece

$$a*(b*c)=\frac{a\cdot\frac{bc}{b+c}}{a+\frac{bc}{b+c}}=\frac{abc}{ab+ac+bc}$$

este expresie simetrică față de a, b, c, rezultă că

$$a*(b*c)=(a*b)*c.$$

3) Inecuația $(x-5)*(x-2)\leqslant(x-1)*(x-6)$ se transcrie

$$\frac{4}{2x-7}\leqslant 0 \text{ cu soluția } x\in\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)$$

Restrîngînd la mulțimea din enunț, rezultă $x\in(-\infty,\ 0)$.

1.12. Se consideră matricea $M=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, unde a, b, c, d sînt numere reale și matricea $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

1) Să se explicitezе elementele matricei $E=M^2-\lambda M-\mu I$, unde λ și μ sînt parametri.

2) Să se determine λ și μ astfel încît E să fie matricea zero.

3) Ce relație trebuie să satisfacă a, b, c, d pentru ca soluția găsită la punctul 2) să fie unică.

(I. P. București, 1971)

Soluție. 1) Deoarece

$$M^2=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{bmatrix},$$

găsim

$$E=\begin{bmatrix}a^2+bc-\lambda a-\mu & ab+bd-\lambda b\\ ac+cd-\lambda c & bc+d^2-\lambda d-\mu\end{bmatrix}.$$

2) Ipoteza este echivalentă cu

$$\begin{cases}a^2+bc-\lambda a-\mu=0\\ ac+cd-\lambda c=0\\ ab+bd-\lambda b=0\\ bc+d^2-\lambda d-\mu=0.\end{cases}$$

Scăzînd prima ecuație din ultima găsim $(a-d)\lambda=(a-d)(a+d)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a-d\neq 0$, atunci avem soluția unică

$$\lambda=a+d,\ \mu=bc-ad.$$

Dacă $a=d$ sistemul se reduce la

$$d^2+bc-\lambda d-\mu=0,\ (2d-\lambda)c=0,\ (2d-\lambda)b=0;$$

pentru $c\neq 0$ sau $b\neq 0$, găsim soluția unică $\lambda=2d$, $\mu=bc-d^2$; pentru $c=0$ și $b=0$ avem $\mu=d^2-\lambda d$, $\lambda\in R$, adică sistemul este nedeterminat.

3) Ultima întrebare este conținută în cea precedentă. Ea a fost probabil adresată acelora care „rezolvau" sisteme fără a face discuția existenței și unicității soluției.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. GEOMETRIE PLANĂ

1.13. Se consideră triunghiul echilateral ABC de latură a. Pe perpendiculara în B pe BC, se consideră un punct M astfel încît $\sphericalangle BMC=30°$ (punctele A și M sînt de o parte și de alta a dreptei BC). Să se calculeze lungimea segmentului AM.

(I. P. București, 1976)

Soluție. Deoarece $\sphericalangle BMC=30°$, în triunghiul dreptunghic MBC avem $MC=2BC=2a$ (fig. 1). Aplicînd teorema lui Pitagora găsim $BM=\sqrt{MC^2-BC^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$. Pe de altă parte observăm că $\sphericalangle ABM=150°$. De aceea teorema cosinusului aplicată în triunghiul ABM ne dă $AM^2=a^2+3a^2-2a^2\sqrt{3}\cos 150°$, adică $AM=a\sqrt{7}$.

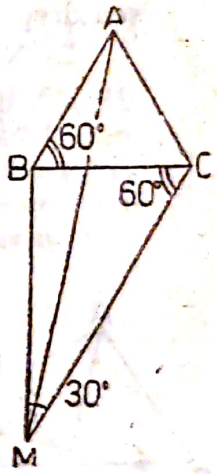


Fig. 1.

Notă. Dacă punctele A și M sînt de aceeași parte a lui BC atunci se observă ușor că $AM=a$.

1.14. O piesă din tablă de cupru de formă triunghiulară ABC trebuie modificată prin tăierea colțului A după o linie care unește mijloacele D și E ale lui AB, respectiv AC și prin tăierea colțului B după perpendiculara DF pe latura BC a piesei. Se dau $DE=100$ mm, $\sphericalangle B=30°$, $DF=50$ mm. Se cer:

1) Lungimile laturilor și unghiurile piesei inițiale;
2) Aria piesei inițiale;
3) Aria piesei obținute.

(Institutul de învățămînt superior Baia Mare, 1976)

Soluție (fig. 2). 1) Prin ipoteză $\sphericalangle B=30°$, triunghiul DFB este dreptunghic și $DF=50$ mm. Rezultă $BD=2\,DF=100$ mm. Apoi $DA=BD=100$ mm și deci $AB=200$ mm.

Deoarece $DE=100$ mm este linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă $BC=2\,DE=200$ mm.

Paralelismul $BC\|ED$ implică $\sphericalangle EDA=\sphericalangle CBA=30°$. Pe de altă parte $\sphericalangle C=\sphericalangle A=\frac{180°-\sphericalangle B}{2}=75°$. De aceea $\frac{DA}{\sin 75°}=\frac{EA}{\sin 30°}$, adică $EA=\frac{\sin 30°}{\sin 75°}\,DA=\frac{50}{\sin 75°}$. Dar $\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$. Astfel $EA=\frac{200}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$ și $CA=2\,EA=\frac{400}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$.

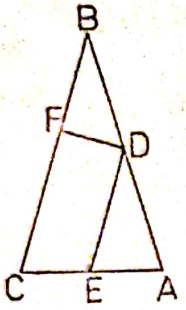


Fig. 2.

2) Avem aria $(ABC)=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin 30°=100$ cm².

3) Se observă că aria $(CEDF)$ = aria (ABC) − aria (EAD) − aria $(FDB)=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin 30°-\frac{1}{2}ED\cdot AD\sin 30°-\frac{1}{2}FD\cdot BD\sin 60°=$ $=100$ cm² − 25 cm² − $12{,}50\sqrt{3}$ cm² = 75 cm² − $12{,}50\sqrt{3}$ cm².

1.15. În triunghiul ABC, unghiul A este de două ori mai mare ca unghiul B

1) Să se calculeze unghiurile A, B și C cînd triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic.

2) Notînd cu D intersecția bisectoarei interioare a unghiului A cu latura BC, să se arate că bisectoarea unghiului ADC este paralelă cu latura AB.

3) Să se arate că latura AC este medie proporțională între latura BC și segmentul DC.

(Institutul pedagogic Suceava, 1974)

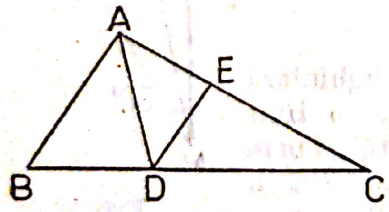


Fig. 3.

Soluție. (fig. 3). 1) Prin ipoteză $\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C=180°$ și $\sphericalangle A=2\sphericalangle B$. (a) Dacă $\sphericalangle A=\sphericalangle C$, atunci din $5\sphericalangle B=180°$ găsim $\sphericalangle B=36°$ și deci $\sphericalangle A=\sphericalangle C=72°$. Dacă $\sphericalangle B=\sphericalangle C$, atunci din $4\sphericalangle B=180°$ rezultă $\sphericalangle B=45°$ și deci $\sphericalangle C=45°$, $\sphericalangle A=90°$.

(b) Fie $\sphericalangle A=90°$; rezultă $\sphericalangle B=45°$ și $\sphericalangle C=45°$. Fie $\sphericalangle C=90°$; rezultă $3\sphericalangle B=90°$, adică $\sphericalangle B=30°$, $\sphericalangle A=60°$.

2) Fie DE bisectoarea unghiului ADC. Prin ipoteză $\sphericalangle B=\sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle ADE=\sphericalangle EDC$. Dar $\sphericalangle ADC=\sphericalangle B+\sphericalangle BAD$ (ca unghi exterior în triunghiul BAD). Rezultă $\sphericalangle B=\sphericalangle EDC$ și deci $DE\|BA$.

3) Deoarece $\sphericalangle DAC=\sphericalangle B$, $\sphericalangle ADC=\sphericalangle A$, triunghiurile ABC și DAC sînt asemenea. Rezultă $\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{AC}$, adică $AC^2=BC\cdot DC$.

Scanned with OKEN Scanner

1.16. Se dă un triunghi ABC. Perpendicularele duse în B și C pe laturile AB, respectiv AC intersectază laturile AC, AB în D respectiv E. Se cere:

1) Să se arate că triunghiurile ABC și ADE sînt asemenea.

2) Fie M mijlocul lui DE. Să se arate că dreptele MB și MC sînt tangente la cercul circumscris triunghiului ABC.

3) Ce condiție trebuie să îndeplinească triunghiul ABC pentru ca $DE=2BC$?

(Inst. pedagogic Tg. Mureș, 1973)

Soluție. (fig. 4). 1) Deoarece $BCDE$ este inscriptibil $\left(\sphericalangle ECD=\sphericalangle EBD=\frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $\sphericalangle D=\sphericalangle B$, $\sphericalangle E=\sphericalangle C$ și deci $\Delta ABC\sim\Delta ADE$.

2) În ΔEBD-dreptunghic, BM este mediană, $BM=EM$ și deci $\sphericalangle EBM=\sphericalangle BEM=\sphericalangle C$; rezultă că $\sphericalangle MBC=\pi-\sphericalangle B-\sphericalangle C=\sphericalangle A$, iar BM este tangentă la cerc în B. Analog pentru MC.

3) Dacă $DE=2BC$ rezultă că $AE=2AC$ și $AD=2AB$ ($\Delta ABC\sim\Delta ADE$); dar ΔACE-dreptunghic și ipotenuza este dublul unei catete. Rezultă $\sphericalangle CAE=\frac{\pi}{3}$.

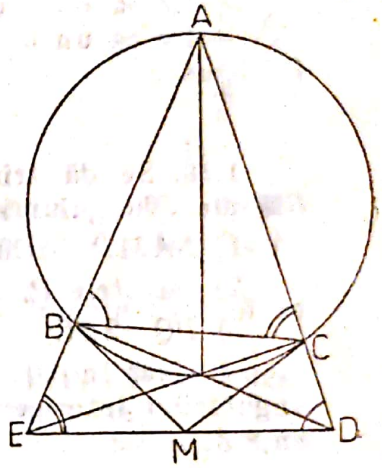


Fig. 4.

1.17. În triunghiul ABC avem $\sphericalangle A=90°$ și medianele AA', BB' sînt perpendiculare.

1) Să se afle medianele AA', BB', CC' și laturile triunghiului ABC în funcție de $AB=c$.

2) Să se arate că AA', BB' și CC' pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

3) Să se arate că patrulaterul $A'GC'B$ este inscriptibil, G fiind intersecția medianelor.

(Facultatea de subinginerie, Pitești, 1975)

Soluție. (fig. 5). 1) Deoarece $AA'=A'B=A'C$ triunghiurile $AA'B$ și $AA'C$ sînt respectiv isoscele. De aceea $\sphericalangle BAA'=\sphericalangle B$ și $\sphericalangle A'AC=\sphericalangle C$. În plus, $BB'\perp AA'$ implică $\sphericalangle ABG=\sphericalangle C$, $\sphericalangle AB'G=\sphericalangle B$. Acestea arată că $\Delta AABB'\sim\Delta ABC$. Deci $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{BB'}$ sau altfel scris $\frac{c}{b/2}=\frac{b}{c}=\frac{a}{BB'}$. Rezultă $b=c\sqrt{2}$, $a=\sqrt{b^2+c^2}=c\sqrt{3}$, $BB'=c\sqrt{\frac{3}{2}}$. Apoi $AA'=\frac{a}{2}=c\frac{3}{2}$ și $CC'=\sqrt{AC^2+AC'^2}=\sqrt{2c^2+\frac{c^2}{4}}=\frac{3}{2}c$.

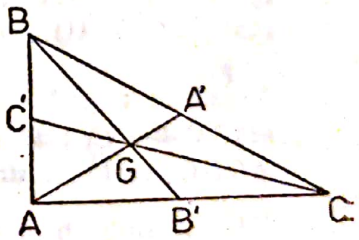


Fig. 5.

2) Se știe că trei segmente sînt laturile unui triunghi dreptunghic dacă pătratul lungimii unuia este suma pătratelor lungimilor celorlalte două. Aici se observă că $AA'^2+BB'^2=\frac{3}{4}c^2+\frac{3}{2}c^2=\frac{9}{4}c^2=CC'^2$.

3) Deoarece GC' este mediană în triunghiul dreptunghic AGB, avem $GC'=C'A=C'B$. Astfel triunghiul $AC'G$ este isoscel și deci $\sphericalangle AC'G=180°-2\sphericalangle C'AG=180°-2\sphericalangle BAA'=180°-2\sphericalangle B$. Pe de altă parte, în triunghiul isoscel $AA'B$ avem $\sphericalangle A'=180°-2\sphericalangle BAA'=180°-2\sphericalangle B$. Rezultă $\sphericalangle BA'G=\sphericalangle AC'G$ și deci patrulaterul $A'GC'B$ este inscriptibil.

Observație. Pentru a arăta că un patrulater este inscriptibil este suficient să probăm:

— fie că unghiul format de o diagonală cu o latură este egal cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă;

— fie că două unghiuri opuse sînt suplementare;

— fie că un unghi este egal cu unul dintre unghiurile adiacente unghiului opus.

1.18. Se dă triunghiul oarecare ABC. Prelungind medianele BM și CN ale triunghiului cu segmentele $MP=BM$ și $NQ=NC$, să se arate că:

1) $\Delta AMP=\Delta CMB$ și $\Delta ANQ=\Delta BNC$;

2) punctele P, A, Q sînt coliniare;

3) $PQ=2BC$;

4) dacă în patrulaterul $AQBC$ unghiul interior C este o treime din suma unghiurilor interioare B, Q și A, atunci patrulaterul $AQBC$ este un dreptunghi.

(Inst. pedagogic Tg. Mureș, 1976)

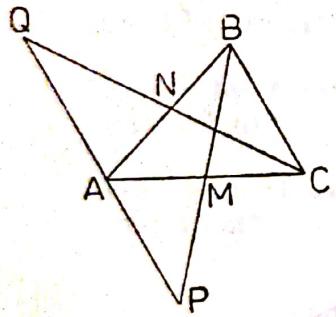


Fig. 6.

Soluție. (fig. 6). 1) Deoarece $AM=MC$, $BM=MB$ și $\sphericalangle AMP=\sphericalangle BMC$, rezultă că $\Delta AMP=\Delta CMB$.

Analog și $\Delta ANQ=\Delta BNC$.

2) Ținînd seama că $ABCP$ și $AQBC$ sînt paralelograme avem $\sphericalangle QAB+\sphericalangle BAC+\sphericalangle PAC=\sphericalangle ABC+\sphericalangle BAC+\sphericalangle ACB=180°$. Aceasta înseamnă că punctele P, A și Q sînt coliniare.

3) Figurile $ABCP$ și $AQBC$ sînt paralelograme. De aceea $QA=BC$ și $AP=BC$, adică $PQ=2BC$.

4) Relațiile $\sphericalangle A+\sphericalangle C=180°$, $\frac{\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle Q}{3}=180°-\sphericalangle C$, $\sphericalangle B+\sphericalangle Q=180°$ implică $\sphericalangle C=90°$. Rezultă că paralelogramul $AQBC$ este un dreptunghi.

1.19. Laturile unui dreptunghi $ABCD$ sînt $AB=a$ și $BC=b$. Pe laturile lui, în exterior, se construiesc triunghiurile echilaterale ABE, BCF, CDG și ADH.

1) Să se arate că patrulaterul $EFGH$ este un romb.

2) Să se calculeze lungimile diagonalelor rombului.

3) Să se calculeze aria acestui romb.

(Universitatea Craiova, 1976)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. (fig. 7). 1) Avem $HD=HA=FB=FC$, $GD=GC=EB=EA$ și $\sphericalangle HDG=\sphericalangle FCG=\sphericalangle FBE=\sphericalangle HAE=360°-90°-60°-60°=150°$. Astfel $\Delta HDG=\Delta FCG=\Delta FBE=\Delta HAE$. Rezultă $EF=FG=GH=HE$, adică $EFGH$ este un romb.

2) Avem $HF=HS+SQ+QF=2HS+SQ=2\sqrt{b^2-\frac{b^2}{4}}+a=a+b\sqrt{3}$, $EG=EP+PR+RG=2EP+PR=2\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}+b=b+a\sqrt{3}$.

3) Se știe că aria $(EFGH)=\frac{1}{2}HF\cdot EG$. Deci aria $(EFGH)=\frac{1}{2}(a+b\sqrt{3})(b+a\sqrt{3})$.

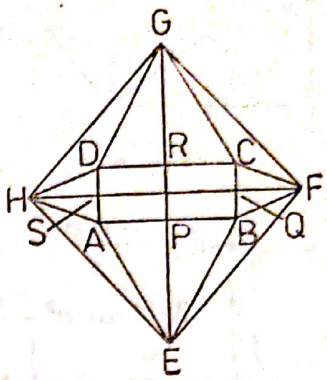


Fig. 7.

1.20. Se dă paralelogramul $ABCD$ și un punct E pe latura AB. Trei drepte paralele duse prin A, B, C întîlnesc dreapta DE respectiv în M, N, P.

1) Să se demonstreze că $MN=DP$.

2) Fie Q intersecția paralelei dusă prin N la AD cu dreapta CP. Să se demonstreze că $PQ=AM$.

3) Se cere locul geometric al punctului Q, cînd AM, BN, CP se rotesc respectiv în jurul punctelor A, B, C, rămînînd paralele între ele.

(I. P. București, 1972)

Soluție. (fig. 8). 1) Deoarece $AM\|NB$, triunghiurile AEM și BEN sînt asemenea. Rezultă $\frac{AE}{ME}=\frac{EB}{EN}=\frac{AE+EB}{ME+EN}=\frac{AB}{MN}$. Pe de altă parte și triunghiurile AEM și CDP sînt asemenea căci $AM\|PC$. De aceea $\frac{AE}{ME}=\frac{DC}{DP}$.

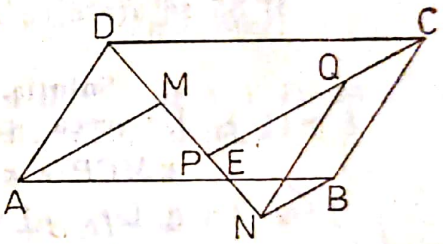


Fig. 8.

Ținînd seama de aceste relații și de faptul că $DC=AB$, găsim $DP=MN$.

2) Ipotezele $NQ\|BC\|AD$, $CP\|NB\|AM$ implică $NQ=BC=AD$ și $\sphericalangle DAM=\sphericalangle PQN$, $\sphericalangle ADM=\sphericalangle QNP$. De aceea $\Delta AMD=\Delta QPN$ și deci $PQ=AM$.

3) Deoarece segmentul NQ este egal și paralel mereu cu BC, rezultă că atunci cînd AM, NB și CP își schimbă pozițiile, el capătă o mișcare de translație. De aceea locul geometric al lui Q este o dreaptă paralelă la DE.

1.21. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ în care diagonala DB formează cu latura neparalelă BC un unghi de 90°.

1) Să se arate că diagonala DB este medie proporțională între AB și CD.

2) Notînd $AB=a$ și $\sphericalangle ADB=x$, să se determine aria trapezului în funcție de a și x.

3) Să se determine valoarea lui x pentru care aria trapezului este egală cu $\frac{3a^2}{2}$.

(Institutul de mine Petroșani, 1973)

Scanned with OKEN Scanner

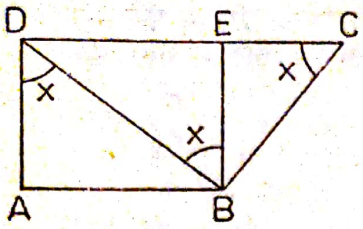


Fig. 9.

Soluție. (fig. 9). 1) Triunghiurile dreptunghice ABD și BDC sînt asemenea deoarece $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$. De aceea $\frac{DB}{AB} = \frac{CD}{DB}$ sau $DB^2 = AB \cdot CD$.

2) Avem $\frac{AD}{AB} = \operatorname{ctg} x$, adică $AD = a \operatorname{ctg} x$. Apoi $EC = BE \operatorname{ctg} x$ și cum $AD = BE$, deducem $EC = a \operatorname{ctg}^2 x$. Cu acestea găsim aria $(ABCD) = \frac{(AB+DC)AD}{2} = a^2 \frac{2+\operatorname{ctg}^2 x}{2} \operatorname{ctg} x$. Evident $x \in (0, \pi/2)$.

3) Din $a^2 \frac{2+\operatorname{ctg}^2 x}{2} \operatorname{ctg} x = \frac{3a^2}{2}$ rezultă ecuația $\operatorname{ctg}^3 x + 2 \operatorname{ctg} x - 3 = 0$. Găsim $\operatorname{ctg} x = 1$ și deci $x = \frac{\pi}{4}$, unica soluție admisibilă.

1.22. Fie un cerc dat de centru O și ABC un triunghi înscris în el. Pe tangenta în C la cerc se ia un punct P și se notează cu M și N proiecțiile lui P respectiv pe laturile AC și BC.

1) Să se arate că MN și AB sînt perpendiculare.

2) Considerînd punctele B, C, P fixe, iar A mobil pe cercul dat, să se afle locul geometric al intersecției I a dreptelor AB și MN, cînd A descrie cercul.

3) Să se arate că $NB^2 \cdot PC^2 = PM^2 \cdot NB^2 + IB^2 \cdot PC^2$.

(I. P. București, 1971)

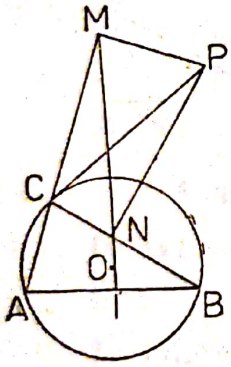


Fig. 10.

Soluție. (fig. 10). 1) Patrulaterul $MCNP$ este inscriptibil De aceea $\sphericalangle CNM = \sphericalangle MPC$. Dar $\sphericalangle MPC + \sphericalangle MCP = 90°$ și $\sphericalangle MCP = \sphericalangle ABC = \frac{1}{2}$ măs $\overset{\frown}{AC}$. Rezultă $90° = \sphericalangle CNM + \sphericalangle ABC = \sphericalangle INB + \sphericalangle IBN$, adică $IN \perp IB$.

2) Punctele B, C, P, N sînt fixe, iar A se mișcă pe cercul O. Observăm că $\sphericalangle BIN = 90°$, iar segmentul BN este fix. De aceea I aparține cercului de diametru BN.

3) Deoarece $MP \perp MC$, avem $PC^2 = MP^2 + MC^2$. Apoi se observă că $\Delta MPC \sim \Delta BIN$ și deci $\frac{PC}{BN} = \frac{MP}{IN} = \frac{MC}{BI}$. De aici găsim $MC^2 \cdot BN^2 = PC^2 \cdot BI^2$. Astfel $PC^2 \cdot BN^2 = MP^2 \cdot BN^2 + MC^2 \cdot BN^2 = MP^2 \cdot BN^2 + PC^2 \cdot BI^2$.

1.23. Se consideră cercul cu centrul O, tangent la dreapta d în punctul T. O dreaptă paralelă la OT intersectează cercul și dreapta d în punctele A, B, respectiv C (B între C și A). Fie M punctul diametral opus lui B. Dreapta MT intersectează pe AB în N.

1) Să se arate că triunghiul MBN este isoscel și $TC = \frac{1}{2} MA$.

2) Notînd cu E mijlocul segmentului BN, să se arate că patrulaterul $AOTE$ este trapez isoscel.

Scanned with OKEN Scanner

3) Să se afle locul geometric al punctului E, cînd dreapta AB se deplasează rămînînd paralelă cu OT.

(Facultatea de subinginieri, Piteşti, 1976)

Soluţie. 1) Deoarece $OM=OT$ triunghiul OTM este isoscel; deci $\sphericalangle TMO=\sphericalangle OTM$. Combinînd cu ipoteza $OT \parallel AC$, rezultă $\sphericalangle NMB=\sphericalangle MNB$ şi deci ΔMBN este isoscel.

OT este linie mijlocie în ΔMNB. Pe de altă parte $TC \perp AB$, $MA \perp AB$ implică $TC \parallel MA$ şi deci TC este linie mijlocie în ΔANM; rezultă $TC=\frac{1}{2}MA$.

2) Figura $AOTE$ este un trapez. În plus, segmentul TE este linie mijlocie în ΔNMB. De aceea $TE=\frac{1}{2}MB=$ $=OB=OA$, adică trapezul este isoscel.

3) Se observă că T este fix şi $TE=OB=$const. De aceea E descrie sferturile de cerc desenate în fig. 11, deasupra dreptei d.

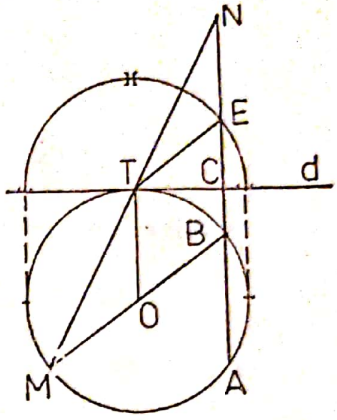


Fig. 11.

1.24. Pe segmentul AB de lungime a se consideră un punct C situat între A şi B astfel încît $AC=2CB$. Pe AC şi CB ca diametre se construiesc două semicercuri, unul de o parte şi celălalt de partea opusă a dreptei AB. Prin C se duce o secantă oarecare MCN (M pe arcul AC, N pe arcul CB).

1) Să se arate că tangentele în M, N la cele două semicercuri sînt paralele.

2) Fie O mijlocul segmentului AB; perpendiculara din O pe MN intersectează MN în P şi MB în Q. Să se arate că Q este mijlocul lui MB şi P este mijlocul lui MN.

3) Se notează $\sphericalangle BCN=\alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se afle α în cazul particular în care $AM+MN+NB=a\sqrt{2}$.

(I. P. Bucureşti, 1975)

Soluţie. (fig. 12). 1) Se observă că $\sphericalangle CMT_1=$ $=\sphericalangle CAM=90°-\sphericalangle ACM=90°-\sphericalangle NCB=$ $=\sphericalangle CBN=\sphericalangle CNT_2$. De aceea $MT_1 \parallel NT_2$.

2) Deoarece $OP \perp MN$ rezultă $OP \parallel AM$. Pe de altă parte O este mijlocul lui AB. Deci OQ este linie mijlocie în triunghiul ABM, adică Q este mijlocul lui MB. Analog $OP \perp MN$ implică $OP \parallel NB$ şi deci P este mijlocul lui MN.

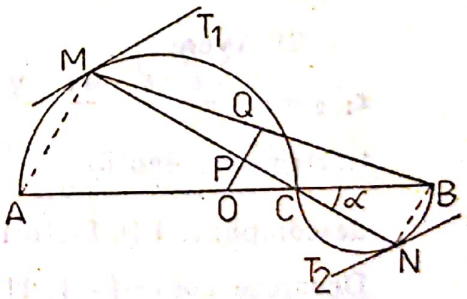


Fig. 12.

3) Urmînd figura 12 deducem $AM=\frac{2a}{3}\sin\alpha$, $BN=\frac{a}{3}\sin\alpha$, $MN=$ $=MC+CN=a\cos\alpha$. De aceea sîntem conduşi la ecuaţia $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$ sau $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$. Rezultă $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

§ 3. TRIGONOMETRIE

1.25. 1) Să se demonstreze identitatea

$$(1-\cos b\cos c)^2-\sin^2 b\sin^2 c=(\cos b-\cos c)^2.$$

2) Să se rezolve ecuația

$$x^2\sin^2 b-2(1-\cos b\cos c)x+\sin^2 c=0,\quad b\neq k\pi\quad k\in Z,$$

și să se precizeze semnele rădăcinilor.

(I. P. București, 1972)

Soluție. 1) Succesiv avem

$$(1-\cos b\cos c)^2-\sin^2 b\sin^2 c=1-2\cos b\cos c+\cos^2 b\cos^2 c-\sin^2 b\sin^2 c=$$
$$=\cos^2 b+\sin^2 b+\cos^2 b\cos^2 c-\sin^2 b\sin^2 c-2\cos b\cos c=\cos^2 b+$$
$$+\cos^2 b\cos^2 c+\sin^2 b(1-\sin^2 c)-2\cos b\cos c=\cos^2 b+\cos^2 b\cos^2 c+$$
$$+\sin^2 b\cos^2 c-2\cos b\cos c=\cos^2 b+\cos^2 c-2\cos b\cos c=(\cos b-\cos c)^2.$$

2) Avem

$$x_{1,2}=\frac{1-\cos b\cos c\pm\sqrt{(1-\cos b\cos c)^2-\sin^2 b\sin^2 c}}{\sin^2 b}=$$

(ținem seama de identitatea precedentă), $\frac{1-\cos b\cos c\pm(\cos b-\cos c)}{\sin^2 b}$. Înlocuind $\sin^2 b=1-\cos^2 b$, descompunînd în factori și simplificînd, deducem $x_1=\frac{1-\cos c}{1-\cos b}$, $x_2=\frac{1+\cos c}{1+\cos b}$. Deoarece $\cos c\in[-1,1]$ și $\cos b\in(-1,1)$ rezultă $x_1, x_2\geqslant 0$.

1.26. Se dă expresia $E=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)-\sin\alpha+\sin\beta}$ și se cere:

1) Să se calculeze valoarea lui E pentru $\alpha=\frac{\pi}{3}$ și $\beta=\frac{\pi}{6}$, apoi să se raționalizeze numitorul rezultatului.

2) Să se rezolve ecuația $(1+\sqrt{3})\sin x+E\cdot\cos x=0$, unde pentru E se ia valoarea calculată la punctul 1).

(Universitatea Craiova, 1976)

Soluție.

1) $E=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=-(1+\sqrt{3}).$

2) Ecuația devine $(1+\sqrt{3})(\sin x-\cos x)=0$, sau $\operatorname{tg} x=1$ cu soluția $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

1.27. Se dă ecuația $\sin x+\sin 3x=m\sin 2x$.

1) Să se rezolve ecuația pentru $m=\frac{2}{3}$.

2) Pentru ce valori ale lui m ecuația are soluții?

(Inst. pedagogic Tg. Mureș, 1973)

Soluție. Ecuația devine succesiv

$$2\sin 2x\cos x-m\sin 2x=0,\quad \sin 2x(2\cos x-m)=0;$$

$\sin 2x=0$ are soluțiile $x=\frac{k\pi}{2}$, iar $\cos x=\frac{m}{2}$ are $x=\pm\arccos\frac{m}{2}+2k'\pi$

$$\text{pentru } \frac{m}{2}\in[-1,\ +1],\ k,\ k'\in Z.$$

1) Dacă $m=\frac{2}{3}$ a doua mulțime de soluții devine

$$x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2k'\pi.$$

2) Ecuația admite ambele mulțimi de soluții pentru $m\in[-2,\ 2]$.

1.28. Fie expresiile $E_1=1+\cos x+\cos 2x$, $E_2=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$.

1) Să se transforme E_1 și E_2 în produse de funcții trigonometrice.

2) Să se rezolve ecuația $E_1=E_2$.

3) Să se calculeze: $\sin 15°$, $\cos 15°$, $\operatorname{tg} 75°$.

(Facult. de subingineri Arad, 1976)

Soluție.

1) $E_1=2\cos^2 x+\cos x=2\cos x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=4\cos x\cos\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2},$

$$E_2=2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\sin 2x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=4\sin 2x\cos\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}.$$

2) Ecuația devine $\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)(\cos x-\sin 2x)=0$, sau $\cos x=-\frac{1}{2}$, cu soluțiile $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; din $\cos x(1-2\sin x)=0$ rezultă $\cos x=0$ cu $x=(2k'+1)\frac{\pi}{2}$ și $\sin x=\frac{1}{2}$ cu $x=(-1)^{k''}\frac{\pi}{6}+k''\pi$, $k, k', k''\in Z$.

3) $\sin 15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

$\cos 15°=\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

$\operatorname{tg} 75°=\operatorname{ctg} 15°=\frac{\cos 15°}{\sin 15°}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=2+\sqrt{3}$.

1.29. Se consideră expresia:

$$E(x)=p(\cos^4 x+\sin^4 x)-2(p+2q)\sin^2 x\cos^2 x,$$

unde p, q sînt două numere strict pozitive. Se cere:

1) Să se exprime $E(x)$ în funcție numai de $\sin 2x$. De asemenea să se exprime $E(x)$ în funcție numai de $\cos 2x$. Să se arate apoi că $-q\leqslant E(x)\leqslant p$, oricare ar fi $x\in R$.

2) Să se rezolve ecuația $E(x)=0$ în cazul cînd $p=3q$.

3) Să se arate că dacă $0<x<\frac{\pi}{4}$, atunci

$$\frac{\sqrt{\frac{p-E(x)}{p+q}}+\sin x}{\sqrt{\frac{q+E(x)}{p+q}}+\cos x+1}=\operatorname{tg} x.$$

(I. P. București, 1971)

Soluție. 1) Observăm că

$$E(x)=p(1-2\sin^2 x\cos^2 x)-2(p+2q)\sin^2 x\cos^2 x=p-(p+q)\sin^2 2x=$$
$$=-q+(p+q)\cos^2 2x.$$

Deoarece $p-E(x)=(p+q)\sin^2 2x\geqslant 0$, rezultă $E(x)\leqslant p$; $q+E(x)=(p+q)\cos^2 2x\geqslant 0$ implică $E(x)\geqslant -q$ și deci $-q\leqslant E(x)\leqslant p$, $\forall x\in R$.

2) $E(x)=0$ cu condiția $p=3q$ devine $\sin^2 2x=\frac{3}{4}$, sau $\sin 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ cu soluțiile $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, $x=(-1)^{k'+1}\frac{\pi}{6}+k'\frac{\pi}{2}$, $k, k'\in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Deoarece $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, rezultă $2x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și deci $\sin 2x>0$, $\cos 2x>0$. În aceste ipoteze, se obține

$$\frac{\sqrt{\frac{p-E(x)}{p+q}}+\sin x}{\sqrt{\frac{q+E(x)}{p+q}}+\cos x+1}=\frac{\sin 2x+\sin x}{\cos 2x+\cos x+1}=\frac{\sin x(2\cos x+1)}{\cos x(2\cos x+1)}=\operatorname{tg} x.$$

$\left(\text{observăm că } \cos x\neq-\frac{1}{2}, \text{ deoarece } x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1.30. Se dau relațiile $\frac{x}{\sin 2a}=\frac{y}{\sin 2b}=\frac{z}{\sin 2c}$ (r) și se cere:

1) Să se arate că din relațiile (r) rezultă egalitatea:

$$\frac{y-z}{y+z}\operatorname{tg}(b+c)+\frac{z-x}{z+x}\operatorname{tg}(c+a)+\frac{x-y}{x+y}\operatorname{tg}(a+b)=\operatorname{tg}(b-c)+\operatorname{tg}(c-a)+\operatorname{tg}(a-b).$$

2) Dacă pe lîngă relația (r) se dau egalitățile: $2x=y+z$, $2a=b+c$, să se exprime unghiurile b și c în funcție de unghiul a.

3) Dacă pe lîngă relațiile (r) se dau egalitățile: $x+y+z=2$, $a+b+c=\pi$, să se determine x, y, z în funcție de sinusurile și cosinusurile unghiurilor a, b, c.

(I. P. București, 1971)

Soluție. 1) Folosind rapoarte derivate, rezultă

$$\frac{x}{\sin 2a}=\frac{y}{\sin 2b}=\frac{x+y}{\sin 2a+\sin 2b}=\frac{x-y}{\sin 2a-\sin 2b}$$

sau

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{\sin 2a-\sin 2b}{\sin 2a+\sin 2b}=\frac{\sin(a-b)\cos(a+b)}{\sin(a+b)\cos(a-b)},$$

adică

$$\frac{x-y}{x+y}\operatorname{tg}(a+b)=\operatorname{tg}(a-b).$$

Se procedează analog și rezultă ceilalți termeni. (Datorită simetriei lui (r), relația obținută rămîne valabilă pentru permutări ciclice ale tripletelor $\{x, y, z\}$, $\{a, b, c\}$).

2) Rapoartele derivate

$$\frac{z}{\sin 2c}=\frac{y}{\sin 2b}=\frac{2x}{2\sin 2a}=\frac{y+z}{\sin 2c+\sin 2b}$$

împreună cu $2x=y+z$ implică $2\sin 2a=\sin 2b+\sin 2c$, sau $\sin 2a=\sin(b+c)\cos(b-c)$; cu relația $2a=b+c$ se obține $\cos(b-c)=1$, $(\sin 2a\neq 0)$, sau $b-c=2k\pi$. Sistemul $b+c=2a$, $b-c=2k\pi$ are soluția $b=a+k\pi$, $c=a-k\pi$, $k\in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Din rapoarte derivate, cu condiția $x+y+z=2$, rezultă

$$\frac{x}{\sin 2a}=\frac{y}{\sin 2b}=\frac{z}{\sin 2c}=\frac{2}{\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c}$$

și deci

$$x=\frac{2\sin 2a}{\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c};$$

Cu condiția $a+b+c=\pi$, se transformă numitorul ultimei fracții

$$E=\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c=2\sin(a+b)\cos(a-b)+\sin 2c=$$

$$=2\sin c(\cos(a-b)+\cos c),\ \text{(deoarece } \sin(a+b)=\sin(\pi-c)=\sin c).$$

$$E=2\sin c(\cos(a-b)-\cos(a+b))=4\sin a\sin b\sin c.$$

În final, rezultă

$$x=\frac{\cos a}{\sin b\sin c};$$

y, z se determină analog.

1.31. Se consideră un triunghi ABC în care unghiul A este mai mare decît unghiul C și $\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$.

1) Să se arate că relația dată este echivalentă cu $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$.

2) Să se găsească relația pe care o verifică laturile acestui triunghi.

3) Se mai dă $\sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Să se calculeze $\cos 2B$. Folosind rezultatul obținut, să se determine unghiul B.

4) Să se calculeze $\cos\frac{A-C}{2}$ și să se explice cum se pot determina toate unghiurile triunghiului.

(I. P. București, 1971,
Inst. pedagogic Galați, 1973)

Soluție. 1) În ipoteza $\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$, succesiv avem $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=1-$$

$-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$. De aceea $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$. Raționamentul reciproc este evident.

2) Deoarece $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ și $\sin\frac{C}{2}$, $\sin\frac{A}{2}$ satisfac relații obținute din aceasta prin permutări ciclice, egalitatea din ipoteză conduce la $1=\frac{p-b}{b}$, adică $a+c=3b$.

3) Avem $\cos B=1-2\sin^2\frac{B}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. De aceea $\cos 2B=2\cos^2 B-1=-\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\sin\frac{B}{2}=\cos\left(\frac{\pi-B}{2}\right)$. Aceasta implică $2B-\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}=0$, adică $B=\frac{\pi}{5}$.

4) Mai întîi avem $\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; apoi $\cos\frac{A-C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+C}{2}+2\sin\frac{B}{2}=3\sin\frac{B}{2}=\frac{3}{4}(\sqrt{5}-1)$. Din acestea se pot explicita A și C.

1.32. Se consideră un triunghi oarecare ABC în care notăm cu A', B', C' picioarele înălțimilor și cu H punctul lor comun. Se cere să se demonstreze relațiile:

1) $HA'\cos A+HB'\cos B+HC'\cos C=6R\cos A\cos B\cos C$,

2) $\frac{AH}{HA'}+\frac{BH}{HB'}+\frac{CH}{HC'}=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A-3$,

3) $AH^2+BH^2+CH^2+\frac{AH\cdot BH\cdot CH}{R}=4R^2$.

(R este raza cercului circumscris triunghiului ABC).

(*I. P. București*, 1970)

Soluție. 1) Se observă că $\sphericalangle B'BC=90^\circ-\sphericalangle C$, deci $\sphericalangle BHA'=\sphericalangle C$. Astfel $HA'=BA'\operatorname{ctg}C=c\cos B\operatorname{ctg}C=2R\cos B\cos C$. Analog ceilalți termeni și deci $\Sigma HA'\cos A=6R\cos A\cos B\cos C$.

2) Deoarece $AH=\frac{AB'}{\sin C}=\frac{c\cos A}{\sin C}=2R\cos A$, rezultă

$$\sum\frac{AH}{HA'}=\sum\frac{\cos A}{\cos B\cos C}=-\sum\frac{\cos(B+C)}{\cos B\cos C}=-3+\Sigma\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

3) La fel $\Sigma AH^2=4R^2\Sigma\cos^2 A=2R^2\Sigma(1+\cos 2A)$. Dar $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1=-2\cos C[\cos(A+B)+\cos(A-B)]-1=-4\cos A\cos B\cos C-1$.

Deci $\Sigma AH^2=-8R^2\cos A\cos B\cos C+4R^2=4R^2-\frac{AH\cdot BH\cdot CH}{R}$.

1.33. Se consideră fracția

$$F(x)=\frac{\sin 3x+\cos 3x+\sin 5x+\cos 5x+\sin 7x+\cos 7x}{\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}$$

1) Arătați că fracția $F(x)$ poate fi pusă sub forma

$$F(x)=1+\operatorname{tg}5x.$$

2) Rezolvați ecuația $F(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Calculați perioada funcției $G(x)=F(x)+F\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

(Inst. pedagogic Tg. Mureș, 1976)

Soluție. 1) Rezultă succesiv

$$F(x)=1+\frac{\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}{\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}=1+\frac{2\sin 5x\cos 2x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 2x+\cos 5x}=1+$$

$$+\operatorname{tg} 5x\,\frac{2\cos 2x+1}{2\cos 2x+1}=1+\operatorname{tg} 5x,$$

în ipoteza că $2\cos 2x+1\neq 0$.

2) $1+\operatorname{tg} 5x=2\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$ se transcrie

$$\cos 5x+\sin 5x=2\cos 5x\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$$

sau

$$\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos 5x\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Rezultă

$$\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ cu soluțiile } x=-\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{5},$$

$$\cos 5x=\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ cu soluțiile } x=\pm\frac{\pi}{20}+2k'\frac{\pi}{5};\ k,k'\in Z.$$

3) $G(x)=1+\operatorname{tg} 5x+1+\operatorname{tg} 5\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2+\operatorname{tg} 5x-\operatorname{ctg} 5x$. Se observă că $G(x)=2+\operatorname{tg}(5x+\pi)-\operatorname{ctg}(5x+\pi)=2+\operatorname{tg} 5\left(x+\frac{\pi}{5}\right)-\operatorname{ctg} 5\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$; deci $T=\frac{\pi}{5}$.

1.34. Să se pună sub formă trigonometrică rădăcinile ecuației $z^3=1-i$

(I. P. București, 1976)

Soluție. O asemenea problemă se rezolvă astfel: se scrie membrul drept sub formă trigonometrică și apoi se determină din el radicalul de ordinul trei.

Notînd $u=1-i$, găsim $|u|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Apoi, din $\cos(\arg u)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, și $\sin(\arg u)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ deducem $\arg u=\frac{7\pi}{4}$. De aceea forma trigonometrică a numărului u este $u=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$. Cu acestea, din $z=\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]}$ găsim $z_k=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{7\pi}{12}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{7\pi}{12}\right)\right]$, $k=0,\ 1,\ 2,$ sau $z_0=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$, $z_1=2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}\right)$, $z_2=2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 2

ADMITERE
MATEMATICIENI, INGINERI, ECONOMIŞTI, FIZICIENI, CHIMIŞTI etc.

§ 1. ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ALGEBRĂ

2.1. Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuaţia: $(m^2+1)x^2-(2m+1)x+1=0$ are rădăcini reale situate în intervalul $(-\infty, 1]$.

(I. P. Bucureşti, 1976)

Soluţie. Ipoteza că ecuaţia dată are rădăcini reale este echivalentă cu $\Delta=4m-3\geqslant 0$. Rezultă $m\geqslant 3/4$. Această semidreaptă nu mai poate fi restrînsă, deoarece pentru $m\geqslant 3/4$ avem $m^2+1>0$, $f(1)\geqslant 0$, $0<S=\frac{2m+1}{m^2+1}<2$, $P=\frac{1}{m^2+1}>0$, iar aceste relaţii implică faptul că ambele rădăcini sînt situate în intervalul $(0, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

2.2. Se consideră ecuația

$$(16m^2+11)x^2-(16m+43)x+16m+43=0$$

și se cere:

1) Să se discute natura rădăcinilor ecuației după valorile parametrului real m.

2) Să se determine valorile lui m pentru care $\frac{2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{1}{x_1+x_2}<0$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației date.

3) Să se rezolve ecuația dată pentru $m=2$, să se scrie rădăcinile ei sub formă trigonometrică și apoi să se calculeze expresia $E=x_1^4+x_2^4$.

(Facultatea de studii economice. Timișoara, 1970)

Soluție. 1) Deoarece $\Delta=(16m+43)^2-4(16m^2+11)(16m+43)=$ $=-(16m+43)(8m-1)^2$, avem

m	Δ	Natura rădăcinilor
$(-\infty,\ -43/16)$	$+$	reale
$(-43/16,\ 1/8)\cup(1/8,\ \infty)$	$-$	complexe
$-43/16$ sau $1/8$	0	reale confundate

2) Avem $x_1+x_2=\frac{16m+43}{16m^2+11}=x_1x_2$, $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ și $\frac{2}{x_1^2+x_2^2}+$ $+\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2}{(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)}$. Condiția din enunț este echivalentă cu $16m+43<0$. De aceea $m\in(-\infty,\ -43/16)$.

3) Pentru $m=2$ ecuația se reduce la $x^2-x+1=0$. Aceasta are soluțiile $x_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$, $x_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)$. Utilizînd formula lui Moivre găsim $x_1^4+x_2^4=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}+\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+$ $+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=2\cos\frac{4\pi}{3}$.

2.3. Să se determine numerele reale a și b astfel încît ecuația x^4-2ax^2+ $+b^2=0$ să admită rădăcini:

1) în progresie aritmetică,

2) în progresie geometrică.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1970)

Soluție. 1) Din ipoteza că rădăcinile sînt x_1, $x_2=x_1+r$, $x_3=x_1+2r$, $x_4=$ $=x_1+3r$ și din relația lui Viète $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ rezultă $x_2+x_3=0$, x_1+

$+x_4=0$, $2x_1+3r=0$ și deci $x_1=-\frac{3}{2}r$, $x_2=-\frac{r}{2}$, $x_3=\frac{r}{2}$, $x_4=\frac{3}{2}r$. Introducînd în $(x_1+x_4)(x_2+x_3)+x_1x_4+x_2x_3=-2a$, $(x_1+x_4)x_2x_3+(x_2+x_3)x_1x_4=0$, $x_1x_2x_3x_4=b^2$ găsim $r^2=\frac{4}{5}a$, $r^4=\frac{16}{9}b^2$. Acestea implică $a>0$, $3a=5|b|$ și $r=\pm 2\sqrt{\frac{a}{5}}$, în mulțimea numerelor reale, sau $3a=\pm 5b$ și $r=2\sqrt{\frac{a}{5}}$, în mulțimea numerelor complexe.

2) Din ipoteza x_1, $x_2=x_1q$, $x_3=x_1q^2$, $x_4=x_1q^3$ și din $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ găsim $1+q+q^2+q^3=0$, adică $(q+1)(q^2+1)=0$. Astfel $q=-1$ sau $q=\pm i$.

Pentru $q=-1$, relațiile $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=-2a$, $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4=0$, $x_1x_2x_3x_4=b^2$ implică $a^2=b^2$. Aceleași relații ale lui Viete arată că q nu poate fi $\pm i$.

2.4. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x-y-4z=6 \\ 2x+my-4z=14 \\ nx-y+z=2, \text{ cu ajutorul determinanților.} \end{cases}$$

Să se discute soluțiile după m, $n\in R$.

(Institutul de marină Constanța, 1977; text adăugit).

Soluție.

$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & m+1 & 0 \\ n & -1 & 1 \end{vmatrix}=2(m+1)(2n+1)$. Pentru $m\neq -1$, $n\neq -\frac{1}{2}$ sistemul este tip Cramer (compatibil, determinat).

$D_x=\begin{vmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 14 & m & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ m+7 & m & m-4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=2(7m+27)$, $x=\frac{7m+27}{(m+1)(2n+1)}$;

$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 2 & 14 & -4 \\ n & 2 & 1 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ n & 2 & 1 \end{vmatrix}=16(1+2n)$, $y=\frac{8}{m+1}$

$D_z=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & m & 14 \\ n & -1 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2m+2 & m & 3m+7 \\ n-2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-2(3mn+7n-2m-10)$,

$$z=-\frac{3mn+7n-2m-10}{(m+1)(2n+1)}.$$

Pentru $m=-1$, n — oarecare, sistemul este incompatibil.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $m\neq -1$, $n=-\frac{1}{2}$, sistemul devine $\begin{cases} 2x-y-4z=6 \\ 2x+my-4z=14 \\ -x-2y+2z=4; \end{cases}$

determinantul principal poate fi considerat

$\delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0$. Determinantul caracteristic este

$D_c=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & m & 14 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & m-4 & m+7 \end{vmatrix}=-2(7m+27)$; pentru $m\neq -\frac{27}{7}$ sistemul este incompatibil, iar pentru $m=-\frac{27}{7}$ sistemul este compatibil, simplu nedeterminat. În ultimul caz soluția este

$$y=-\frac{14}{5},\quad x=\frac{8}{5}+2z,\ z\in R.$$

2.5. Se dă sistemul

$$\begin{cases} x^2=ax+y \\ y^2=x+ay, \end{cases}\quad a\in R.$$

Se cere:

1) Să se rezolve sistemul.

2) Notînd cu (x_i, y_i) soluțiile sistemului, să se scrie ecuația care are drept rădăcini toate numerele x_i. Să se facă verificarea prin eliminare.

3) Să se studieze dacă există valori reale ale lui a pentru care toate soluțiile x_i, y_i ale sistemului să fie reale și pozitive.

(I. P. București, 1970)

Soluție. 1) Sistemul este de gradul patru și, prin scăderea și adunarea ecuațiilor sale, trece în următorul sistem echivalent

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-a+1)=0 \\ x^2+y^2=(a+1)(x+y). \end{cases}$$

Din $x-y=0$, $x^2+y^2=(a+1)(x+y)$ găsim $x_1=y_1=0$, $x_2=y_2=a+1$; din $x+y-a+1=0$, $x^2+y^2=(a+1)(x+y)$ obținem $x_3=\frac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+2a-3})$, $y_3=\frac{1}{2}(a-1-\sqrt{a^2+2a-3})$, $x_4=\frac{1}{2}(a-1-\sqrt{a^2+2a-3})$, $y_4=\frac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+2a-3})$.

2) Deoarece $x_1=0$, $x_2=a+1$, $x_3=\frac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+2a-3})$, $x_4=\frac{1}{2}(a-1-\sqrt{a^2+2a-3})$, prin calcul direct găsim

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2a,\quad x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=a^2-a,\quad x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=1-a^2,\quad x_1x_2x_3x_4=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aceea ecuația căutată este

$$x^4-2ax^3+(a^2-a)x^2+(a^2-1)x=0.$$

Prin eliminare: $y=x^2-ax$ și înlocuind în a doua ecuație a sistemului găsim

$$(x^2-ax)^2=x+a(x^2-ax);$$

efectuînd calculele se obține ecuația de mai sus.

3) x_3, x_4 verifică ecuația $x^2+(1-a)x+1-a=0$ și sînt rădăcini reale și pozitive numai dacă $\Delta=a^2+2a-3\geqslant 0$, $P=1-a\geqslant 0$, $S=1-a\geqslant 0$, adică pentru $a\in(-\infty, -3]\cup\{1\}$. Deoarece $x_2=a+1\geqslant 0$ implică $a\in[-1, \infty)$, singura valoare pentru care soluțiile sînt reale pozitive este $a=1$; rezultă $x_{1,2,3}=y_{1,2,3}=0$, $x_2=y_2=2$.

2.6. Să se pună în ordine crescătoare numerele:

$$A=2,\ B=m,\ C=\frac{m+2}{2},\ D=\sqrt{m^2+4}$$

(discuție după valorile parametrului real m).

(I. P. București, 1976)

Soluție. Graficele mărimilor A, B, C, ca funcții de parametrul real m sînt drepte, iar graficul lui D este o ramură a unei hiperbole pentru care $y=m$ este o asimptotă (fig. 13). De aceea pentru $m\leqslant 2$ avem ordinea B, C, A, D, iar pentru $m>2$ avem ordinea A, C, B, D.

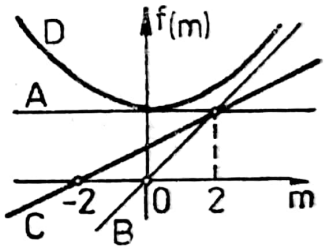


Fig. 13.

2.7. Pentru ce valori ale parametrului real m inegalitatea $-2<\frac{2x^2-mx+2}{x^2-x+1}<6$ este satisfăcută pentru orice $x\in R$?

(I. P. București, 1977)

Soluție. Numitorul fiind pozitiv pentru orice $x\in R$, rezultă sistemul echivalent $4x^2-(m+2)x+4>0$, $4x^2+(m-6)x+4>0$. Relațiile se verifică pentru orice $x\in R$, dacă se satisfac condițiile: $(m+2)^2-64<0$, sau $m\in(-10, 6)$; $(m-6)^2-64<0$, sau $m\in(-2, 14)$. Ambele relații se satisfac pentru $m\in(-2, 6)$.

2.8. Se consideră expresia

$$E(a, z)=\sqrt{\frac{z^2}{a^2}+2+\frac{a^2}{z^2}},$$

unde a este un număr real diferit de zero, iar z este un număr complex diferit de zero.

1) Să se determine rădăcinile ecuației $E(1, z)=1$ și să se arate că ele se află pe un cerc.

2) Să se determine valorile reale ale lui a pentru care ecuația $E(a, z)=a$ n necunoscuta z are toate rădăcinile complexe.

(I. P. Iași, 1972)

Soluție. Evident $E(a, z)=\sqrt{\left(\frac{z}{a}+\frac{a}{z}\right)^2}=\pm\left(\frac{z}{a}+\frac{a}{z}\right)$.

1) Ecuația $E(1, z)=1$ este echivalentă cu ecuațiile de gradul doi $z+\frac{1}{z}=$ $=\pm 1$. Acestea au soluțiile $z_1=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$, $z_2=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$, respectiv $z_3=$ $=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $z_4=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$. Deoarece $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$, toate rădăcinile se află pe cercul de rază unu cu centrul în origine.

2) Ecuația $E(a, z)=a$ este echivalentă cu ecuațiile de gradul doi $\frac{z}{a}+$ $+\frac{a}{z}=\pm a$, adică $z^2\mp a^2z+a^2=0$. Acestea au numai rădăcini complexe dacă $\Delta=a^2(a^2-4)<0$, adică $a\in(-2, 2)-\{0\}$.

2.9. Să se rezolve ecuația

$$\log_x^2 6+\log_{\frac{1}{6}}^2\frac{1}{x}+\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{1}{6}+\log_{\sqrt{6}}x+\frac{3}{4}=0$$

(Institutul de marină Constanța, 1977)

Soluție. Deoarece $\log_{\frac{1}{6}}\frac{1}{x}=\log_6 x$, $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{1}{6}=2\log_x 6$, $\log_{\sqrt{6}}x=2\log_6 x$, pentru $x>0$, $x\neq 1$, ecuația devine $\log_x^2 6+\log_6^2 x+2\log_x 6+2\log_6 x+\frac{3}{4}=0$. Dacă $y=\log_6 x$, rezultă $y^2+\frac{1}{y^2}+2\left(y+\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{4}=0$ și cu substituția $y+\frac{1}{y}=t$ se obține $t^2+2t-\frac{5}{4}=0$.

Ultima ecuație are soluțiile $t=\frac{1}{2}$, $t=-\frac{5}{2}$ și rezultă: $2y^2-y+2=0$, care are rădăcini complexe și deoarece $y\in R$, nu conduce la soluții ale ecuației inițiale; $y^2+\frac{5}{2}y+1=0$, $y=-2$, $y=-\frac{1}{2}$ și rezultă soluțiile

$$x=\frac{1}{36},\ x=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

2.10. Să se rezolve inecuația

$$\log_m x+\log_{m^2}x+\log_m x\log_{m^3}x>0,$$

analizîndu-se diferitele situații după parametrul real m.

(Universitatea Brașov, ingineri, 1972)

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. Existenţa membrului stîng impune condiţiile $m>0$, $m\neq 1$, $x>0$, $x\neq m$, $x\neq\frac{1}{m}$, iar inegalitatea impune $x\neq 1$. Apoi observăm că membrul stîng se poate scrie astfel

$$\log_m x+\frac{1}{\log_x m+1}+\log_m x\,\frac{1}{\log_x m-1}=\log_m x+\frac{\log_m x}{1+\log_m x}+\log_m x\,\frac{\log_m x}{1-\log_m x}=$$

$$=\frac{2\log_m x}{1-\log_m^2 x}.$$ Notăm $y=\log_m x$ şi inegalitatea ia forma echivalentă $\frac{y}{1-y^2}>0$.

Folosind tabelul

y	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$1-y^2$	$-$		0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{y}{1-y^2}$	$+$		$-$	0	$+$		$-$		

deducem $y\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)$.

Fie $m>1$. Din $-\infty<\log_m x<-1=\log_m m^{-1}$, $0=\log_m 1<\log_m x<1=\log_m m$ deducem $x\in\left(0,\frac{1}{m}\right)\cup(1,\ m)$.

Analog pentru $m>1$ găsim $x\in(m,\ 1)\cup\left(\frac{1}{m},\ \infty\right)$.

2.11. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{\log_a(ax)^{1/a^2}+\log_x(ax)^{1/a^2}}=a-\sqrt{\log_a\left(\frac{x}{a}\right)^{1/a^2}+\log_x\left(\frac{a}{x}\right)^{1/a^2}}$$

unde $a>0$, $a\neq 1$.

(I. P. Braşov, 1970)

Soluţie. Existenţa expresiilor din ambii termeni ai ecuaţiei impune $x>0$, $x\neq 1$.

Cu aceste condiţii ecuaţia se transcrie succesiv

$$\sqrt{2+\log_a x+\log_x a}+\sqrt{\log_a x+\log_x a-2}=a^2,$$

$$|\log_a x+1|+|\log_a x-1|=a^2\sqrt{\log_a x}.$$

1) Dacă $a\in(0,\ 1)$ condiţia $\log_a x>0$ se satisface pentru $x\in(0,\ 1)$.

Observăm că

$$|\log_a x+1|=\begin{cases}\log_a x+1, & x\in\left(0,\frac{1}{a}\right]\\ -\log_a x-1, & x\in\left(\frac{1}{a},\ \infty\right),\end{cases}\qquad |\log_a x-1|=\begin{cases}\log_a x-1, & x\in(0,\ a]\\ 1-\log_a x, & x\in(a,\ \infty).\end{cases}$$

Pentru $x\in(0,\ a]$ ecuația devine $2\cdot\log_a x=a^2\sqrt{\log_a x}$ cu singura soluție posibilă $x=a^{a^4/4}$; din $a^{a^4/4}\in(0,\ a]$ rezultă că $a\geqslant\sqrt{2}$ (contradicție cu $a\in(0,\ 1)$).

Pentru $x\in(a,\ 1)$ se obține ecuația $2=a^2\sqrt{\lg_a x}$ cu soluția posibilă $x=a^{4/a^4}$; dacă $a^{4/a^4}\in(a,\ 1)$, atunci rezultă $a>\sqrt{2}$ (contradicție).

2) Dacă $a\in(1,\ \infty)$, condiția $\log_a x>0$ se verifică pentru $x\in(1,\ \infty)$. Observăm că

$$|\log_a x+1|=\begin{cases}\log_a x+1, & x\in\left[\frac{1}{a},\ \infty\right)\\ -\log_a x-1, & x\in\left(0,\frac{1}{a}\right),\end{cases}\qquad |\log_a x-1|=\begin{cases}\log_a x-1, & x\in[a,\ \infty)\\ 1-\log_a x, & x\in(0,\ a).\end{cases}$$

Cînd $x\in(1,\ a]$ ecuația devine $2=a^2\sqrt{\log_a x}$ cu soluția posibilă $x=a^{4/a^4}$ $a^{4/a^4}\in(1,\ a]$ dacă $a\geqslant\sqrt{2}$ și deci $x=a^{4/a^4}$ este soluție.

Pentru $x\in(a,\ \infty)$ ecuația se transcrie $2\cdot\log_a x=a^2\sqrt{\log_a x}$ și este verificată de $x=a^{a^4/4}$; deoarece condiția $a^{a^4/4}\in(a,\ \infty)$ implică $a>\sqrt{2}$, rezultă că $x=a^{a^4/4}$ este soluție.

2.12. Să se rezolve ecuația

$$3\cdot\log_{1\,000}(x-1)+2\cdot\log_{100}(x+3)-2^{x+3}\log_{10}(x^2+2x-3)=0.$$

(I. P. București, 1976)

Soluție. Impunînd condițiile $x-1>0$, $x+3>0$, $x^2+2x-3>0$, rezultă că ecuația are sens numai pentru $x>1$. Ținînd seama de relația $\log_a b=\log_{a^n} b^n$, $\forall n\in N$, rezultă

$$3\cdot\log_{1\,000}(x-1)=\log_{10^3}(x-1)^3=\log_{10}(x-1),\ 2\cdot\log_{100}(x+3)=\log_{10^2}(x+3)^2=$$
$$=\log_{10}(x+3).$$

De aceea ecuația dată este echivalentă cu

$$\lg(x-1)+\lg(x+3)-2^{x+3}\lg(x-1)(x+3)=0,\ x>1,$$

sau cu $(1-2^{x+3})\lg(x-1)(x+3)=0$, $x>1$.

Aceasta implică $(x-1)(x+3)=1$, $x>1$ și deci $x=\sqrt{5}-1$.

2.13. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x^3y^2=a^{13}$$
$$(\lg x)^2+(\lg y)^2=\frac{130}{9}(\lg a)^2.$$

(Institutul de mine, Petroșani, 1971)

Soluție. Mai întîi logaritmăm prima egalitate:

$$3\cdot\lg x+2\cdot\lg y=13\cdot\lg a;\ x>0,\ y>0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Apoi notăm $s=\lg x$, $t=\lg y$ și sistemul se transcrie în forma

$$\begin{cases} 3s+2t=13\cdot\lg a \\ s^2+t^2=\frac{130}{9}(\lg a)^2. \end{cases}$$

Eliminînd pe t ajungem la ecuația $9s^2-54\,s\lg a+77\lg^2 a=0$. De aceea $s_1=\frac{7}{3}\lg a$, $s_2=\frac{11}{3}\lg a$, $t_1=3\cdot\lg a$, $t_2=\lg a$ și astfel găsim $x_1=\sqrt[3]{a^7}$, $y_1=a^3$; $x_2=\sqrt[3]{a^{11}}$, $y_2=a$.

2.14. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \log_\alpha x\cdot\log_\alpha z+\log_\alpha y=3 \\ \log_\alpha y\cdot\log_\alpha z-\log_\alpha x=4 \\ (\log_\alpha z+1)\log_\alpha x+(\log_\alpha z-1)\log_\alpha y=1, \ \alpha>0, \text{ și } \alpha\neq 1. \end{cases}$$

(Institutul de construcții București, 1972)

Soluție. Evident se impun de la început condițiile $x, y, z>0$. Apoi, notînd $u=\log_\alpha x$, $v=\log_\alpha y$, $w=\log_\alpha z$ sistemul se transcrie în forma

$$\begin{cases} uw+v=3 \\ vw-u=4 \\ uw+vw+u-v=1. \end{cases}$$

Adunînd primele două ecuații și scăzînd pe a treia, găsim $v-u=3$. Apoi, deoarece w nu poate fi zero, a treia ecuație se reduce la $v+u=\frac{4}{w}$. Rezultă $u=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{w}-3\right)$, $v=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{w}+3\right)$ și introducînd în prima ecuație deducem că $3w^2-w-4=0$. Găsim $w_1=-1$, $w_2=\frac{4}{3}$ și deci $u_1=-7/2$, $u_2=0$; $v_1=-1/2$, $v_2=3$.

Relația $\log_\alpha x=-7/2$ implică $x_1=\alpha^{-7/2}$, iar relația $\log_\alpha x=0$ implică $x_2=1$. Analog găsim $y_1=\alpha^{-1/2}$, $y_2=\alpha^3$, $z_1=\alpha^{-1}$, $z_2=\alpha^{4/3}$. Soluțiile sistemului sînt (x_1, y_1, z_1) și (x_2, y_2, z_2).

2.15. Să se determine numărul x știind că al șaselea termen al dezvoltării binomului

$$\left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right)^n$$

este egal cu 21, iar coeficienții binomiali ai termenilor de rang doi, trei și patru sînt respectiv primul, al treilea și al cincilea termen ai unei progresii aritmetice.

(I. P. Brașov, 1970)

Soluție. Prin ipoteză numerele nenule n, $\frac{n(n-1)}{2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ sînt respectiv primul, al treilea și al cincilea termen ai unei progresii aritmetice.

De aceea

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}-n.$$

Rezultă $n=7$.

Pe de altă parte tot prin ipoteză avem

$$C_7^5\left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}}\right)^2\left(\sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right)^5=21.$$

Deoarece $C_7^5=21$, găsim $2^{\log(10-3^x)}\cdot 2^{(x-2)\log 3}=2^0$. Astfel $\log(3^{x-2}(10-3^x))=0$, adică $3^{x-2}(10-3^x)=1$ sau $3^{2x}-10\cdot 3^x+9=0$. Rezultă $3^x=3^2$ sau $3^x=1$, adică $x=2$ sau $x=0$.

2.16. În dezvoltarea binomului $(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}})^n$ suma coeficienților ultimilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle valorile lui x pentru care suma dintre termenul al treilea și termenul al cincilea este egală cu 135.

(I. P. Galați, 1970)

Soluție. Coeficienții ultimilor trei termeni sînt $C_n^{n-2}=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$, $C_n^{n-1}=C_n^1=n$, $C_n^n=1$. De aceea $\frac{n(n-1)}{2}+n+1=22$ dă $n=6$.

Ținînd seama că termenul al treilea are expresia $C_6^2(\sqrt{2^x})^4 2^{1-x}$, iar termenul al cincilea este $C_6^4(\sqrt{2^x})^2 2^{2-2x}$, găsim ecuația

$$C_6^2 2^{2x}2^{1-x}+C_6^4 2^x 2^{2\cdot 2x}=135 \text{ sau } 2\cdot 2^{2x}-9\cdot 2^x+4=0.$$

Notăm $2^x=t$ și ținînd seama că $2t^2-9t+4=0$ implică $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=4$, găsim $x_1=-1$, $x_2=2$.

2.17. Să se studieze natura și semnele rădăcinilor ecuației $x^3-3x-\frac{2m}{m^2+1}=0$ după valorile reale ale parametrului m. Există valori $m\in R$ astfel încît produsul a două rădăcini să fie egal cu unitatea?

(I. P. București, 1977)

Soluție. Notînd cu $P(x)$ polinomul, rezultă $P'(x)=3(x^2-1)$; rădăcinile derivatei sînt ± 1. Observăm că pentru orice $m\in R$, $P(-1)=\frac{2(m^2-m+1)}{m^2+1}>0$, $P(+1)=\frac{-2(m^2+m+1)}{m^2+1}<0$. Tabelul discuției după $m\in R$, folosind șirul lui Rolle, este

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie, pentru orice $m\in R$ există trei rădăcini reale, distincte: $x_1\in(-\infty, -1)$, $x_2\in(-1, +1)$, $x_3\in(+1, +\infty)$; observăm că $x_1<0$, $x_3>0$. Deoarece $P(0)=\frac{-2m}{m^2+1}$, rezultă: $x_2>0$, dacă $m<0$; $x_2<0$, dacă $m>0$. Pentru ultima întrebare sînt posibile numai $x_1x_2=1$, sau $x_2x_3=1$, deoarece $x_1<-1$, $x_3>+1$. Fie $x_1x_2=1$, atunci rezultă $x_3=\frac{2m}{m^2+1}$ și din condiția $P(x_3)=0$ se obține $8m(m^4+m^2+1)=0$. Singura soluție reală este $m=0$; ecuația devine în acest caz $x^3-3x=0$ și are soluțiile $\{0, \pm\sqrt{3}\}$, care nu pot satisface condiția din enunț. Analog, în cazul $x_2x_3=1$.

2.18. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$.
1) Să se exprime în funcție de a, b, c determinantul

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

2) Să se determine o relație între numerele reale a, b, c așa ca cele trei rădăcini ale lui $P(x)$ să aibă partea reală comună.
3) Să se arate că polinomul x^3+3x^2+4x+2 verifică relația obținută și să se calculeze rădăcinile acestui polinom.

(I. P. București, 1972)

Soluție. 1) Observăm că

$$D=(x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)[3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-(x_1+x_2+x_3)^2].$$

Apoi, ținînd seama de relațiile dintre rădăcini și coeficienți, $x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$, $x_1x_2x_3=-c$, găsim $D=a(a^2-3b)$.
2) Deoarece a, b, c sînt numere reale și gradul lui $P(x)$ este impar, avem sigur o rădăcină reală x_1. Forma cea mai generală a celorlalte două rădăcini este $x_2=\alpha+i\beta$, $x_3=\alpha-i\beta$. Condiția $x_1=\alpha$ și relațiile între coeficienți și rădăcini implică $3\alpha=-a$, $3\alpha^2+\beta^2=b$, $\alpha(\alpha^2+\beta^2)=-c$. Eliminînd pe α și β între aceste egalități, găsim $2a^3=9(ab-3c)$.
Cazul $x_1=x_2=x_3=\alpha\in R$ este lăsat pe seama cititorului.
3) În acest caz $a=3$, $b=4$, $c=2$ și avem $2\cdot27=9(12-6)$. Din $3\alpha=-a$ rezultă $x_1=\alpha=-1$. Apoi găsim $x_2=-1+i$, $x_3=-1-i$.

2.19. Fie polinomul

$$P(x)=\begin{vmatrix} 2x & -2x & 1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ -2x-\lambda & x+\lambda & x-2 \end{vmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1) Să se afle λ încît polinomul $P(x)$ să admită o rădăcină dublă întreagă.

2) Dacă $Q(x)=P(x)+2x^2$ și x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $Q(x)=0$, să se calculeze:

$$E(\lambda)=\frac{Q(x_2+x_3)}{x_1}+\frac{Q(x_3+x_1)}{x_2}+\frac{Q(x_1+x_2)}{x_3}$$

(Universitatea Iași, 1977)

Soluție.

$$1)\ P(x)=\begin{vmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 1-x^2 & 1 & -1 \\ -2x-\lambda & -x & x-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 1-x^2 & 1 & 0 \\ -2x-\lambda & -x & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 1-x^2 & 1 & 0 \\ 2x-\lambda & -x & 0 \end{vmatrix}=$$

$=x^2-3x+\lambda$.

$x=m\in Z$ este rădăcină dublă a polinomului, dacă $P(m)=0$, $P'(m)=0$, $P''(m)\neq 0$. Deoarece $P'(x)=0$ are rădăcinile $x=\pm 1$ și P'' nu se anulează în ± 1, rezultă că numai -1 sau $+1$ pot fi rădăcini duble ale ecuației $P(x)=0$. Din $P(1)=0$ rezultă $\lambda=2$, iar $P(-1)=0$ implică $\lambda=-2$.

2) $Q(x)=x^3+2x^2-3x+\lambda$; observăm că $x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_3x_1+x_2x_3=-3$, $x_1x_2x_3=-\lambda$ și

$$Q(x_2+x_3)=Q(x_2)+Q(x_3)-\lambda+3x_2^2x_3+3x_2x_3^2+2x_2x_3=2\lambda-4x_2x_3.$$

Procedînd analog se obține

$$E(\lambda)=2\lambda\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)-4\,\frac{(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{x_1x_2x_3}=$$

$$=\frac{36-10\lambda}{\lambda},\ \text{pentru}\ \lambda\neq 0.$$

2.20. Se dă polinomul $P(x)=m(x-a)^3+n(x-b)^3+p(x-c)^3$ cu a, b, c constante date, reale și diferite, iar m, n, p trei parametri cu valori reale.

Să se arate că:

1) Dacă polinomul $P(x)$ este identic cu o constantă, atunci el este identic nul.

2) Dacă m, n, p au valori strict pozitive, polinomul $P(x)$ admite o singură rădăcină reală.

3) Dacă $P(a)=P(b)=0$, atunci și $P(c)=0$.

(I. P. București, 1974)

Soluție. 1) Dacă $P(x)=d$, $\forall x$, atunci $P'(0)=0$, $P''(0)=0$ și $P'''(0)=0$ Astfel m, n și p satisfac în mod necesar sistemul omogen:

$$\begin{cases} ma^2+nb^3+pc^2=0 \\ ma+nb+pc=0 \\ m+n+p=0. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem este diferit de zero, fiind un determinant Vandermonde cu $a\neq b\neq c$. De aceea sistemul admite numai soluția banală $m=n=p=0$ și deci $0\equiv P(x)\equiv d$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Sistemul anterior se poate obține și prin identificarea directă din $P(x)=d$.

2) Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} P(x)=+\infty$ și $P'(x)=3m(x-a)^2+3n(x-b)^2+3p(x-c)^2>0$, $\forall x\in R$. Deoarece funcția continuă $y=P(x)$ este strict crescătoare, graficul său taie o singură dată axa Ox.

3) Relațiile $P(a)=n(a-b)^3+p(a-c)^3$, $P(b)=m(b-a)^3+p(b-c)^3$, $P(c)=m(c-a)^3+n(c-b)^3$ implică $mP(a)+nP(b)+pP(c)=0$ și astfel afirmația devine evidentă.

2.21. Se dă ecuația:

$$f(x)\equiv\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 5 & 3\\ 4 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0.$$

1) Să se rezolve.

2) Să se discute după parametrul λ numărul rădăcinilor reale, cît și intervalele în care se găsesc, ale ecuației

$$\frac{1}{8}f(x)=\lambda(x^2-1).$$

3) Să se determine valorile lui λ pentru care

$$-2<\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}<1,$$

x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației de la punctul 2).

(I. P. București, 1974)

Soluție. 1) Dezvoltînd determinantul după ultima linie rezultă

$$f(x)=-4\begin{vmatrix} x^2 & x & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x^3 & x & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 5 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^3-4x^2 & x & 1\\ -7 & -1 & 1\\ -5 & 5 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=-8(x^3-4x^2-2x+5)=0.$$

Această ecuație admite rădăcina întreagă $x_1=1$. Ținînd cont de identitatea $x^3-4x^2-2x+5=(x-1)(x^2-3x-5)$ găsim și rădăcinile $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$.

2) Ecuația $-(x^3-4x^2-2x+5)=\lambda(x^2-1)$ este echivalentă cu $(x-1)[x^2+(\lambda-3)x+\lambda-5]=0$. De aceea studiul se reduce la $x^2+(\lambda-3)x+\lambda-5=0$. Deoarece $\Delta=(\lambda-3)^2-4\lambda+20=(\lambda-5)^2+4>0$, ecuația de gradul doi admite rădăcinile reale

$$x_2=\frac{3-\lambda+\sqrt{(\lambda-5)^2+4}}{2},\quad x_3=\frac{3-\lambda-\sqrt{(\lambda-5)^2+4}}{2},$$

Ţinînd seama că $\lambda-5\leqslant|\lambda-5|<\sqrt{(\lambda-5)^2+4}$, $\forall\lambda\in R$, şi $5-\lambda\leqslant|\lambda-5|<\sqrt{(\lambda-5)^2+4}$, $\forall\lambda\in R$, deducem $x_2\in(-1,+\infty)$ şi $x_3\in(-\infty,-1)$. În concluzie, $\forall\lambda$, ecuaţia dată admite trei rădăcini reale.

3) Deoarece $x_1=1$, $x_2+x_3=3-\lambda$, $x_2x_3=\lambda-5$ relaţia dată are sens numai pentru $\lambda\neq5$ şi este echivalentă cu $-2<\frac{4-\lambda}{\lambda-5}<1$, adică $\lambda\in\left(-\infty,\frac{9}{2}\right)\cup(6,+\infty)$.

2.22. Fie $P(x)=x^3-2x+\lambda$, unde λ este un parametru real. Se cere

1) Să se separe rădăcinile reale ale ecuaţiei $P(x)=0$.

2) Să se determine λ şi să se rezolve ecuaţia astfel ca

$$x_1+x_2=2.$$

Apoi să se calculeze expresia $E=x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

(I. P. Timişoara, 1972)

Soluţie. 1) Deoarece $P'(x)=3x^2-2$ are rădăcinile $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ rezultă tabelul lui Rolle

x:	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$+\infty$
$f(x)$:	$-\infty$	$\frac{4\sqrt{6}}{9}+\lambda$	$-\frac{4\sqrt{6}}{9}+\lambda$	$+\infty$

Dacă $\lambda<-\frac{4\sqrt{6}}{9}$, atunci $x_1\in\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\infty\right)$, iar x_2 şi x_3 sînt complexe; dacă $\lambda=-\frac{4\sqrt{6}}{9}$, atunci $x_1=x_2=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_3\in\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\infty\right)$; dacă $\frac{-4\sqrt{6}}{9}<\lambda<\frac{4\sqrt{6}}{9}$, atunci $x_1\in\left(-\infty,\frac{-\sqrt{6}}{3}\right)$, $x_2\in(-\sqrt{6}/3,\sqrt{6}/3)$, $x_3\in\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\infty\right)$; dacă $\lambda=\frac{4\sqrt{6}}{9}$, atunci $x_1=x_2=\frac{\sqrt{6}}{3}$ şi $x_3\in\left(-\infty,\frac{-\sqrt{6}}{3}\right)$; dacă $\lambda>\frac{4\sqrt{6}}{9}$, atunc $x_1\in\left(-\infty,\frac{-\sqrt{6}}{3}\right)$, iar x_2 şi x_3 sînt complexe.

2) Relaţiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-2$, $x_1x_2x_3=-\lambda$ împreună cu $x_1+x_2=2$ dau $x_3=-2$, $x_1x_2=2$ şi deci $\lambda=+4$. Apoi găsim $x_1=1+i$, $x_2=1-i$.

Evident $E=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(1+i)^2+(1-i)^2+(-2)^2=4$.

2.23. Să se determine parametrii reali m şi n astfel încît polinomul $P(x)=x^3-3mx+n$ să aibă o rădăcină dublă, iar $\int_0^2 P(x)dx=2$.

(I. P. Bucureşti, 1977)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. I. Condiția ultimă devine $\left(\frac{x^4}{4}-3m\frac{x^2}{2}+nx\right)\Big|_0^2=2$, sau $n=3m-1$. Deci $P(x)=x^3-3mx+3m-1$ și $P(x)=0$ are rădăcinile $x_1=1$, $x_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3(4m-1)}$; se descompune $P(x)=(x-1)(x^2+x+1-3m)$.

Dacă rădăcina dublă este $x=1$, atunci ea este rădăcină a factorului de gradul doi și rezultă $m=1$, iar $n=2$. Dacă factorul de gradul doi are rădăcina dublă, rezultă $m=\frac{1}{4}$, iar $n=-\frac{1}{4}$.

II. Impunînd condițiile ca x_0 să fie rădăcină dublă $P(x_0)=0$, $P'(x_0)=0$. $P''(x_0)\neq 0$, rezultă $x_0^3-3mx_0+n=0$, $3x_0^2-3m=0$, sau $4m^3=n^2$.

Sistemul $4m^3-n^2=0$, $n=3m-1$ admite soluțiile $(m, n)=(1, 2)$, $(m, n)=\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

2.24. Se dă polinomul $P(x)=x^3+ax^2+x+b$.

1) Să se arate că ecuația $P(x)=0$ nu admite concomitent rădăcinile 1 și -1 pentru nici o valoare a lui a și b.

2) Să se determine a și b astfel ca restul împărțirii lui $P(x)$ cu $Q(x)=x^2+x+1$ să fie identic nul.

3) Cu valoarea lui a determinată la punctul 2), se consideră ecuația $P(x)=0$ și se cere să se determine b astfel că să aibă loc următoarea relație între rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\geqslant 5.$$

(Facultatea de fizică, Timișoara, 1973)

Soluție. 1) Condițiile ca $x=\pm 1$ să fie rădăcini ale ecuației $P(-1)=0$, $P(+1)=0$, conduc la sistemul incompatibil în a, b: $a+b-2=0$, $a+b+2=0$

2) Menționăm o variantă de rezolvare. Deoarece rădăcinile ecuației $Q(x)=0$ sînt rădăcini cubice ale unității, $x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, condiția $P\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ sau $a\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+b+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=0$ conduce la soluția $a=1$, $b=0$; în acest caz $P(x)=x^3+x^2+x$.

3) Deoarece $P(x)=x^3+x^2+x+b$, condiția $\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}\geqslant 5$ devine $-\frac{1}{b}\geqslant 5$ și deci soluția este $b\in\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right]$.

2.25. Se dă un polinom $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ avînd coeficienții a, b, c, d (în această ordine) în progresie geometrică cu rația $q>0$.

1) Să se arate că ecuația $P(x)=0$ are o singură rădăcină reală și că toate rădăcinile acestei ecuații au același modul.

2) Notînd cu x_1, x_2 și x_3 rădăcinile ecuației $P(x)=0$ să se arate că, oricare ar fi numărul natural n, suma $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$ este reală. În ce caz $S_n>0$?

Scanned with OKEN Scanner

3) Pentru $a=1$, să se determine raţia q astfel ca ecuaţia $P(x)+P(1/x)=16$ să admită rădăcina $x=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ şi apoi să se rezolve această ecuaţie.

(I. P. Bucureşti, 1970)

Soluţie. 1) Deoarece $b=aq$, $c=aq^2$, $d=aq^3$ ecuaţia se poate scrie astfel $(x+q)(x^2+q^2)=0$. Rezultă rădăcinile

$$x_1=-q,\ x_{2,3}=\pm iq.\ \text{Deci}\ |x_1|=|x_2|=|x_3|=q.$$

2) Avem $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n=[(-1)^n+i^n+(-i)^n]q^n=\left[(-1)^n+2\cos\frac{n\pi}{2}\right]q^n=$

$$=\begin{cases} -q^n, & n\in\{4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3\},\\ 3q^n, & n=4k,\ k\in N.\end{cases}$$

De aceea $S_n>0\Leftrightarrow n=4k,\ k\in N$.

3) Deoarece $P(x)=x^3+qx^2+q^2x+q^3$ ecuaţia dată se scrie $x^3+\frac{1}{x^3}+q\left(x^2+\right.$ $\left.+\frac{1}{x^2}\right)+q^2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2q^3=16$. Prin substituţia $x+\frac{1}{x}=y$, obţinem ecuaţia

$$y^3+qy^2+(q^2-3)y+2q^3-2q-16=0.$$

Aceasta trebuie să admită rădăcina $y_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{1+i\sqrt{3}}=1$. Se obţine $2q^3+q^2-q-18=0$ cu singura rădăcină reală $q=2$. Revenind la ecuaţia în y mai găsim şi soluţiile $y_2=\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}$, $y_3=\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$. Apoi, din $x+$ $+\frac{1}{x}=y_{1,2,3}$ deducem $x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-3-i\sqrt{7}\pm\sqrt{-14+6i\sqrt{7}}}{4}$,

$x_{5,6}=\frac{-3+i\sqrt{7}\pm\sqrt{-14-6i\sqrt{7}}}{4}$.

2.26. Să se determine parametrii reali a, b, c, d ştiind că $f(x)=x^4+ax^3+$ bx^2+cx+d se divide exact cu derivata sa şi că $f(x)=0$ admite o rădăcină egală cu 1. Să se determine apoi celelalte rădăcini ale ecuaţiei $f(x)=0$.

(I. P. Bucureşti, 1977)

Soluţie. I. Din ipoteze şi deoarece $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ rezultă $4x^4+4ax^3+4bx^2+4cx+4d\equiv(x-\alpha)(4x^3+3ax^2+2bx+c)$. Identificînd, se obţine: $a=-4\alpha$, $b=6\alpha^2$, $c=-4\alpha^3$, $d=\alpha^4$ şi f devine $f(x)=(x-\alpha)^4$. Cum $f(1)=0$, rezultă $\alpha=1$ şi $f(x)=(x-1)^4$.

II. Fie x_j, $j\in\{1,\ 2,\ 3\}$, rădăcinile ecuaţiei $f'(x)=0$. Deoarece gradul lui $f(x)$ este 4, x_j nu pot fi distincte; pentru f' singura expresie posibilă este $f'(x)=$ $=4(x-x_0)^3$. Integrînd, rezultă $f(x)=(x-x_0)^4+C$; condiţia $f(1)=0$ implică $f(x)=(x-x_0)^4-(1-x_0)^4$, iar divizibilitatea lui $f(x)$ prin $f'(x)$ conduce la $x_0=1$.

Scanned with OKEN Scanner

2.27. Se dă polinomul cu coeficienţi reali:

$$P(x)=x^4+ax^3+bx+c.$$

1) Să se arate că nu există valori ale coeficienţilor a, b, c, astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $Q(x)=x^3-x$.

2) În cazul cînd $P(0)=P(1)$, să se determine coeficienţii a, b, c, astfel ca $P(x)$ să admită rădăcina $x_1=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. În acest caz să se determine şi celelalte rădăcini ale polinomului $P(x)$.

3) În cazul cînd $a=-2$, să se determine coeficienţii b şi c astfel ca $P(x)$ să admită o rădăcină triplă diferită de zero.

4) Pentru $a=-2$, $b=2$, $c=-1$, să se determine valorile lui $x\in R$, astfel ca: $e^{P(x)}\leqslant 1$.

(I. P. Bucureşti, 1975)

Soluţie. 1) Dacă $c\neq 0$, atunci $P(x)$ nu poate fi divizibil cu x, $\forall a$, b. Dacă $c=0$, atunci $P(x)=x^4+ax^3+bx$ nu poate fi divizibil cu x^2-1 deoarece sistemul

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ a+b-1=0 \end{cases}$$

este incompatibil. Rezultă că nu există valori ale coeficienţilor a, b, c, astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $Q(x)$.

2) Relaţia $P(0)=P(1)$ este echivalentă cu $a+b+1=0$.

Deoarece a, b, c sînt numere reale, polinomul $P(x)$ admite şi rădăcina $x_2=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$. De aceea $P(x)$ se divide cu $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-x+1$, adică restul din identitatea

$$P(x)=(x^2-x+1)[x^2+(a+1)x+a]+(b-1)x+c-a$$

este identic nul. Găsim $b=1$, $c=a=-2$.

Rezolvînd ecuaţia $x^2-x-2=0$, obţinem şi celelalte rădăcini $x_3=-1$, $x_4=2$.

3) Avem $P'(x)=4x^3-6x^2+b$, $P''(x)=12x(x-1)$. De aceea rădăcina triplă posibilă este $x=1$. Din $P'(1)=0$, $P(1)=0$ găsim sistemul $b=2$, $b+c=1$. care are soluţia $b=2$, $c=-1$.

4) În condiţiile specificate putem scrie

$$P(x)=(x-1)^2(x^2-1).$$

Astfel avem

$$e^{P(x)}\leqslant e^0\Leftrightarrow P(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x^2-1\leqslant 0\Leftrightarrow x\in[-1,\ 1].$$

2.28. Se consideră polinomul

$$P(x)=x^4+mx^3+m\sqrt{2}x^2+nx+1,\quad m,\ n\in R.$$

1) Să se determine m şi n astfel ca $P(x)$ să fie divizibil prin x^2-x+1

2) În condițiile de la punctul 1) să se rezolve ecuația $P(x)=0$ și să se arate că patrulaterul ale cărui vîrfuri sînt afixele rădăcinilor, este un trapez isoscel.

(Universitatea Iași, 1977)

Soluție. 1) Impunînd ca restul împărțirii lui $P(x)$ prin x^2-x+1 să fie zero, $P(x)$ se descompune în factori: $P(x)\equiv(x^2+ax+b)(x^2-x+1)$. (Variantă de soluție convenabilă pentru punctul 2). Din identificarea coeficienților rezultă sistemul $m=a-1$, $m\sqrt{2}=1-a+b$, $n=a-b$, $b=1$ și deci $m=n=\sqrt{2}-1$; se obține și $b=1$, $a=\sqrt{2}$.

2) $P(x)\equiv(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x+1)$ are rădăcinile $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$, $x_3=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$, $x_4=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$, care sînt două cîte două complexe conjugate. Rezultă că afixele lor sînt simetrice față de axa reală; fiind rădăcini distincte, înseamnă că afixele determină un trapez cu bazele paralele la axa imaginară.

2.29. Se consideră ecuația $x^4-(2a+1)x^3+(a^2+2a-3)x^2-(a^2-4a-1)x-2a^2+2=0$, unde a este un parametru real.

1) Să se rezolve ecuația știind că admite și rădăcini independente de a.

2) Să se determine valorile lui a pentru care

$$x_1x_2x_3x_4\leqslant x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\leqslant x_1+x_2+x_3+x_4.$$

3) Cu ajutorul teoremei lui Rolle, să se separe rădăcinile reale ale ecuației în a

$$x_1x_2x_3x_4(x_1+x_2+x_3+x_5)+12\ln a=0,$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației de mai sus.

(I. P. București, 1971)

Soluție. 1) Deoarece termenul liber este $-2(a-1)(a+1)$ încercăm pe ±1, ±2. Se găsesc $x_1=-1$, $x_2=2$. Apoi, împărțind membrul stîng la $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$, găsim ecuația $x^2-2ax+a^2-1=0$ cu rădăcinile $x_3=a-1$, $x_4=a+1$.

2) Deoarece $x_1+x_2+x_3+x_4=2a+1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=a^2+2a-3$, $x_1x_2x_3x_4=2-2a^2$, dubla inegalitate se transcrie $2-2a^2\leqslant a^2+2a-3\leqslant2a+1$.

Relația $a^2+2a-3\leqslant2a+1$ implică $a^2-4\leqslant0$, adică $a\in[-2, 2]$. Inegalitatea $2-2a^2\leqslant a^2+2a-3$ este echivalentă cu $3a^2+2a-5\geqslant0$, adică $a\in(-\infty, -5/3]\cup[1, \infty)$. Valorile lui a care satisfac simultan cele două inegalități se obțin prin intersecție

$$((-\infty, -5/3]\cup[1, \infty))\cap[-2, 2]=[-2, -5/3]\cup[1, 2].$$

3) Ecuația în a este $f(a)=(2-2a^2)(2a+1)+12\ln a=0$, $a>0$.

Deoarece $f'(a)=-12a^2-4a+4+\frac{12}{a}=0$, are o singură rădăcină reală $a_1=1$

Scanned with OKEN Scanner

și $\lim\limits_{a\searrow 0} f(a)=-\infty$, $\lim\limits_{a\to\infty} f(a)=-\lim\limits_{a\to\infty} a^3\left(4+\frac{2}{a}-\frac{4}{a^2}-\frac{2}{a^3}-12\frac{\ln a}{a^3}\right)=-\infty$, găsim următorul tabel

a	0	1	∞
$f(a)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Astfel ecuația în a are o singură rădăcină reală, dublă, $a=1$.

2.30. Fie $P(x)$ un polinom de gradul al patrulea cu coeficienți reali, avînd toate rădăcinile distincte și situate în planul complex pe o paralelă la axa imaginară. Să se arate că rădăcinile derivatei $P'(x)$ se găsesc pe aceeași paralelă la axa imaginară.

(I. P. București, 1977)

Soluție. Fie $x=a$ ecuația dreptei; deoarece $P(x)$ are rădăcini distincte, ele sînt complexe conjugate de forma $x_{1,2}=a\pm ib_1$, $x_{3,4}=a\pm ib_2$, $b_1\neq b_2$. Se obține $P(x)=(x-a)^4+(b_1^2+b_2^2)(x-a)^2+b_1^2b_2^2=0$, iar $P'(x)=4(x-a)^3+2(b_1^2+b_2^2)(x-a)$ și rădăcinile ecuației $P'(x)=0$ sînt

$$x_1'=a,\ x_{2,3}'=a\pm i\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2}{2}}.$$

Toate rădăcinile derivatei au partea reală egală cu a, deci imaginile lor aparțin dreptei de ecuație $x=a$.

2.31. Se dă ecuația

$$2x^5+x^4\sin 4a-x^3\sin 3a+x^2\sin 2a-x\sin a+2=0.$$

1) Să se afle valorile parametrului a pentru care această ecuație admite rădăcina $x=-1$.

2) Folosind teorema lui Rolle să se determine numărul rădăcinilor ecuației date în cazul particular $a=\frac{\pi}{2}$.

3) Să se arate că $\forall a\in R$ ecuația dată nu admite pe $x=-1$, ca rădăcină dublă.

(I. P. București, 1970)

Soluție. 1) Înlocuind pe $x=-1$ găsim $(\sin 4a+\sin a)+(\sin 3a+\sin 2a)=0$ sau $2\sin\frac{5a}{2}\cos\frac{3a}{2}+2\sin\frac{5a}{2}\cos\frac{a}{2}=0$. Aceasta se transformă în $4\sin\frac{5a}{2}\cos a\cos\frac{a}{2}=0$ și deci $a_1=\frac{2k\pi}{5}$, $a_2=\frac{\pi}{2}+m\pi$, $a_3=2\left(\frac{\pi}{2}+p\pi\right)$, $k,\ m,\ p\in Z$.

2) Pentru $a=\frac{\pi}{2}$ obținem ecuația $f(x)=2x^5+x^3-x+2=0$. Deoarece

$f'(x)=10x^4+3x^2-1$ ecuația $f'(x)=0$ are soluțiile reale $x_1=\frac{-1}{\sqrt{5}}$, $x_2=$ $=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Acestea ne dau $f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{18}{25\sqrt{5}}+2>0$ și $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{18}{25\sqrt{5}}+$ $+2>0$. Evident $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty=f(\pm\infty)$.

Șirul lui Rolle

$$\begin{array}{cccc} f(-\infty) & f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) & f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) & f(+\infty) \\ - & + & + & + \end{array}$$

ne arată că ecuația are o singură soluție $x\in\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Utilizînd divizorii termenului liber se găsește că această soluție este $x=-1$.

3) Notăm membrul stîng al ecuației date cu $g(x)$ și impunem condițiile $g(-1)=0$, $g'(-1)=0$. Deoarece $g'(x)=10x^4+4x^3\sin 4a-3x^2\cdot\sin 3a+2x\sin a-$ $-\sin a$, ecuația $g'(-1)=0$ se transcrie în forma $10-4\sin 4a-3\sin 3a-$ $-2\sin 2a-\sin a=0$. Ținînd seama că sinusurile sînt cuprinse între -1 și $+1$, ultima ecuație poate avea soluții numai dacă $\sin 4a=\sin 3a=\sin 2a=\sin a=1$. Nu există însă nici o valoare a lui a care să satisfacă simultan aceste egalități.

2.32. 1) Să se determine parametrii reali a, b astfel încît rădăcinile ecuației $P(x, a, b)\equiv x^4+x^3+x^2+ax+b=0$ să formeze o progresie aritmetică și în acest caz să se rezolve ecuația $P(x, a, b)=0$.

2) Fie dat polinomul $P_4(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$.

Să se calculeze suma

$S_4=\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}+\frac{1}{x_3-2}+\frac{1}{x_4-2}$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației $P_4(x)=0$.

3) *Generalizare*: dacă $P_n(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$, să se calculeze $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-2}$, unde x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, sînt rădăcinile ecuației $P_n(x)=0$ și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$.

(Universitatea Cluj-Napoca, 1974)

Soluție. Se consideră că relația specifică elementelor în progresie s-a extins la mulțimea numerelor complexe. Fie $x_1=u-3r$, $x_2=u-r$, $x_3=u+r$, $x_4=u+3r$ și relațiile $\Sigma x_i=-1$, $\Sigma x_1x_2=1$; rezultă $4u=-1$ și $6u^2-10r^2=1$, adică $u=-\frac{1}{4}$, $r=\pm\frac{i}{4}$. Se obține $x_{1,4}=-\frac{1}{4}\pm\frac{3i}{4}$, $x_{2,3}=-\frac{1}{4}\pm\frac{i}{4}$. Din relațiile $(x_1+x_4)x_2x_3+(x_2+x_3)x_1x_4=-a$, $x_1x_2x_3x_4=b$, sau $a=-2u(2u^2-10r^2)$, $b=$ $=(u^2-r^2)(u^2-9r^2)$, rezultă $b=\frac{5}{2^6}$, $a=\frac{3}{8}$.

2) Dacă $P_4(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, atunci

$$P_4'(x)=\Sigma(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \text{ și } \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x-x_i}=\frac{P_4'(x)}{P_4(x)}.$$

În concluzie, $-S_4=\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}+\frac{1}{2-x_4}=\frac{P_4'(2)}{P_4(2)}$

$$P_4(2)=31,\ P_4'(x)=4x^3+3x^2+2x+1,\ P_4'(2)=49, \text{ iar } S_4=-\frac{49}{31}.$$

3) În general, $-S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}=\frac{P_n'(x)}{P_n(x)}$ și deci $S_n(2)=-\frac{P_n'(2)}{P_n(2)}$.
Deoarece $P_n(x)(x-1)=x^{n+1}-1$, rezultă $P_n(2)=2^{n+1}-1$; din $P_n'(x)(x-1)+P_n(x)=(n+1)x^n$ se obține $P_n'(2)=(n+1)2^n-2^{n+1}+1=(n-1)2^n+1$ și deci

$$S_n(2)=\frac{(n-1)2^n+1}{2^{n+1}-1}. \text{ Se calculează limita:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(2)}{n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{n-1+\frac{1}{2^n}}{n\left(2-\frac{1}{2^n}\right)}=-\frac{1}{2}$$

2.33. Se consideră polinomul $P(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$ $(n>3)$. Să se găsească restul împărțirii acestui polinom prin $x(x-1)^2$.

(I. P. București, 1973)

Soluție. Identitatea împărțirii este

$$1+x+\ldots+x^n=x(x-1)^2\cdot I(x)+ax^2+bx+c.$$

De aici trebuie să găsim pe a, b, c.

Înlocuind pe x cu 0 și apoi cu 1 găsim respectiv $c=1$, $a+b+c=n+1$.

Derivînd ambii membri ai identității în raport cu x obținem tot o identitate. Apoi, înlocuind pe $x=1$ găsim $2a+b=\frac{(1+n)n}{2}$. Din aceste relații rezultă $a=\frac{n(n-1)}{2}$, $b=-\frac{n(n-3)}{2}$.

Observație. Se poate utiliza și expresia

$$P(x)=\begin{cases}\frac{x^{n+1}-1}{x-1}, & x\neq 1\\ n+1, & x=1.\end{cases}$$

2.34. Să se arate că pentru orice număr natural n polinomul $P(x)=(x+1)^{6n+1}-x^{6n+1}-1$ este divizibil prin $Q(x)=(x^2+x+1)^2$.

(I. P. București, 1973)

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. Observăm că ecuaţia $Q(x)=0$ admite drept rădăcini duble, două dintre rădăcinile cubice ale unităţii

$$x_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\qquad x_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Acestea satisfac relaţiile $x_1+x_2+1=0$, $x_1^3=1$, $x_2^3=1$.

Polinomul $P(x)$ este divizibil cu $Q(x)$ dacă şi numai dacă ecuaţia $P(x)=0$ admite rădăcinile duble x_1 şi x_2. Avem

$$P(x_1)=(x_1+1)^{6n+1}-x_1^{6n+1}-1=(-x_2)^{6n+1}-x_1^{6n+1}-1=(-(x_2)^3)^{2n}(-x_2)-$$

$$-((x_1)^3)^{2n}x_1-1=-x_2-x_1-1=0,\quad P'(x_1)=(6n+1)((x_1+1)^{6n}-x_1^{6n})=$$

$$=(6n+1)((-x_2)^{6n}-x_1^{6n})=0.\ \text{Analog}\ P(x_2)=0,\ P'(x_2)=0.$$

2.35. Se dă polinomul cu coeficienţi întregi $P(x)=x^3+5x-1$.

1) Să se reprezinte grafic funcţia $x\to P(x)$.

2) Să se determine rădăcina reală a polinomului $P(x)$, cu cel puţin două zecimale exacte.

3) Să se decidă dacă polinomul $P(x)$ are sau nu rădăcini numere raţionale.

4) Să se evalueze timpul care v-ar fi necesar pentru indicarea tuturor zecimalelor rădăcinii reale a polinomului $P(x)$.

(Facultatea de matematică, Bucureşti, 1975)

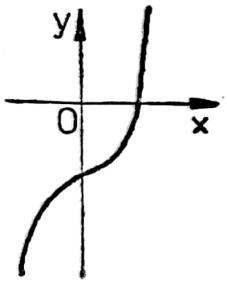


Fig. 14.

Soluţie. 1) Deoarece $P'(x)=3x^2+5>0$ funcţia P este strict crescătoare. Apoi $P''(x)=6x$ arată că P este concavă pe $(-\infty, 0)$ şi convexă pe $(0, \infty)$. Punctul $(0, -1)$ este un punct de inflexiune. Graficul este dat în fig. 14.

2) Din cele precedente rezultă că $P(x)$ are o singură rădăcină reală. Observăm că $P\left(\frac{1}{6}\right)=-\frac{35}{216}<0$ şi $P\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{125}>0$. De aceea rădăcina reală a lui $P(x)$ se află pe intervalul $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right)$. Aplicînd o dată metoda coardei deducem $0{,}19<x_1<0{,}2$, adică $x_1\simeq 0{,}19$.

3) În general, ecuaţia $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ nu admite soluţii raţionale $x=\frac{p}{q}$ (ireductibile) dacă p nu divide pe a_n. În cazul nostru, singurele rădăcini raţionale ar putea fi ± 1. Se constată că $P(-1)=-7$, $P(1)=5$. Deci $P(x)$ nu admite rădăcini raţionale.

4) Fiind iraţională, rădăcina reală a lui $P(x)$ are o infinitate de zecimale, fără perioadă. Deci timpul cerut este infinit.

2.36. Ţinîndu-se cont de graficele funcţiilor $x\to f(x)=\frac{x}{x-1}$, $x\to g(x)=-x^2+5x-5$ să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\frac{x}{x-1}+x^2-5x+5=0$.

(Universitatea Bucureşti. 1974)

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. (fig. 15). Tabelul de variaţie pentru f este

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$	1

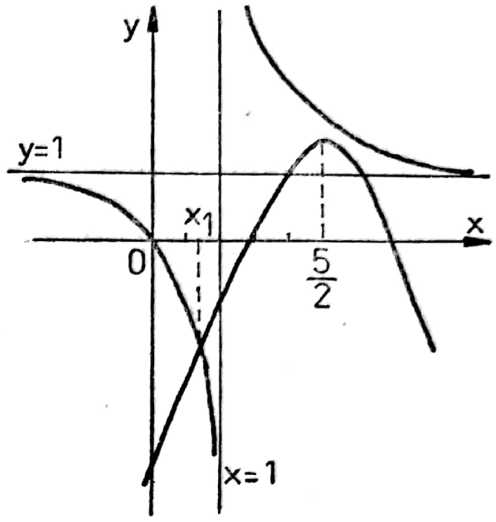


Fig. 15.

$y=g(x)$ este o parabolă care taie axa Ox în $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$, axa Oy în $(0, -5)$ şi are vîrful în $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Sînt trasate graficele şi rezultă că ecuaţia dată admite o singură soluţie reală $x_0\in(0, 1)$; observăm că

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{3}>g\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{4}.$$

2.37. Se consideră polinomul $p(x)$ de grad oarecare cu coeficienţi întregi care pentru patru valori x întregi şi diferite este egal cu un număr prim q; se cer valorile x întregi astfel încît $p(x)=2q$.

(Facultatea de matematică-mecanică, Bucureşti, 1970)

Soluţie. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 numerele întregi pentru care $p(x_i)=q$, $i=1, 2, 3, 4$. Rezultă că avem identitatea

$$p(x)-q=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)r(x),$$

unde $r(x)$ este un polinom cu coeficienţi întregi.

Fie $x=a$ un întreg pentru care $p(a)=2q$; rezultă

$$q=p(a)-q=(a-x_1)(a-x_2)(a-x_3)(a-x_4)r(a).$$

Aceasta este o imposibilitate, deoarece un număr prim q nu poate fi descompus în cinci factori întregi diferiţi. Cu alte cuvinte nu există nici un întreg a cu proprietatea $p(a)=2q$.

2.38. Fiind date matricele pătratice

$$A=\begin{bmatrix}1 & x\\ y & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & z\\ t & 1\end{bmatrix}\quad (x, y, z, t\in R),$$ se cere:

1) Să se calculeze pătratul sumei matriceale $A+B$.

2) Să se rezolve sistemul în x, y, z, t rezultat din egalitatea matriceală

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix},$$

unde $A \cdot B$ este produsul matriceal al celor două matrice date.

(I. P. Timişoara, 1977)

Soluţie. Se efectuează calculul:

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & x+z \\ y+t & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4+(x+z)(y+t) & 4(x+z) \\ 4(y+t) & 4+(y+t)(x+z) \end{bmatrix},$$

2) Ecuaţia matriceală

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & z \\ t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$ echivalează cu sistemul scalar $$\begin{cases} xt+2=0 \\ x+z-3=0 \\ y+t+3=0 \\ yz+2=0, \end{cases}$$

care admite soluţiile

$$(x, y, z, t)=(2, -2, 1, -1),\ (x, y, z, t)=(1, -1, 2, -2).$$

2.39. Se dau matricele

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ şi } X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ u & v \end{bmatrix}.$$

1) Să se determine u şi v astfel încît $AX=XA$.
2) Să se calculeze A^n, $n \in N$.

(I. P. Bucureşti, 1976)

Soluţie. 1) Deoarece

$$AX = \begin{bmatrix} 3+3u & 5+3v \\ u & v \end{bmatrix},\ XA = \begin{bmatrix} 3 & 14 \\ u & 3u+v \end{bmatrix},$$

ecuaţia matriceală $AX=XA$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 3+3u=3 \\ 5+3v=14 \\ v=3u+v \end{cases}$$

şi deci $u=0$, $v=3$.

2) Prin calcul direct obţinem

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & 3\cdot n\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Din această ipoteză găsim

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 3n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3(n+1)\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Astfel egalitatea

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & 3\cdot n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$ (inducției).

2.40. Fie $\mathcal{M}$ mulțimea matricelor de forma $A=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a+b\\ b & c\end{bmatrix}$, unde a, b, c sînt numere raționale.

1) Să se demonstreze că mulțimea $\mathcal{M}$ constituie un grup față de operația de adunare a matricelor.

2) Fie $A_i=\begin{bmatrix}a_i & 0\\ 0 & a_i+b_i\\ b_i & c_i\end{bmatrix}$, $i=1, 2, 3$, trei matrice din $\mathcal{M}$ pentru care $\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}\neq 0$. Să se arate că: (a) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\in Q$ și $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3=0$ implică $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$; (b) orice matrice A din $\mathcal{M}$ se exprimă unic sub forma $A=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3$, unde $\alpha_i\in Q$.

(Facultatea de matematică, București, 1975)

Soluție. 1) Se verifică axiomele grupului.

2) Relația matriceală $\sum_{i=1}^{3}\lambda_iA_i=O$ este echivalentă cu sistemul liniar, omogen,

$$\begin{cases}\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3=0\\ \lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\lambda_3b_3=0\\ \lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\lambda_3c_3=0.\end{cases}$$

Deoarece determinantul acestui sistem este nenul, rezultă $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Relația matriceală $A=\sum_{i=1}^{3}\alpha_iA_i$ este echivalentă cu sistemul liniar, neomogen,

$$\begin{cases}\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3=a\\ \alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\alpha_3b_3=b\\ \alpha_1c_1+\alpha_2c_2+\alpha_3c_3=c.\end{cases}$$

Prin ipoteză determinantul acestui sistem este (raţional) diferit de zero. De aceea sistemul admite soluţia unică

$$\alpha_i = \frac{\Delta\alpha_i}{\Delta}, \quad i=1, 3, 2,$$

unde Δ şi Δ_{α_i} sînt numere raţionale.

2.41. Se consideră mulţimea M a următoarelor şase matrice

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

1) Să se arate că această mulţime formează un grup faţă de înmulţirea matricelor.

2) Să se arate că acest grup este izomorf cu grupul tuturor permutărilor mulţimii $\{1, 2, 3\}$.

(*Facultatea de matematică-mecanică, Bucureşti*, 1972)

Soluţie. 1) Fie A, B, C, D, E, F matricele date în ordinea în care sînt scrise. Tabelul

	A	B	C	D	E	F
A	F	D	E	B	C	A
B	E	F	D	C	A	B
C	D	E	F	A	B	C
D	C	A	B	E	F	D
E	B	C	A	F	D	E
F	A	B	C	D	E	F

ne arată că $\{A, B, C, D, E, F\}$ formează un grup în raport cu înmulţirea.

2) Mulţimea permutărilor lui $\{1, 2, 3\}$ are şase elemente

$$\mathcal{P}_1:\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \mathcal{P}_2:\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \mathcal{P}_3:\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \mathcal{P}_4:\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_5:\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \mathcal{P}_6:\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Corespondenţa

$$\mathcal{P}_1 \leftrightarrow F, \ \mathcal{P}_2 \leftrightarrow E, \ \mathcal{P}_3 \leftrightarrow D, \ \mathcal{P}_4 \leftrightarrow A, \ \mathcal{P}_5 \leftrightarrow B, \ \mathcal{P}_6 \leftrightarrow C$$

este biunivocă şi evident $\mathcal{P}_i \leftrightarrow X_i$, $\mathcal{P}_j \leftrightarrow X_j$ implică

$$P_i \circ P_j \leftrightarrow X_i X_j.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.42. Fie $(R, +)$ grupul aditiv al numerelor reale și $(M_3, \cdot)$ grupul multiplicativ al matricelor pătratice nesingulare de ordin 3.

1) Să se cerceteze dacă aplicația $U:(R, +)\to(M_3, \cdot)$ definită prin

$$U(t)=\begin{bmatrix}1 & t & 2t+2t^2\\ 0 & 1 & 4t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

este un izomorfism al lui $(R, +)$ în $(M_3, \cdot)$.

2) Pentru $n\geqslant 3$ și $t\in R$, arbitrar, are loc egalitatea

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k U^k(t)=0.$$

3) Să se determine $N=\begin{bmatrix}0 & x & y\\ 0 & 0 & z\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ astfel încît $U(t)=I+\frac{t}{1!}N+\frac{t^2}{2!}N^2$, $\forall t\in R$, unde I este matricea unitate.

(Facultatea de matematică-informatică, Brașov, 1972)

Soluție. 1) Se observă că, $\forall t_1, t_2\in R$,

$$U(t_1+t_2)=\begin{bmatrix}1 & t_1+t_2 & 2(t_1+t_2)+2(t_1+t_2)^2\\ 0 & 1 & 4(t_1+t_2)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t_1 & 2t_1+2t_1^2\\ 0 & 1 & 4t_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t_2 & 2t_2+2t_2^2\\ 0 & 1 & 4t_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=U(t_1)\cdot U(t_2).$$

De aceea U este un omomorfism.

În plus, pentru orice $t_1\neq t_2$ găsim $U(t_1)\neq U(t_2)$, adică funcția f este injectivă. Totuși f nu este izomorfism întrucît nu este surjectivă. Într-adevăr există matrice în M_3 care nu sînt imagini ale lui $t\in R$ prin U.

2) Notăm cu I matricea unitate. Identitatea $(U(t)-I)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k U^k(t)$ reduce problema la $(U(t)-I)^n=0$, $n\geqslant 3$, $\forall t\in R$. Dar

$$V(t)=U(t)-I=\begin{bmatrix}0 & t & 2t+2t^2\\ 0 & 0 & 4t\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

și prin calcul direct găsim $V^3=O$.

3) Identificînd după puterile lui t găsim $x=1$, $y=2$, $z=4$.

2.43. Se dă matricea

$$U=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

1) Să se calculeze puterile succesive $U, U^2, \ldots, U^n, \ldots$ ale acestei matrice.

2) Să se decidă dacă această matrice este inversabilă sau nu.

3) Să se arate că mulțimea matricelor U, U^2, U^3, U^4, U^5 formează un grup față de operația de înmulțire a matricelor și că acest grup este izomorf cu grupul constituit de mulțimea de numere complexe $\left\{1, \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}, \cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}, \cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right\}$ față de operația de înmulțire a numerelor complexe.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1972)

Soluție. 1) Prin calcul direct se obține

$$U^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad U^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad U^4=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$U^5=I$ (matricea unitate). De aceea $U^{5k}=I$, $U^{5k+1}=U$, $U^{5k+2}=U^2$, $U^{5k+3}=U^3$, $U^{5k+4}=U^4$, $k\in N$.

2) Din $U^5=I$ și din $\det U^5=(\det U)^5$, $\det I=1$, rezultă $\det U\neq 0$ și deci U este inversabilă.

3) Fiind vorba de mulțimi finite, este suficient să alcătuim tabele.

2.44. Fie M mulțimea numerelor complexe de forma $a+ib$, unde a și b sînt numere întregi. Se consideră în M operația obișnuită de adunare, notată cu $+$ și o operație notată cu $*$ și definită astfel: $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2\rightarrow z_1*z_2=a_1a_2+ib_1b_2$.

1) Să se arate că $(M, +, *)$ este un inel comutativ cu unitate și cu divizori ai lui zero.

2) Să se arate că aplicația $f: M\rightarrow M$, care pentru $z=a+ib$ atașază elementul $f(z)=b+ia$, este un izomorfism.

(Facultatea de matematică mecanică, Timișoara, 1972)

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. 1) Se ştie că adunarea determină pe mulţimea numerelor complexe o structură de grup abelian.

Să cercetăm proprietăţile operaţiei $*$. Dacă $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$, atunci $z_1*z_2=a_1a_2+ib_1b_2=$(comutativitate în R), $a_2a_1+ib_2b_1=z_2*z_1$; considerînd şi pe $z_3=a_3+ib_3$ găsim $z_1*(z_2*z_3)=z_1*(a_2a_3+ib_2b_3)=a_1(a_2a_3)+$ $+ib_1(b_2b_3)=$(asociativitate în R), $(a_1a_2)a_3+i(b_1b_2)b_3=(z_1*z_2)*z_3$; elementul unitate este $z=1+i1$.

Mai mult, observăm că operaţia $*$ este distributivă faţă de adunare, adică $z_1*(z_2+z_3)=z_1*z_2+z_1*z_3$. De aceea $(M, +, *)$ este un inel comutativ cu element unitate.

Un element $z_1\in M$ se numeşte divizor al lui zero dacă există $z_2\in M-\{0\}$ astfel încît $z_1*z_2=0$. Evident $z_1=1+i0$ şi $z_2=0+i\cdot 1$ conduc la $z_1*z_2=0$.

2) Aplicaţia f este un izomorfism deoarece ea este bijectivă şi $f(z_1+z_2)=$ $=b_1+b_2+i(a_1+a_2)=f(z_1)+f(z_2)$, $f(z_1*z_2)=b_1b_2+ia_1a_2=f(z_1)*f(z_2)$.

2.32. Se consideră sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 3x_1+8x_2+8x_3=3 \\ 8x_1+8x_2+3x_3=0 \\ 8x_1+3x_2+8x_3=5. \end{cases}$$

Să se găsească soluţiile sistemului în corpul claselor de resturi modulo 13

(Facultatea de matematică-mecanică, Bucureşti, 1971)

Soluţie. Deoarece $Z_{13}=\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \hat{11}, \hat{12}\}$ renotăm necunoscutele x_1 x_2, x_3 cu $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$. Apoi observăm că $3\hat{x}_1=\widehat{3x_1}=\widehat{3}\hat{x}_1$, $8\hat{x}_1=\widehat{8x_1}=\widehat{8}\hat{x}_1$. Cu acestea sistemul se transcrie în forma

$$\begin{cases} \widehat{3}\hat{x}_1+\widehat{8}\hat{x}_2+\widehat{8}\hat{x}_3=\hat{3} \\ \widehat{8}\hat{x}_1+\widehat{8}\hat{x}_2+\widehat{3}\hat{x}_3=\hat{0} \\ \widehat{8}\hat{x}_1+\widehat{3}\hat{x}_2+\widehat{8}\hat{x}_3=\hat{5}. \end{cases}$$

Adunînd găsim $\hat{19}(\hat{x}_1+\hat{x}_2+\hat{x}_3)=\hat{8}$ sau $\hat{6}(\hat{x}_1+\hat{x}_2+\hat{x}_3)=\hat{8}$. Pe de altă parte observăm că $\hat{11}\cdot\hat{6}=\hat{66}=\hat{1}$. De aceea $\hat{x}_1+\hat{x}_2+\hat{x}_3=\hat{11}\cdot\hat{8}=\hat{10}$. Introducînd pe $\hat{x}_2+\hat{x}_3=\hat{10}-\hat{x}_1$ în prima ecuaţie obţinem $\hat{5}\hat{x}_1=\hat{12}$, adică $\hat{x}_1=\hat{8}\cdot\hat{12}=\hat{96}=\hat{5}$. Analog găsim $\hat{x}_2=\hat{2}$, $\hat{x}_3=\hat{3}$.

2.45. Să se găsească toate polinoamele de forma x^3+ax+2 cu coeficienţi în Z_3 (corpul claselor de resturi mod. 3) care nu se descompun în produsul a două polinoame cu coeficienţi în Z_3, de grad mai mic decît 3.

(Facultatea de matematică-mecanică, Bucureşti, 1971)

Soluţie. Deoarece $Z_3=\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$, polinomul dat se transcrie $\hat{1}x^3+\hat{a}x+\hat{2}$. Să găsim acum toate polinoamele de această formă care se pot scrie ca produsul dintre un polinom de gradul doi şi unul de gradul întîi.

Scanned with OKEN Scanner

Din $\hat{1}x^3+\hat{a}x+\hat{2}\equiv(\hat{1}x^2+\hat{b}x+\hat{1})\cdot(\hat{1}x+\hat{2})$, prin identificare, deducem $\hat{b}+\hat{2}=\hat{0}$, $\hat{2}\hat{b}+\hat{1}=\hat{a}$ și deci $\hat{b}=-\hat{2}=\hat{1}$, $\hat{a}=\hat{0}$; analog, din $\hat{1}x^3+\hat{a}x+\hat{2}\equiv(\hat{1}x^2+\hat{c}x+\hat{2})\cdot(\hat{1}x+\hat{1})$ găsim $\hat{c}=-\hat{1}=\hat{2}$ și $\hat{a}=\hat{1}$.

Rămîne că singurul polinom de forma dată care nu se poate descompune în produsul a două polinoame de grad mai mic decît 3, este $\hat{1}x^3+\hat{2}x+\hat{2}$

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

2.46. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ un șir de numere pozitive în progresie geometrică crescătoare și p un număr natural. Se cere:

1) Să se arate că raportul sumelor

$$S_n=\frac{1}{a_2^p+a_1^p}+\frac{1}{a_3^p+a_2^p}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}^p+a_n^p},$$

$$S_n'=\frac{1}{a_2^p-a_1^p}+\frac{1}{a_3^p-a_2^p}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}^p-a_n^p}$$

nu depinde de n. Să se calculeze $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\frac{S_n}{S_n'}\right)^p$.

2) Să se determine rația progresiei date astfel ca

$$\frac{a_n}{a_{n-2}+a_{n+2}}=\frac{4}{17}.$$

3) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

(*I. P. București*, 1972)

Soluție. O progresie cu termeni pozitivi este crescătoare dacă și numai dacă rația sa este supraunitară.

1) Dacă q este rația progresiei, atunci evident

$$S_n=\frac{1}{q^p+1}\left(\frac{1}{a_1^p}+\frac{1}{a_2^p}+\cdots+\frac{1}{a_n^p}\right),\quad S_n'=\frac{1}{q^p-1}\left(\frac{1}{a_1^p}+\frac{1}{a_1^p}+\cdots+\frac{1}{a_n^p}\right),$$

Astfel $\frac{S_n}{S_n'}=\frac{q^p-1}{q^p+1}$, $\forall n$. Mai mult, $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\frac{S_n}{S_n'}\right)^p=\lim\limits_{p\to\infty}\left(1-\frac{2}{q^p+1}\right)^p=$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{q^p+1}\right)^{-\frac{q^p+1}{2}}\right]^{\frac{-2p}{q^p+1}}=e^0=1,$$ deoarece $q>1$ implică $\lim\limits_{p\to\infty}\frac{p}{q^p+1}=0$.

2) Avem $a_n=a_{n-2}q^2$, $a_{n+2}=a_{n-2}q^4$ și egalitatea dată se reduce la ecuația $4q^4-17q^2+4=0$. Aceasta are o singură rădăcină supraunitară, $q=2$.

3) Evident

$$S_n=\frac{1}{q^p+1}\,\frac{1}{a_1^p}\left(1+\frac{1}{q^p}+\frac{1}{q^{2p}}+\ldots+\frac{1}{q^{(n-1)p}}\right)=\frac{1}{a_1^p(q^p+1)}\,\frac{1-\frac{1}{q^{np}}}{1-\frac{1}{q^p}};$$

De aceea $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{q^p}{a_1^p}\,\frac{1}{q^{2p}-1}$;

2.47. Se consideră șirul cu termenul general

$$a_n=\frac{(n+3)^2+3}{n(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

și se cere:

1) Să se arate că termenul general al șirului se poate scrie $a_n=f(n)-f(n+1)$, unde $f(n)$ are forma $f(n)=\frac{nA+B}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}$, A și B fiind constante; să se determine aceste constante.

2) Să se arate că șirul cu termenul general $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ este convergent, determinîndu-i-se limita.

3) Să se calculeze limita șirului cu termenul general $c_n=b_n^{n2^n}$.

(I. P. București, 1970)

Soluție. 1) Impunem condiția

$$\frac{n^2+6n+12}{n(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{An+B}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}-\frac{A(n+1)+B}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}},\quad\forall n,$$

$$n^2+6n+12=2(An+B)(n+2)-n[A(n+1)+B],\quad\forall n\in N.$$

Prin identificare găsim $A=1$, $B=3$.

2) Mai întîi observăm că $b_n=[f(1)-f(2)]+[f(2)-f(3)]+\ldots+[f(n)-f(n+1)]=f(1)-f(n+1)=1-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$. De aceea $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$, adică șirul $\{b_n\}$ este convergent.

3) Succesiv găsim $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{n2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+4}{(n+)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{n2^n}=$

$$=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+4)}{(n+1))n+2)}\,\frac{2^n}{2^{n+1}}}=e^{-1/2}.$$

2.48. Se consideră șirul cu termenul general

$$a_n=\ln(1+n)+a\ln(2+n)+b\ln(3+n),\quad a,\ b\in R.$$

Scanned with OKEN Scanner

1) Să se determine relația dintre numerele a și b astfel încît șirul $\{a_n\}$ să aibă limita zero.

2) Presupunînd că $a+b+1=0$, să se determine a și b astfel încît șirul cu termenul general $b_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ să fie convergent și să i se afle limita.

(*I. P. București*, 1972)

Soluție. 1) Termenul general se poate transcrie astfel

$$a_n=\ln(1+n)(2+n)^a(3+n)^b=\ln n^{a+b+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^a\left(1+\frac{3}{n}\right)^b=$$

$$=(a+b+1)\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^a\left(1+\frac{3}{n}\right)^b. \text{ De aceea } \lim_{n\to\infty} a_n=0\Leftrightarrow a+b+1=0.$$

2) Explicit avem $b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=(\ln 2+a\ln 3+b\ln 4)+(\ln 3+a\ln 4+b\ln 5)+\ldots+(\ln(1+n)+a\ln(2+n)+b\ln(3+n))=$ (ținem seama că $a+b+1=0$), $\ln 2+(a+1)\ln 3+(a+b)\ln(2+n)+b\ln(3+n)=\ln 2+(a+1)\ln 3+(a+2b)\ln n+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{a+b}\left(1+\frac{3}{n}\right)^b$.

Astfel $\{b_n\}$ este convergent numai dacă $a+2b=0$.

Sistemul $a+b+1=0$, $a+2b=0$ implică $a=-2$, $b=1$. În acest caz $b_n=\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{1+3/n}{1+2/n}$ și $\lim_{n\to\infty} b_n=\ln\frac{2}{3}$.

2.48/a. Fie $U_n=\sum_{i=1}^{n} i$ și $V_m=\sum_{n=1}^{m} U_n$; să se calculeze

$$\lim_{m\to\infty}\frac{V_m}{m^k},\quad k=1, 2, 3, \ldots$$

(*Facultatea de matematică-mecanică. București*, 1970)

Soluție. Ținînd seama că $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, găsim $U_n=\frac{n(n+1)}{2}$ și apoi $V_m=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}(n^2+n)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{m} n^2+\sum_{n=1}^{m} n\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{m(m+1)}{2}\right]$. De aceea

$$\lim_{m\to\infty}\frac{V_m}{m^k}=\begin{cases}\infty & k=1, 2\\ 1/6 & k=3\\ 0 & k=4, 5, \ldots\end{cases}$$

Observație. Egalitățile $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ se probează ușor prin inducție.

Scanned with OKEN Scanner

2.49. Se dă ecuaţia

$$(E) \qquad 2(2a+1)\cos^2 x+3\cos x+(1-a)=0,$$

unde a este un parametru real.

1) Să se rezolve ecuaţia.

2) Să se determine a astfel încît ecuaţia să admită soluţii în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

3) Fie (a_n): $n\in N$, cu $a_n\geqslant 1$, un şir de numere reale, crescător, divergent. Înlocuind în ecuaţia (E) pe a cu fiecare a_n, să se arate că există un şir descrescător de rădăcini (x_n), $n\in N$ (x_n este o rădăcină a ecuaţiei (E), în care a se înlocuieşte cu a_n) şi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(I. P. Bucureşti, 1970)

Soluţie. 1) Pentru $a=-\frac{1}{2}$ avem o ecuaţie de gradul unu în $\cos x$ şi anume $\cos x=-\frac{1}{2}$. Rezultă $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$.

Pentru $a\neq-\frac{1}{2}$ avem o ecuaţie de gradul doi în $\cos x$ cu soluţiile $\cos x=-\frac{1}{2}$, $\cos x=\frac{a-1}{2a+1}$. Din prima găsim $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2m\pi$, $m\in Z$. A doua implică $x=\pm\arccos\frac{a-1}{2a+1}+2l\pi$, $l\in Z$, numai dacă $-1\leqslant\frac{a-1}{2a+1}\leqslant 1$. Inegalitatea $\frac{a-1}{2a+1}\leqslant 1$ implică $a\in(-\infty, -2]\cup(-1/2, \infty)$, iar inegalitatea $-1\leqslant\frac{a-1}{2a+1}$ implică $a\in(-\infty, -1/2)\cup[0, \infty)$. Astfel, existenţa soluţiilor impune $a\in(-\infty, -2]\cup[0, \infty)$.

2) Aceste soluţii nu pot să provină decît din $\cos x=\frac{a-1}{2a+1}$. Apartenenţa $x\in[0, \pi/4]$ implică $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{a-1}{2a+1}\leqslant 1$. Deoarece $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{a-1}{2a+1}$ impune $a\in\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{2})}, -1/2\right]$, deducem $a\in\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{2})}, -2\right]$ (vezi şi soluţia de la punctul precedent).

3) Ipotezele implică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ şi $\cos x_n=\frac{a_n-1}{2a_n+1}$. Pe de altă parte şirul cu termenul general $u_n=\frac{a_n-1}{2a_n+1}$ este crescător şi mărginit. Într-adevăr $u_{n+1}-u_n=\frac{a_{n+1}-1}{2a_{n+1}+1}-\frac{a_n-1}{2a_n+1}=\frac{3(a_{n+1}-a_n)}{(2a_{n+1}+1)(2a_n+1)}\geqslant 0$ şi $\cos\frac{\pi}{2}=0\leqslant\frac{a_n-1}{2a_n+1}\leqslant\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, $\forall n\in N$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece cosinusul crește de la 0 la 1/2, rezultă că există un șir $\left(x_n = \arccos\frac{a_n-1}{2a_n+1}\right)$, care descrește de la $\frac{\pi}{2}$ la $\pi/3$, cu limita $\frac{\pi}{3}$.

2.50. Fie $f: R\to R$ definită prin $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n$. Să se calculeze suma $S_n(x)=1+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, pentru $x\in(0,1)$, folosind derivatele funcției f.

(I. P. București, 1973)

Soluție. Observăm că

$$f(x)=1+x+\ldots+x^n=\begin{cases}\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}, & x\neq 1\\ n+1, & x=1\end{cases}$$

și deci

$$f'(x)=1+2x+\ldots+nx^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{nx^n(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}; & x\neq 1\\ \dfrac{(1+n)n}{2}; & x=1,\end{cases}$$

$$f''(x)=2\cdot 1+3\cdot 2x+\ldots+n(n-1)x^{n-2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n^2+n)x^{n-1}(x-1)^2-2nx^n(x-1)+2(x^n-1)}{(x-1)^3}; & x\neq 1\\ \dfrac{n(n^2-1)}{3}; & x=1.\end{cases}$$

Pe de altă parte $xf'(x)=x+2x^2+\ldots+nx^n$ și prin derivare găsim

$$S_n(x)=1^2+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}=f'(x)+xf''(x)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n^2+2n)x^n(x-1)^2-2nx^{n+1}(x-1)+(x^n-1)(x+1)}{(x-1)^3}, & x\neq 1\\ \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, & x=1.\end{cases}$$

Pentru $x\in(0,1)$ găsim $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=\dfrac{-(x+1)}{(x-1)^3}$.

2.51. Se notează cu $\operatorname{sgn} x$ funcția

$$x\to\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0.\end{cases}$$

Să se arate că funcția $x \to f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn} x$ este inversabilă și că inversa ei este o funcție continuă.

(I. P. București, 1973)

Soluție. Mai întîi observăm că funcția $f: E \to R$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases} -(1+x^2), & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1+x^2, & x>0, \end{cases}$$

nu este continuă și deci nici derivabilă în $x=0$.

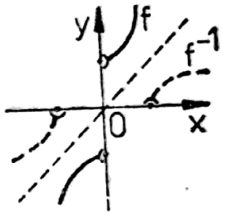


Fig. 16.

Pentru $x \neq 0$ avem

$$f'(x)=\begin{cases} -2x, & x<0 \\ 2x, & x>0. \end{cases}$$

Deoarece $f'(x)>0$, $x \neq 0$ și $f(0)=0$, rezultă că f este strict crescătoare și deci injectivă. Imaginea lui E prin f este $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$; fig. 16. Funcția f este surjectivă deoarece $\forall y \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$ ecuația $f(x)=y$ admite o rădăcină reală. De aceea f este inversabilă (bijectivă) și ținînd cont că inversa unei funcții crescătoare trebuie să fie tot crescătoare găsim

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x-1}, & x<-1 \\ 0, & x=0 \\ \sqrt{x-1}, & x>1. \end{cases}$$

Funcția $f^{-1}(x)$ este continuă în $x=0$, deoarece acest punct al domeniului de definiție este izolat. Restricțiile lui f^{-1} la $x<-1$, $x>1$ sînt funcții continue (funcții elementare). De aceea f^{-1} este continuă.

2.52. Fie funcție $f: R \to R$ definită astfel:

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{2x} & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ \sin 2x + B\cos 3x & \text{pentru } x>0. \end{cases}$$

Să se determine constantele reale A și B astfel încît f să fie: a) continuă pe R; b) derivabilă pe R.

(I. P. București, 1976)

Soluție. a) Evident, restricția lui f la $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ este continuă. Punem condiția ca f să fie continuă și în punctul zero:

$$f(0)=\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x). \text{ Găsim } A=B.$$

b) Restricția lui f la $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ este derivabilă. Punem condiția ca f să fie derivabilă și în punctul $x=0$, adică impunem ca limitele $f'_{st}(0)=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{Ae^{2x}-A}{x-0}$, $f'_{dr}(0)=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\sin 2x + B\cos 3x - A}{x-0}$ să existe, să fie finite și egale. Rezultă $A=B$, $2A=2$ ceea ce implică $A=B=1$.

2.53. Să se găsească domeniul maxim de definiție D al funcției reale $x \to f(x) = \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$. Există puncte în D în care funcția f nu este derivabilă? (justificare).

(I. P. București, 1976)

Soluție. Domeniul maxim de definiție este determinat de $x-1 \geqslant 0$, $x+8-6\sqrt{x-1} \geqslant 0$. Deoarece prima relație o implică pe a doua, găsim $D = [1, \infty)$.

Observăm că expresia $f(x)$ poate fi scrisă în forma

$$f(x) = \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = |\sqrt{x-1}-3| = \begin{cases} 3-\sqrt{x-1}, & 1 \leqslant x \leqslant 10 \\ \sqrt{x-1}-3, & x > 10. \end{cases}$$

De aceea restricția lui f la $(1, 10) \cup (10, +\infty)$ este evident derivabilă; Pe de altă parte

$$f'_{dr}(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{-\sqrt{x-1}}{x-1} = -\infty;$$

$$f'_{st}(10) = \lim_{\substack{x \to 10 \\ x < 10}} \frac{f(x)-f(10)}{x-10} = \lim_{\substack{x \to 10 \\ x < 10}} \frac{3-\sqrt{x-1}}{x-10} = -1/6,$$

$$f'_{dr}(10) = \lim_{\substack{x \to 10 \\ x > 10}} \frac{f(x)-f(10)}{x-10} = \lim_{\substack{x \to 10 \\ x > 10}} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10} = 1/6.$$

Astfel f nu este derivabilă la dreapta în punctul $x=1$ și nu este derivabilă în punctul $x=10$.

Notă. Pentru rezolvarea părții a doua a problemei se poate folosi observația generală că dacă $x \to u(x)$ este o funcție reală cu valori în $[0, \infty)$, derivabilă în x_0 și $u(x_0) > 0$, atunci funcția $x \to \sqrt{u(x)}$ este derivabilă în x_0. Astfel, punctele în care funcția $x \to \sqrt{u(x)}$ s-ar putea să nu fie derivabilă se află printre soluțiile ecuației $u(x) = 0$.

2.54. Se consideră ecuațiile $f(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ și $g(x) \equiv x^3 + (a+\lambda)x^2 + (b+\lambda)x + c + \lambda = 0$, unde a, b, c și λ sînt numere reale.

1) Să se exprime coeficienții b, c în funcție de a astfel ca cele două ecuații să aibă două rădăcini comune.

2) Înlocuind pe b și c cu valorile găsite la punctul precedent, să se determine a știind că suma pătratelor rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ este 15.

3) Considerînd un interval oarecare $[x_1, x_2]$ dat, să se determine $x_0 \in (x_1, x_2)$ care satisface formula lui Lagrange pentru polinomul $f(x)$. Să se justifice de ce știm apriori că ecuația care dă pe x_0 are rădăcinile reale.

(I. P. București, 1972)

Soluție. 1) Fie u rădăcina comună, adică $u^3 + au^2 + bu + c = 0$ și $u^3 + au^2 + bu + c + \lambda(u^2 + u + 1) = 0$. Acestea implică $u^2 + u + 1 = 0$, adică $u_{1,2} =$

$= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Deoarece $u_{1,2}^3 = 1$ și $u_{1,2}^2 = -u_{1,2} - 1$, introducînd pe u_1 sau pe u_2 în prima ecuație deducem $b = a$, $c = a - 1$.

2) Ecuația $f(x) = 0$ ia forma $(x^2 + x + 1)(x - 1 + a) = 0$. De aceea soluțiile sale sînt $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = 1 - a$ și condiția $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$ implică $(a-1)^2 = 16$, adică $a_1 = 5$ sau $a_2 = -3$.

3) Relația lui Lagrange, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0)$, arată că numărul real x_0 trebuie să fie o soluție a ecuației $3x_0^2 + 2ax_0 - [x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + a(x_2 + x_1)] = 0$, a cărei explicitare este evidentă. Deoarece această ecuație de gradul doi are coeficienți reali, rezultă că și a doua rădăcină trebuie să fie tot reală.

2.55. Să se determine constanta reală a astfel încît funcția f definită prin $f(x) = x + \frac{ax}{x^2 - 1}$ să verifice condiția $f'(0) = 0$, apoi să se traseze graficul acestei funcții pe domeniul ei maxim de definiție.

(I. P. București, 1976)

Soluție. Domeniul de definiție al funcției date este $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Avem $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{ax}{x^2 - 1}}{x} = 1 - a$ și din $f'(0) = 0$ găsim $a = 1$. Astfel $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Deoarece $f(-x) = -f(x)$ pentru orice x din domeniul de definiție, f este impară. De aceea graficul ei va fi simetric în raport cu originea axelor de coordonate. Prin calcul direct obținem $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$, $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 0$.

Rezultă că dreptele $x = -1$, $x = 1$ și $y = x$ sînt asimptote ale graficului lui f.

Derivata întîi are expresia $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$, iar ecuația $f'(x) = 0$ are rădăcinile: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$. Pentru $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ avem $f'(x) > 0$, iar pentru $x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$ avem $f'(x) < 0$. De aceea $x = -\sqrt{3}$ este abscisa punctului de maxim și $x = \sqrt{3}$ este abscisa punctului de minim.

Urmărind tabelul de variație găsim graficul din fig. 17

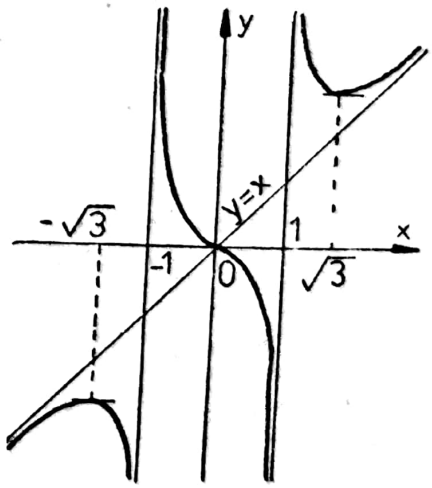


Fig. 17.

2.56. Se dau funcţiile

$$x \to f(x) = \frac{a_1 x+1}{x^2-9},\ x \to g(x) = \frac{a_2 x+1}{x^2-9},\ a_1 \neq a_2.$$

1) Să se arate că graficele celor două funcţii au un singur punct comun, independent de a_1, a_2.

2) Să se arate că graficele celor două funcţii nu sînt tangente.

3) Să se determine a_1 astfel încît dreapta de ecuaţie $4x-2y-1=0$ să fie paralelă cu tangenta la graficul lui f în punctul de abscisă $x=1$.

(Institutul de petrol şi gaze, Ploieşti, 1975)

Soluţie. Se impune $x \neq \pm 3$. 1) Problema revine la a verifica că sistemul

$$y = \frac{a_1 x+1}{x^2-9},\ y = \frac{a_2 x+1}{x^2-9}$$

are o singură soluţie, independentă de a_1, a_2. Într-adevăr, eliminînd pe $(x^2-9)y$ deducem $a_1x+1=a_2x+1$, iar această ecuaţie are soluţia unică $x=0$. Rezultă că $D\left(0, \frac{1}{9}\right)$ este singurul punct comun, independent de a_1, a_2.

2) Trebuie să arătăm că sistemul $f(x)=g(x)$, $f'(x)=g'(x)$ nu admite soluţii. Într-adevăr acest sistem devine

$$a_1x+1=a_2x+1,\ 3a_1x^2+2x-9a_1=3a_2x^2+2x-9a_2.$$

Din prima ecuaţie găsim $x=0$, dar această valoare nu verifică a doua ecuaţie. Altfel: se verifică relaţia $f'(0) \neq g'(0)$.

3) Tangenta la graficul lui f în punctul de abscisă $x=1$ trebuie să aibă panta $m=2$; de aceea $f'(1)=2$. Dar $f'(x)=\frac{3a_1x^2+2x-9a_1}{(x^2-9)^2}$ şi deci $\frac{2-6a_1}{64}=2$, adică $a_1=-21$.

2.57. Se consideră şirul

$S_n(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$, $x \in R-\{-1, 1\}$ şi fie $f(x)$ limita şirului $S_n(x)$.

1) Să se arate că

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{pentru } |x|<1, \\ \frac{1}{1-x} & \text{pentru } |x|>1. \end{cases}$$

2) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiilor f şi $g=|f|$ şi să se traseze graficele lor.

(Universitatea Iaşi, 1977)

Soluţie. 1) Deoarece $x^{2n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ pentru $|x|<1$, rezultă că $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{x}{1-x}$; pentru $|x|>1$, $x^{2n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ şi deci $\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}} \underset{n\to\infty}{\to} -1$, iar $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{x}{1-x}+1 = \frac{1}{1-x}$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Funcția f: $R-\{-1, 1\}\to R$ este derivabilă și deci continuă. Într-adevăr, pentru $x\neq\pm1$ găsim $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$ etc.

Acestea ne conduc la următorul tabel de variație:

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\nearrow$	0	$\nearrow+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0
$f''(x)$		$+$		$+$		$-$			

Graficul lui f este dat în fig. 18. Funcția $g=|f|$ are graficul funcției f pe mulțimea unde $f>0$; pe mulțimea unde $f<0$, graficul funcției g este simetricul graficului funcției f în raport cu Ox.

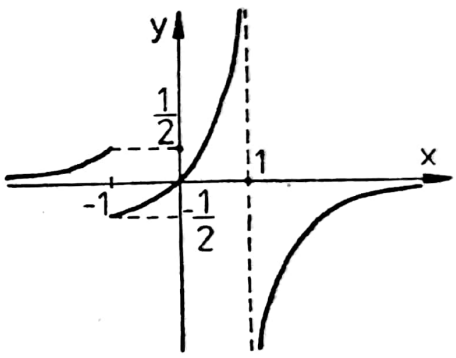


Fig. 18.

2.58. Fie funcția $x\to f(x)=mx(x-a)(x-b)$; m, a, b sînt parametri reali.

1) Să se determine a și b astfel încît funcția dată să admită puncte de extrem pentru $x=\frac{4}{3}$ și $x=6$.

2) Să se determine m astfel ca valoarea extremă din punctul $x=6$ să fie 6.

3) Să se determine punctele de inflexiune ale funcției avînd parametrii determinați mai sus.

(I. P. Timișoara, 1974)

Soluție. 1) Deoarece $f'(x)=m(3x^2-2(a+b)x+ab)$, rezultă ecuațiile $f'\left(\frac{4}{3}\right)=0$, $f'(6)=0$, sau $16-8(a+b)+3ab=0$, $108-12(a+b)+ab=0$, de unde rezultă $a+b=11$, $ab=24$.

Se obțin valorile $a=8$, $b=3$ sau $a=3$, $b=8$. (Se observă și simetria funcției în raport cu a, b). Rezultă

$$f(x)=mx(x-8)(x-3).$$

2) Condiția $f(6)=6$ determină $m=-1/6$ și deci

$$f(x)=-\frac{1}{6}x(x-8)(x-3).$$

3) Punctele de inflexiune sînt soluții ale ecuației $f''(x)=0$. Deci $-(6x-22)=0$, $x=\frac{11}{3}$. (Observăm că $f'''(x)=-1\neq0$).

2.59. Se consideră funcţia reală f definită pe intervalul $I=(0, \infty)$ prin $f(x)=e^{-x}\sin x$. Să se arate că oricare ar fi $x\in I$ avem $|f(x)|<1$, $|f'(x)|<\sqrt{2}$, $|f''(x)|<2$ şi să se verifice că abscisele punctelor de maxim ale lui f în intervalul I se află în progresie aritmetică, iar ordonatele corespunzătoare acestor puncte în progresie geometrică.

(I. P. Bucureşti, 1976)

Soluţie. Pentru orice x din $(0, \infty)$ avem $f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, $f''(x)=-2e^{-x}\cos x$ şi $0<e^{-x}<1$. Deoarece funcţiile sinus şi cosinus iau valori în $[-1, 1]$, găsim $|f(x)|=|e^{-x}\sin x|=e^{-x}|\sin x|<1$, $|f'(x)|=\left|\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|=\sqrt{2}e^{-x}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|<\sqrt{2}$, $|f''(x)|=|-2e^{-x}\cos x|=2e^{-x}|\cos x|<2$.

Punctele de extrem local ale lui $f(x)$ sînt printre soluţiile ecuaţiei $f'(x)=0$, $x\in(0, \infty)$, adică $x_m=\frac{\pi}{4}+m\pi$, unde m este un întreg pozitiv. Observăm că $f''(x_m)=-\sqrt{2}e^{-x_m}(-1)^m<0$ dacă şi numai dacă m este par. De aceea punctele $x_{2p}=\frac{\pi}{4}+2p\pi$, $p=$întreg pozitiv, sînt puncte de maxim. Ele formează o progresie aritmetică cu raţia 2π. Ordonatele corespunzătoare sînt $f(x_{2p})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}e^{-2p\pi}$ şi formează o progresie geometrică.

2.60. Fie funcţia definită prin

$$x\to f(x)=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-10x+17}},$$

1) Să se determine domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.
2) Să se calculeze derivata funcţiei f.
3) Să se arate că restricţia funcţiei f pe intervalul $(-\infty, +4)$ are o funcţie inversă şi să se determine această funcţie.

(Universitatea Cluj-Napoca, 1974)

Soluţie. 1) Domeniul maxim de definiţie al funcţiei f rezultă din condiţia $-1\leqslant\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-10x+17}}\leqslant+1$, sau $0\leqslant\frac{(x-1)^2}{2x^2-10x+17}\leqslant+1$.

Fracţia este nenegativă pentru $x\in R$; deoarece $-\frac{(x-4)^2}{2x^2-10x+17}\leqslant 0$ pentru $x\in R$, domeniul maxim de definiţie al funcţiei f este R.

2) $f'(x)=\frac{-3(x-4)}{|x-4|(2x^2-10x+17)}$ şi deci:

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2x^2-10x+17}, & x\in(4, \infty),\\ \frac{3}{2x^2-10x+17}, & x\in(-\infty, 4).\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Pentru $x\in(-\infty, 4)$, $f'(x)=\frac{3}{2x^2-10x+17}>0$, deci f este inversabilă. Inversa $x=\varphi(y)$ verifică relaţia $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-10x+17}}-y=0$; ea se obţine explicitînd $x=\frac{1-5\sin^2 y\pm 3/2\sin 2y}{1-2\sin^2 y}=\frac{5\cos 2y-3\pm 3\sin 2y}{2\cos 2y}=$

$=\frac{5(\cos^2 y-\sin^2 y)-3(\cos y\pm\sin y)^2}{2(\cos^2 y-\sin^2 y)}$. Rezultă două determinări corespunzătoare celor două restricţii ale lui f:

$$y\to\varphi(y)=\frac{5(\cos y-\sin y)-3(\cos y+\sin y)}{2(\cos y-\sin y)}=\frac{\cos y-4\sin y}{\cos y-\sin y},$$

$$y\to\varphi(y)=\frac{5(\cos y+\sin y)-3(\cos y-\sin y)}{2(\cos y+\sin y)}=\frac{\cos y+4\sin y}{\cos y+\sin y}.$$

Restricţia pentru care se cere inversa este aplicaţia $f\colon(-\infty, 4)\to\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci inversa trebuie să fie $\varphi\colon\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty, 4)$. Satisface această condiţie, determinarea $y\to\varphi(y)=\frac{\cos y+4\sin y}{\cos y+\sin y}$.

2.61. Să se arate că $\ln x\leqslant\frac{x}{e}$, oricare ar fi x strict pozitiv.

(I. P. Bucureşti, 1977)

Soluţie. I. Se studiază comportarea funcţiei f, unde $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}$; observăm că $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$ şi tabelul de variaţie al funcţiei f este

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

În concluzie, $f(x)\leqslant 0$ pentru orice $x>0$.

II. Funcţia $x\to h(x)=\ln x$ este concavă pe domeniul său de definiţie $(x>0)$ şi deci graficul se află sub tangentă, în oricare punct al curbei s-ar trasa tangenta. Ecuaţia tangentei în punctul $(x_0, h(x_0))$ este $y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)$ şi se satisface $\ln x\leqslant\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)$ pentru orice $x>0$. În particular, pentru punctul $(e, 1)$ rezultă

$$\ln x\leqslant\frac{x}{e},\text{ oricare ar fi } x>0.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.62. În intervalul $[-1, +1]$ se definește funcția

$$x \to f(x) = \left|\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-ax^2}\right|,$$

unde a este un parametru real, $0<a<1$; să se determine mulțimea valorilor a pentru care $f(x) \leqslant \varepsilon$, ε fiind un număr real cuprins între 0 și 1, oricare ar fi $x \in [-1, +1]$.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1970)

Soluție. Deoarece prin calcule directe se verifică inegalitatea $\sqrt{1-ax^2} \geqslant \sqrt{1-x^2}$, $(0<a<1)$, găsim $f(x) = \sqrt{1-ax^2} - \sqrt{1-x^2}$. Apoi avem $f'(x) = \frac{x(\sqrt{1-ax^2} - a\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{(1-x^2)(1-ax^2)}}$, $\forall x \in (-1, 1)$. Ținînd seama că $\sqrt{1-ax^2} > a\sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in (-1, 1)$, rezultă că $f'(x)$ are semnul lui x, iar $x=0$ este un punct de minim. Tabelul de variație

x	-1		0		$+1$
$f'(x)$	$\|$	$- - -$	0	$+ + +$	$\|$
$f(x)$	$\sqrt{1-a}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{1-a}$

și textul problemei ne conduc la inegalitatea $\sqrt{1-a} \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1)$, adică $a \in [1-\varepsilon^2, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1)$.

2.63. Se dă funcția $x \to f(x) = \frac{x^2(x+9)}{x+1}$.

1) Să se reprezinte grafic.

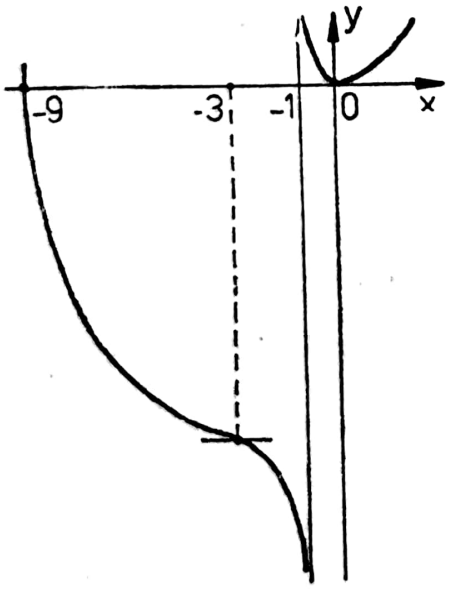


Fig. 19.

2) Să se calculeze limita $l = \lim\limits_{m \to 0} \frac{\int_0^m f(x)\,dx}{m^3}$.

(Institutul de construcții, București, 1972)

Soluție. 1) Se observă că f este definită pe $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Apoi $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = \infty$. De aceea $x=-1$ este asimptotă verticală. Nu are asimptote oblice.

Graficul taie axele de coordonate în punctele $x=0$, $y=0$ și $x=-9$, $y=0$.

Deoarece $f'(x) = \frac{2x(x+3)^2}{(x+1)^2}$, $f''(x) = \frac{2(x+1)(x+3)(x^2+3)}{(x+1)^4}$ avem următorul tabel de variație și graficul din fig. 19.

x	$-\infty$		-9		-3		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0	$-$	$-$	0	$+$		
$f''(x)$			$+$		0	$-$	$+$		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-27	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) *Metoda I.* Observăm că avem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Putem aplica regula lui l' Hospital. Ţinînd seama că $\frac{d}{dm}\int_0^m f(x)dx = f(m)$, găsim

$$l=\lim_{m\to 0}\frac{\int_0^m f(x)dx}{m^3}=\lim_{m\to 0}\frac{f(m)}{3m^2}=\lim_{m\to 0}\frac{m^2(m+9)}{3m^2(m+1)}=3.$$

Metoda II. Avem $I=\int_0^m f(x)dx=\int_0^m (x^2+8x-8)dx+8\int_0^m \frac{dx}{x+1}=\left(\frac{x^3}{3}+4x^2-\right.$

$\left.-8x+8\ln|x+1|\right)\Big|_0^m=\frac{m^3}{3}+4m^2-8m+8\ln|m+1|$.

Apoi $l=\lim_{m\to 0}\frac{\frac{m^3}{3}+4m^2-8m+8\ln|m+1|}{m^3}=$ (se aplică de trei ori, succesiv, regula lui l' Hospital), 3.

2.64. Se dă funcţia

$$x\to f(x)=\frac{2x^2+7x+5}{x+2}.$$

1) Să se determine intervalele de monotonie ale lui f.

2) Se consideră $g(x)=f(x)$ pentru $x\in E\cap(-\infty, -2)$, unde E este domeniul de definiţie al lui f.

(a) Să se arate că $g: E\cap(-\infty, -2)\to R$ este inversabilă.

(b) Să se determine funcţia inversă lui g.

3) Să se studieze mărginirea funcţiei h definită prin: $h(x)=h_1(x)\frac{\sin x}{x}$, unde h_1 este restricţia lui f la mulţimea $E\cap[0, \infty)$.

(Universitatea Timişoara, 1976)

Soluţie.

1) $f'(x)=\frac{2x^2+8x+9}{(x+2)^2}$; deci există f' pe $(-\infty,-2)\cup(-2, \infty)$ şi $f'(x)>0$ pe această mulţime. f este strict crescătoare pe $(-\infty, -2)$ şi pe $(-2, \infty)$; în $x=-2$, f nu este derivabilă.

Scanned with OKEN Scanner

2) (a) S-a arătat că f este strict crescătoare pe $(-\infty, -2)$ și există f' pe acest interval; deci sînt satisfăcute condițiile de inversabilitate (f — bijectivă).

(b) Din $2x^2+(7-y)x+5-2y=0$ rezultă două determinări $x=\frac{1}{4}(y-7\pm\sqrt{y^2+2y+9})$. Deoarece se cere inversa restricției f: $(-\infty, -2)\to(-\infty, +\infty)$, aceasta este $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}(x-7-\sqrt{x^2+2x+9})$; $f^{-1}:(-\infty, \infty)\to$ $\to(-\infty, -2)$.

3) Se consideră restricția lui f la $[0, 1)\cup[1, \infty)$ și se arată că f este mărginită pe fiecare din subintervalele considerate.

Pe $[0, 1)$, $h(x)=f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}<f(x)$, deoarece $\frac{\sin x}{x}<1$; dar f strict crescătoare pe $[0, 1)$ și deci $h(x)<f(1)=\frac{14}{3}$. Pe $[1, \infty)$ folosim majorarea $|h(x)|\leqslant\left|\frac{2x^2+7x+5}{x^2+2x}\right|$; fie $g(x)=\frac{2x^2+7x+5}{x^2+2x}$. Pentru $x\in[1, \infty)$, $g(x)>0$; deoarece $g'(x)<0$, g este descrescătoare și $g(x)<\frac{14}{3}$. În concluzie, h este funcție mărginită.

2.65. Se consideră funcția $x\to f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}-\frac{1}{|x+2|-3}$.

1) Să se determine domeniul de definiție al lui f și să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției pe domeniul de definiție.

2) Cu ajutorul șirului lui Rolle, să se separe rădăcinile ecuației $f(x)=0$.

3) Să se traseze graficul lui f.

(I. P. București, 1971)

Soluție. 1) Existența radicalului impune $x^2+4x-5\geqslant 0$, iar existența fracției impune $|x+2|-3\neq 0$. Prima relație este satisfăcută pentru $x\in(-\infty, -5]\cup[1, \infty)$, iar a doua implică $x\neq -5$, $x\neq 1$. Acestea conduc la domeniul de definiție $(-\infty, -5)\cup(1, +\infty)$.

Observăm că $f(x)$ se explicitează în forma

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4x-5}+\frac{1}{x+5}, & x<-5\\ \sqrt{x^2+4x-5}-\frac{1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$$

Restricțiile lui f la $x<-5$, respectiv $x>1$ sînt funcții elementare continue și derivabile. De aceea f este continuă și derivabilă. Regulile de derivare ne conduc la

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}-\frac{1}{(x+5)^2}, & x<-5,\\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}+\frac{1}{(x-1)^2}, & x>1.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Observăm că pentru $x<-5$ avem $f'(x)<0$, iar pentru $x>1$ avem $f'(x)>0$. Acestea împreună cu tabelul

x	$-\infty$		-5		1		∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$		$\nearrow$	∞

arată că există $x_1\in(-\infty, -5)$ și $x_2\in(1, \infty)$ așa ca $f(x_i)=0$, $i=1, 2$. Deoarece $f(-6)>0$, $f\left(-\frac{11}{2}\right)<0$ rezultă $x_1\in\left(-6, -\frac{11}{2}\right)$. Analog găsim $x_2\in(3/2, 2)$.

3) Tabelul precedent arată că $x=-5$ și $x=1$ sînt asimptote verticale. Să cercetăm asimptotele la ramurile $-\infty$ și $+\infty$.

Mai întîi avem $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{4}{|x|}-\frac{5}{x^2}}+\frac{1}{x^2+5x}\right)=-1$,

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x-5}{\sqrt[3]{x^3+4x-5}-x}+\frac{1}{x+5}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{|x|}-\frac{5}{x^2}}+1\right)}=-2.$$

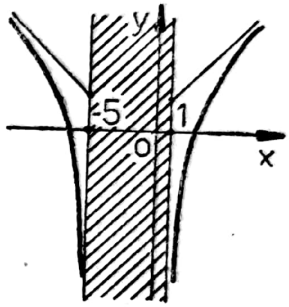


Fig. 20.

Astfel $y=-x-2$, $x<-5$, este asimptotă oblică la $-\infty$.

Analog găsim că $y=x+2$, $x>1$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

Cu acestea graficul lui f are forma din fig. 20.

2.66. Se consideră funcția $x\to f(x)=\frac{m-x}{x^2-3x+2}$, unde m este un parametru.

1) Care este numărul extremelor cînd m ia toate valorile reale?

2) Să se determine m astfel ca $f(-1)=\frac{2}{3}$ și apoi să se traseze graficul lui f.

3) Să se afle intervalele pe care funcția de la punctul 2) are valori mai mari ca unitatea.

(I. P. Cluj, 1972)

Soluție. Deoarece x^2-3x+2 are rădăcinile 1 și 2, domeniul de definiție al lui f este $E=(-\infty, 1)\cup(1, 2)\cup(2, \infty)$.

1) Calculăm mai întîi derivata $f'(x)=\frac{-(x^2-3x+2)-(m-x)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}=$

$=\frac{x^2-2mx+3m-2}{(x^2-3x+2)^2}$ și observăm că $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2mx+3m-2=0$. Discriminantul redus al acestei ecuații este $\Delta'=m^2-3m+2$. De aceea pentru $m\in(1, 2)$, ecuația nu are soluții reale, adică $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in E$, ceea ce înseamnă

că f nu are extreme; pentru $m\in(-\infty, 1)\cup(2, \infty)$ există două puncte $x_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-3m+2}$ aşa ca $f'(x_{1,2})=0$ şi la trecerea lui x prin $x_{1,2}$ derivata $f'(x)$ îşi schimbă semnul, deci $x_{1,2}$ sînt puncte de extrem; pentru $m=1$ sau $m=2$ nu avem extreme.

2) Deoarece $f(-1)=\frac{m+1}{6}=\frac{2}{3}$ găsim $m=3$. Astfel $f(x)=\frac{3-x}{x^2-3x+2}$ şi deci $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 2} f(x)=\infty$. De aceea $y=0$ este o asimptotă orizontală, iar $x=1$, $x=2$ sînt asimptote verticale.

Punctele de extrem ale lui f sînt $x_{1,2}=3\pm\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		1		$3-\sqrt{2}$		2		3	$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$ M	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$ 0	$\searrow$	m	$\nearrow$ 0

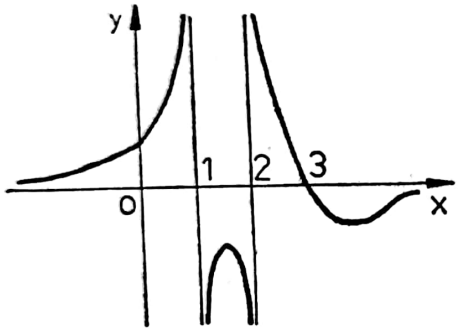


Fig. 21.

Acestea ne conduc la graficul din fig. 21.

3) Avem $\frac{3-x}{x^2-3x+2}>1\Leftrightarrow\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x-2)}<0$, iar aceasta are soluţia $x\in(1-\sqrt{2}, 1)\cup(2, 1+\sqrt{2})$.

2.67. Se dă funcţia $x\to f(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$.

1) Să se studieze variaţia şi să se traseze graficul lui f.

2) Să se determine constantele reale a, b, c aşa încît funcţia $x\to F(x)=\frac{1}{x}[c+bx+a\ln(x+1)]$ să aibă ca derivată pe $\frac{f(x)}{x^2}$ şi $\lim\limits_{x\to 0} F(x)=1$.

3) Folosind funcţia F determinată la punctul precedent, să se arate că dacă $u_1>0$, atunci şirul definit prin relaţia de recurenţă $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$ este monoton, convergent şi să i se afle limita.

(I. P. Bucureşti, 1971)

Soluţie. 1) Existenţa fracţiei $\frac{x}{x+1}$ impune $x\neq -1$, iar existenţa lui $\ln(x+1)$ implică $x>-1$. De aceea f este definită pe $(-1, \infty)$.

Avem $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow -1}\frac{x}{x+1}\left[1-\frac{\ln(1+x)}{\frac{x}{x+1}}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$. Apoi $f(0)=0$; $f'(x)=\frac{-x}{(x+1)^2}$ ne arată că şi $f'(0)=0$. De aceea $x=0$ este o rădăcină dublă. Şirul lui Rolle ne arată că ecuaţia $f(x)=0$ nu mai are alte soluţii reale.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $f''(x)=\frac{x-1}{(x+1)^3}$, punctul $x=1$, $f(1)=\frac{1}{2}-\ln 2$ este un punct de inflexiune.

Tabelul de variație

x	-1		0		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f''(x)$			$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$			$-\infty$

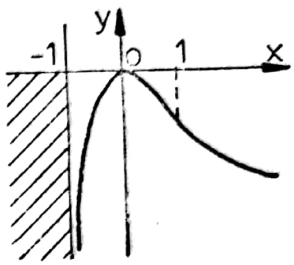


Fig. 22.

ne conduce la graficul din fig. 22.

2) Identitatea $F'(x)=\frac{1}{x^2}\left[\frac{ax}{x+1}-c-a\ln(x+1)\right]\equiv\frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right]$, $\forall x\in(-1,0)\cup(0,\infty)$ ne dă $a=1$, $c=0$. Astfel $F(x)=b+\frac{\ln(x+1)}{x}$. Observăm acum că $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=b+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=b+1=1\Leftrightarrow b=0$. Rezultă $F(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$, $x\in(-1,0)\cup(0,\infty)$.

3) De la punctul 1) observăm că $F'(x)=\frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right]<0$ și deci F este monoton descrescătoare. De asemenea $x>1$ implică $F(x)<1$.

Deoarece $u_1>0$, avem $u_2=\ln(1+u_1)>0$; fie $u_n>0$, de unde $u_{n+1}=\ln(1+u_n)>0$, adică șirul are toți termenii strict pozitivi.

Apoi $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}=\frac{\ln(1+x)}{x}\Big|_{x=u_n>0}=F(u_n)<1$; deci șirul $\{u_n\}$ este descrescător. Acestea ne arată că șirul $\{u_n\}$ este convergent (descrescător și mărginit inferior).

Notînd cu $l=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$, relația $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$ implică $l=\ln(1+l)$, adică $l=0$.

2.68. Să se determine volumul corpului obținut prin rotația mulțimii $\{(x,y)]\,0\leqslant y\leqslant\sqrt{xf(x)},\ x\in[0,\pi]\}$ în jurul lui Ox, unde $f(x)$ este soluția ecuației diferențiale $f''+f=0$, care verifică condițiile $f(0)=0$, $f'(0)=1$.

(*I. P. București*, 1976)

Soluție. Din $f''+f=0$, rezultă $f(x)=a\cos x+b\sin x$. Punînd condițiile $f(0)=0$, $f'(0)=1$, găsim $a=0$, $b=1$, adică $f(x)=\sin x$. De aceea

$$V=\pi\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$ (se utilizează formula de integrare prin părți),

$$V=\pi(\sin x-x\cos x)\Big|_0^{\pi}=\pi^2.$$

2.69. Se dă $f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

1) Să se studieze variaţia şi să se traseze graficul funcţiei f.

2) Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$u_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n).$$

3) Să se calculeze integrala $\int_1^2 f(x)\,dx$.

(I. P. Bucureşti, 1974)

Soluţie. 1) Din $1+\frac{2}{x}>0$ şi $x\neq 0$ rezultă domeniul maxim de definiţie $E=(-\infty,\ -2)\cup(0,\ +\infty)$. Funcţia dată este continuă pe E. Graficul său nu taie axele de coordonate. În punctele de acumulare ale lui E care nu fac parte din E calculăm limite. Deoarece $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală atît la $-\infty$ cît şi la $+\infty$. La fel din $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ rezultă respectiv că $x=-2$ şi $x=0$ sînt asimptote verticale. Graficul nu admite asimptote oblice, diferite de cea orizontală.

Deoarece $f'(x)=\frac{-2}{x(x+2)}<0$, $\forall x\in E$, funcţia este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty,\ -2)$ şi $(0,\ \infty)$; întrucît $f''(x)=\frac{4(x+1)}{x^2(x+2)^2}$ găsim $f''(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,\ -2)$ şi $f''(x)>0$ pentru $x\in(0,\ \infty)$. De aceea graficul nu posedă puncte de inflexiune.

Avînd în vedere tabelul de variaţie găsim graficul din fig. 23.

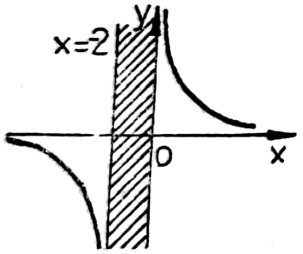


Fig. 23.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		‖		$-$		
$f''(x)$	$-$		‖		$+$		
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

2) Avem $u_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\ln\frac{3}{1}+\ln\frac{4}{2}+\ldots+\ln\frac{n+2}{n}=$
$=\ln\frac{3\cdot 4\ldots(n+2)}{1\cdot 2\ldots n}=\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Astfel $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\infty$.

3) Integrala $I=\int_1^2 \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)dx$ se poate calcula prin părţi. Avem $u=$
$=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$, $du=-\frac{2}{x(x+2)}dx$, $dv=dx$, $v=x$ şi deci

$$I=x\ln\frac{x+2}{x}\Big|_1^2+2\int_1^2\frac{dx}{x+2}=\ln\frac{64}{27}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.70. Se dă funcţia

$$a \to f(a) = a(1+a)\int_0^1 \frac{dx}{(1+a)^2+a^2x^2},$$

unde a este un parametru real, $a \neq -1$.

1) Să se calculeze integrala şi apoi să se determine domeniul de definiţie al funcţiei f.

2) Să se arate că $f'(a)$ este mărginită.

3) Să se studieze variaţia şi să se traseze graficul lui f.

(Facultatea de matematică-informatică, Braşov, 1972)

Soluţie. 1) Succesiv găsim

$$f(a) = a(1+a)\int_0^1 \frac{dx}{(1+a)^2+a^2x^2} = \frac{a}{1+a}\int_0^1 \frac{dx}{1+\frac{a^2x^2}{(1+a)^2}};$$ facem substituţia $\frac{ax}{1+a} = t$,

$dx = \frac{1+a}{a}\,dt$, $\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & a/(1+a) \end{array}$ şi deci $f(a) = \int_0^{a/(1+a)} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t \Big|_0^{a/(1+a)} = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{1+a}$.

Evident, domeniul de definiţie al lui f este $(-\infty, -1)\cup(-1, \infty)$.

2) Mai întîi avem $\frac{df}{da} = \frac{1}{1+\left(\frac{a}{1+a}\right)^2}\frac{d}{da}\left(\frac{a}{1+a}\right) = \frac{1}{(1+a)^2+a^2} = \frac{1}{2a^2+2a+1} > 0$. Apoi observăm că $\lim_{a\to\pm\infty} f'(a) = 0$, $\lim_{a\to -1} f'(a) = 1$ şi $0 < f'(a) < \max_a f'(a) = \frac{1}{\min_a (2a^2+2a+1)} = 2$.

3) Deoarece $f'(a) > 0$, $\forall a \in (-\infty, -1)\cup(-1, \infty)$, funcţia f este crescătoare. În plus, $\lim_{a\to\pm\infty} f(a) = \operatorname{arc\,tg} \lim_{a\to\pm\infty} \frac{a}{1+a} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{a\nearrow -1} f(a) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{a\searrow -1} f(a) = -\frac{\pi}{2}$. De aceea dreapta $b = \frac{\pi}{4}$ este o asimptotă orizontală la $-\infty$ şi $+\infty$, iar punctele $\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ sînt puncte asimptotice.

Graficul taie axele în punctul $(a, b) = (0, 0)$.

Deoarece $f''(a) = \frac{-2(2a+1)}{(2a^2+2a+1)^2}$, punctul $a = -\frac{1}{2}$ este un punct de inflexiune pentru grafic.

Tabelul

a	$-\infty$			-1		$-1/2$		0	$+\infty$
$f'(a)$	0	$+$	$+$	$+1$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f''(a)$		$+$	$+$		$+$	0	$-$		
$f(a)$	$\pi/4$	$\nearrow$	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $\pi/4$

ne conduce la graficul din fig. 24.

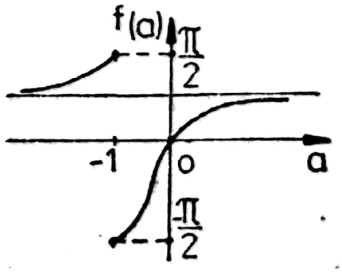


Fig. 24.

2.71. Se dau funcţiile

$x \to f(x) = \cos 3x + 4\cos 2x + 8\cos x + 5,$

$x \to g(x) = 6\cos x \cos^2 \frac{x}{2} + 10\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1-4\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

1) Să se arate că $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in R$.

2) Să se găsească valorile lui x pentru care $f(x) = 0$.

3) Fie $M = \{x \mid x \in R,\ f(x) = 0\}$. Să se determine intersecţia mulţimii M cu mulţimea rădăcinilor ecuaţiei $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt[4]{y_0}}$, unde y_0 este rădăcina ecuaţiei

$$\sqrt{1 + \log_y \sqrt{27}} \cdot \log_3 y + 1 = 0.$$

4) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 (f(x) - g(x))\,dx.$$

(I. P. Timişoara, 1973)

Soluţie. 1) $f(x) = 4(\cos x + 1)\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2$ şi deoarece $\cos x + 1 \geqslant 0$, $\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$, $\forall x \in R$, rezultă $f(x) \geqslant 0$ pe R.

2) $f(x) = 0$ pentru mulţimea

$$M = \left\{x / x = (2k+1)\pi,\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi;\ \ k,\ k_1 \in Z\right\}$$

3) Existenţa rădăcinii y_0 impune condiţiile $y > 0$, $y \neq 1$, $1 + \frac{3}{2}\log_y 3 \geqslant 0$, $\log_y 3 < 0$. Cu acestea ecuaţia în y se poate scrie în forma echivalentă $\sqrt{1 + \frac{3}{2}\log_y 3} = -\log_y 3$ sau $(\log_y 3)^2 - \frac{3}{2}\log_y 3 - 1 = 0$. Rezultă $\log_y 3 = -\frac{1}{2}$ şi deci $y_0 = \frac{1}{9}$. Ecuaţia $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt[4]{y_0}}$ devine $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ cu soluţiile

$$A = \left\{x / x = \frac{\pi}{3} + k_2\pi,\ k_2 \in Z\right\} \text{ şi } M \cap A = \left\{x / x = 2m\pi + \frac{4\pi}{3},\ m \in Z\right\};$$

4) Deoarece $f(x) - g(x) = \cos 3x$, rezultă integrînd succesiv prin părţi

$$\int_0^{\pi/2} x^3 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} x^3 \cos 3x\,dx = \frac{x^3}{3}\sin 3x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x^2 \sin 3x\,dx = -\frac{\pi^3}{24} -$$

$$-\left(-\frac{x^2}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} x\cos 3x\,dx\right) = -\frac{\pi^3}{24} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}\sin 3x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\sin 3x\,dx\right) =$$

$$= -\frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{9} + \frac{2}{27}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.72. Se dă funcţia

$$x \to f(x) = \frac{1}{x+2} e^{|x|}$$

şi se cere:

1) Să se găsească punctele în care f nu este derivabilă; în acele puncte să se calculeze derivata la stînga şi derivata la dreapta.

2) Să se discute după parametrul λ numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x)=\lambda$.

3) Să se calculeze $\int_{-1}^{+1} x^4(x+2)f(x)dx$.

(I. P. Bucureşti, 1970)

Soluţie. Domeniul de definiţie al lui f este $R-\{-2\}$. Explicitînd modulul putem scrie

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{x+2}, & x\in(-\infty, -2)\cup(-2, 0), \\ 1/2, & x=0, \\ \dfrac{e^{x}}{x+2}, & x\in(0, +\infty). \end{cases}$$

1) Prin calcul direct găsim

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{(x+2)^2}(-x-3), x\in(-\infty, -2)\cup(-2, 0), \\ \dfrac{e^{x}}{(x+2)^2}(x+1), \quad x\in(0, \infty). \end{cases}$$

În punctul $x=-2$ nu se pune problema derivabilităţii deoarece nu face parte din domeniul de definiţie al lui f. În punctul $x=0$ avem $f'_{st}(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{-(x+3)e^{-x}}{(x+2)^2} = -\dfrac{3}{4}$ şi $f'_{dr}(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{(x+1)e^{x}}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{4}$. De aceea în $x=0$, funcţia nu este derivabilă.

2) Avînd în vedere tabelul de variaţie

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+++$	0	$---$	‖	$---$		$+++$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e^3$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	$+\infty$

funcţia f are un grafic de forma dată în fig. 25.

Scanned with OKEN Scanner

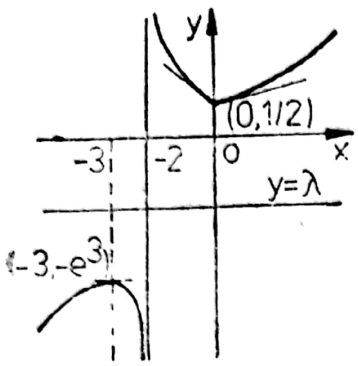


Fig. 25.

Deoarece $y=\lambda$ este o dreaptă, discuția ecuației $f(x)=\lambda$ este următoarea: dacă $\lambda<-e^3$, atunci ecuația are două soluții distincte; dacă $\lambda=-e^3$, atunci ecuația are soluția dublă $x=-3$; dacă $-e^3<\lambda<1/2$, ecuația nu are soluții; dacă $\lambda=\frac{1}{2}$, atunci ecuația are soluția $x=0$; dacă $\lambda>1/2$ avem două soluții distincte.

3) Avem

$$\int_{-1}^{+1} x^4(x+2)\,f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} x^4e^{-x}dx+\int_{0}^{1} x^4e^{x}dx=$$ (în prima integrală schimbăm pe x în $-x$), $2\int_0^1 x^4e^x dx=$ (integrăm prin părți, $u=x^4$, $dv=e^x dx$; $du=4x^3dx$, $v=e^x$), $2x^4e^x\Big|_0^1-4\int_0^1 x^3e^x dx=$ (integrăm încă de trei ori prin părți), $6(3e-8)$.

2.73. Fie funcția $x\to f(x)=a^{u(x)}$, unde $u(x)=\frac{2|x|}{1+x^2}$, iar $a>0$ și $a\neq 1$.

1) Să se reprezinte grafic funcția f.

2) Să se determine valorile lui a astfel încît $1\leqslant f(x)\leqslant 2$ oricare ar fi x real.

3) Să se calculeze

$$\int_{-1}^{1}\log_a f(x)\,dx.$$

(*I. P. București*, 1975)

Soluție. 1) Domeniul de definiție al funcției f este mulțimea numerelor reale R. Funcția f este continuă pe R, deoarece este o compunere de funcții elementare continue.

Graficul lui f taie axa Oy în punctul $(0, 1)$. Deoarece $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală atît la $-\infty$ cît și la $+\infty$. Graficul nu posedă asimptote oblice.

Din $u(-x)=u(x)$, $\forall x\in R$, găsim $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in R$ și deci $x\to f(x)$ este o funcție pară. De aceea graficul lui f este simetric față de axa Oy.

Derivata lui $f(x)$ poate fi scrisă în forma

$$f'(x)=2f(x)\,\frac{(1-x^2)|x|}{(1+x^2)^2x}\ln a,\quad x\neq 0.$$

Funcția f nu este derivabilă în $x=0$, dar $f'(0\pm 0)=\pm 2\ln a$. De asemenea $f'(x)=0$ implică $x=\pm 1$.

Semnul lui $f'(x)$ este același cu semnul expresiei:

$$\frac{|x|}{x}(1-x^2)\ln a.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţie. Derivata $f''(x)$ are o expresie relativ complicată, iar soluţiile ecuaţiei $f''(x)=0$ pot fi calculate numai prin metode aproximative. Datorită acestor dificultăţi folosirea lui $f''(x)$ la concurs nu a fost obligatorie (cu $f''(x)=0$ obţinem şi punctele de inflexiune).

Dacă $0<a<1$, atunci $\ln a<0$ şi avem (fig. 26)

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	$\|$	$-$	-0	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	a	$\nearrow$	1	$\searrow$	a	$\nearrow$	1

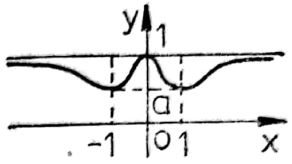


Fig. 26.

Dacă $a>1$, atunci $\ln a>0$ şi avem (fig. 27)

x	$-\infty$		-1		0		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	a	$\searrow$	1	$\nearrow$	a	$\searrow$	1

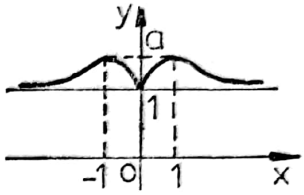


Fig. 27.

2) Preferăm să dăm o rezolvare oarecum independentă de soluţia punctului precedent. Pentru aceasta determinăm direct mulţimea valorilor lui f pornind de la inegalitatea evidentă:

$$0 \leqslant \frac{2|x|}{1+x^2} \leqslant 1.$$

Pentru $0<a<1$, funcţia exponenţială este descrescătoare şi de aceea $a^1 \leqslant a^{u(x)} \leqslant a^0$, adică $a \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Pentru $a<1$, funcţia exponenţială este crescătoare şi deci $a^0 \leqslant a^{u(x)} \leqslant a^1$, adică $1 \leqslant f(x) \leqslant a$, $\forall x \in R$.

Relaţiile $a>1$, $1 \leqslant f(x) \leqslant a$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$ implică $1<a \leqslant 2$.

3) $$I=\int_{-1}^{+1} \frac{2|x|}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^2} = 2\cdot \ln(1+x^2)\Big|_0^1 = 2\ln 2.$$

($x \to u(x)$ — funcţie pară).

2.74. Se dă funcţia $x \to f(x)=1+\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x-1}}$. Se cere:

1) domeniul maxim de definiţie;

2) să se studieze monotonia restricţiei lui f la intersecţia domeniului de definiţie cu intervalul $(-\infty, 2)$;

3) să se determine aria figurii mărginite de graficul funcţiei f şi dreptele $x=2$, $x=3$, $y=0$.

(Universitatea Timişoara, 1977)

Soluţie. 1) Funcţia $x \to f(x)=\frac{|x+1|}{\sqrt{x-1}}+1$ este definită pe $(1, \infty)$, unde ia valorile $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}+1$.

2) Restricția este $f:(1,2)\to R$ cu valorile $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}+1$; $f'(x)=\frac{x-3}{2(x-1)^{3/2}}$ și $f'(x)<0$ pentru $x\in(1,2)$.

În concluzie, restricția lui f pe $(1,2)$ este strict descrescătoare.

3) Deoarece $f(x)>0$ pe $(1,\infty)$, rezultă că aria este

$$A=\int_2^3\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}+1\right)dx=1+\int_2^3\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Se face schimbarea de variabilă $\sqrt{x-1}=u$; se obține $x\Big|_2^3\to u\Big|_1^{\sqrt{2}}, dx=2u\,du$ și deci

$$A=1+2\int_1^{\sqrt{2}}(u^2+2)du=1+2\left(\frac{u^3}{3}+2u\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}-11}{3}.$$

2.75. Se consideră funcția $x\to f(x)=\frac{9x^2}{x^3-x+\lambda}$, unde $\lambda\in R-\{0\}$, și se cere:

1) Să se determine domeniul de variație al lui λ astfel încît funcția f să admită un punct de extrem de abscisă $x_0\in(1,2)$.

2) În ipoteza că graficul lui f are trei puncte de inflexiune distincte $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$, să se arate că $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\frac{1}{f(x_3)}=1$.

3) Pentru $\lambda=1$ să se calculeze aria cuprinsă între graficul lui f, axa Ox și dreptele $x=1$, $x=2$.

(Universitatea Brașov, 1972)

Soluție. Evident, pentru $\lambda\leqslant\frac{1}{4}$ se impune $x\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4\lambda})$.

1) Prin calcul direct obținem $f'(x)=\frac{9x(2\lambda-x)}{(x^2-x+\lambda)^2}$. Soluțiile ecuației $f'(x)=0$ sînt $x_1=0$ și $x_0=2\lambda$. Dacă punem $1<x_0=2\lambda<2$ găsim $\lambda\in\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Semnul derivatei la stînga și la dreapta punctului x_0 arată că x_0 este un punct de extrem.

2) Deoarece $f''(x)=\frac{18(x^3-3\lambda x^2+\lambda^2)}{(x^2-x+\lambda)^3}$ se impune ca ecuația $x^3-3\lambda x^2+\lambda^2=0$ să aibă trei rădăcini reale distincte x_1, x_2, x_3; folosind șirul lui Rolle rezultă $\lambda>\frac{1}{4}$ și $x_1\in(-\infty, 0)$, $x_2\in(0, 2\lambda)$, $x_3\in(2\lambda, \infty)$. Relațiile lui Viète $x_1+x_2+x_3=3\lambda$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$, $x_1x_2x_3=-\lambda^2$ implică $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=0$, $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=-2\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}\right)$. Deci $\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{f(x_i)}=\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2-x_i+\lambda}{9x_i^2}=$

$$=\frac{1}{9}\left(3-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{x_i}+\lambda\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{x_i^2}\right)=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Aria cerută este dată de integrala $I=\int_1^2 \frac{9x^2}{x^2-x+1}\,dx$. Aceasta se calculează astfel:

$$I=9\int_1^2 \frac{(x^2-x+1)+(x-1)}{x^2-x+1}\,dx=9\int_1^2 dx+9\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx=9+\frac{9}{2}\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx-$$

$$-\frac{9}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x^2-x+1}=9+\frac{9}{2}\ln(x^2-x+1)\Big|_1^2-\frac{9}{2}\int_1^2 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=9+\frac{9}{2}\ln 3-$$

$$-\frac{9}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_1^2=9+\frac{9}{2}\ln 3-\frac{9}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=9\ln e\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}.$$

2.76. Se dă funcţia $f: R\to R$ astfel ca

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-5x-3}.$$

1) Să se rezolve ecuaţia $f(x)=0$.

2) Să se studieze variaţia şi să se traseze graficul funcţiei f.

3) Să se calculeze $\int_4^5 \frac{x+1}{f^3(x)}\,dx$.

(I. P. Timişoara, 1977)

Soluţie.

1) Deoarece $x^3-x^2-5x-3=0$ are rădăcinile $x_1=x_2=-1$, $x_3=3$, ecuaţia $f(x)=0$ are soluţiile $x=-1$, $x=3$.

2) Comportarea la $\pm\infty$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$; $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2-5x-3}{\sqrt[3]{(x^3-x^2-5x-3)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x^2-5x-3}+x^2}=-\frac{1}{3}.$$

Rezultă că graficul admite asimptota oblică $y=x-\frac{1}{3}$ spre $\pm\infty$. $f'(x)=$

$$=\frac{(x+1)(3x-5)}{3\sqrt[3]{(x+1)^4(x-3)^2}}$$ şi deci $f'(x)=0$ numai pentru $x=\frac{5}{3}$.

x	$-\infty$		-1		0		$5/3$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$	$\vert -\infty$	$-$		$0+$	$+\infty$	$\vert +\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{3}$	$\searrow$	$-\left(\frac{256}{27}\right)^{1/3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Scanned with OKEN Scanner

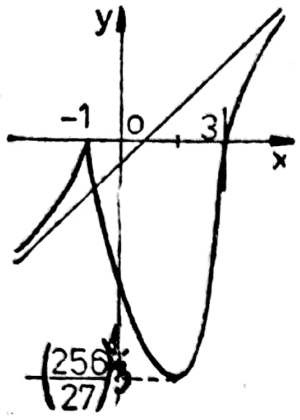


Fig. 28.

Punctul $(-1, 0)$ este punct de întoarcere al graficului, iar în $(3, 0)$ graficul funcției f admite tangentă paralelă la Oy (fig. 28).

3) $\int_4^5 \frac{x+1}{f^3(x)}\,dx = \int_4^5 \frac{dx}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{4}\int_4^5 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$

$= \frac{1}{4}(\ln(x-3) - \ln(x+1))\Big|_4^5 = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$,

2.77. Se dă funcția

$$x \to f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x \in R - \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1) Să se calculeze limitele laterale ale lui f și f' în punctul $x=0$ și să se traseze graficul lui f.

2) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției, axa Ox și dreptele $x\sqrt{3}=1$ și $x=\sqrt{3}$.

3) Fie $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ un polinom cu coeficienții a, b, c, d numere reale în progresie aritmetică ($d\neq 0$). În ipoteza că toate rădăcinile x_i ale acestui polinom sînt reale, să se arate că $(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)) \in \left\{-\frac{5\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

(*I. P. București*, 1970)

Soluție. 1) Observăm că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

De aceea punctele $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ și $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sînt puncte asimptotice, iar f este continuă numai pe $R-\{0\}$. În plus, avem $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, adică dreapta $y=0$ este asimptotă la ambele ramuri infinite.

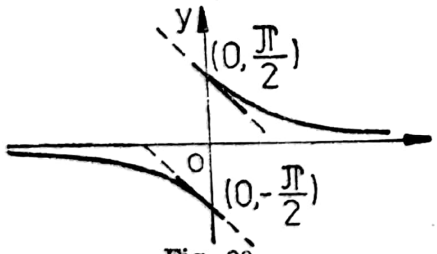


Fig. 29.

Deoarece $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in R - \{0\}$, avem $f'(x)<0$; $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = -1$. Derivata a doua are expresia $f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $x \in R - \{0\}$ și astfel $f''(x) \neq 0$ (fig. 29).

2) $A = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx =$ (integrăm prin părți, $u = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $dv = dx$; $du =$

$= -\frac{1}{1+x^2}dx$, $v = x$), $x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}dx = x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} +$

$+ \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18} + \ln\sqrt{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Din ipoteză $a+d=b+c$ şi $-\frac{\pi}{2}<f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}<\frac{\pi}{2}$. De aceea $(f(x_1)+$

$+f(x_2)+f(x_3))\in\left\{\frac{-5\pi}{4},\ \frac{-\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right\}\Leftrightarrow \operatorname{tg}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]=-1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} f(x_1(+\operatorname{tg} f(x_2)+\operatorname{tg} f(x_3)-\operatorname{tg} f(x_1)\operatorname{tg} f(x_2)\operatorname{tg} f(x_3)}{1-\operatorname{tg} f(x_1)\operatorname{tg} f(x_2)-\operatorname{tg} f(x_2)\operatorname{tg} f(x_3)-\operatorname{tg} f(x_3)\operatorname{tg} f(x_1)}=-1\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1x_2x_3}}{1-\frac{1}{x_1x_2}-\frac{1}{x_2x_3}-\frac{1}{x_3x_1}}=$$

$$=-1\Leftrightarrow \frac{\frac{c}{a}-1}{-\frac{d}{a}+\frac{b}{a}}=-1\Leftrightarrow \frac{c-a}{c-a}=-1\Leftrightarrow a+d=b+c.$$

2.78. Se dă funcţia f definită pe R prin relaţia:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|e^{nx}+a(x+1)^2e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}},\quad a\in R.$$

1) Să se arate că

$$f(x)=\begin{cases}a(x+1)^2, & x<0,\\ \frac{1+a}{2}, & x=0,\\ |x-1|, & x>0.\end{cases}$$

2) Să se determine valoarea parametrului a astfel încît funcţia f să fie continuă pe R.

3) Să se studieze derivabilitatea funcţiei f pe R.

4) Pentru $a=1$ să se reprezinte grafic funcţia f.

5) Să se calculeze $g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$, $x>-1$.

(Universitatea Galaţi, 1977)

Soluţie. 1) Pentru $x<0$, rezultă $e^{nx}\to 0$, $e^{-nx}\to\infty$, $n\to\infty$ şi $f(x)=$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|e^{2nx}+a(x+1)^2}{e^{2nx}+1}=a(x+1)^2$; pentru $x>0$, rezultă $e^{nx}\to\infty$, $e^{-nx}\to 0$ şi $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|+a(x+1)^2e^{-2nx}}{1+e^{-2nx}}=|x-1|$; pentru $x=0$ rezultă $f(0)=\frac{1+a}{2}$.

2) f este polinom pe subintervale, deci continuă, mai puţin $x=0$; f este continuă în $x=0$ (punct de acumulare al domeniului de definiţie), dacă $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=f(0)$, adică $a=1=\frac{1+a}{2}$. Deci pentru $a=1$, funcţia f este continuă şi în $x=0$.

3) Funcția f este derivabilă numai pe $R-\{0, 1\}$; dacă $a=1$, atunci $f'_s(0)=2$, $f'_d(0)=1$; dacă $a\neq 1$, atunci f nu mai este continuă în $x=0$ și deci nu poate fi derivabilă în acest punct; în $x=1$ găsim $f'_s(1)=-1$, $f'_d(1)=1$.

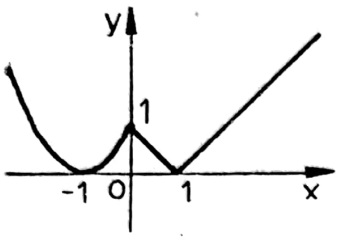


Fig. 30.

4)
$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ |x-1|, & x>0\end{cases}\quad \text{(fig. 30).}$$

5)
$$g(x)=\begin{cases} a\int_{-1}^{x}(t+1)^2\,dt=a\,\frac{(x+1)^3}{3}, & x\in(-1,0),\\ a\int_{-1}^{0}(t+1)^2\,dt-\int_{0}^{x}(1-t)\,dt=\frac{a}{3}-\frac{1}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}, & x\in(0,1),\\ a\int_{-1}^{0}(t+1)^2\,dt-\int_{0}^{1}(1-t)\,dt+\int_{1}^{x}(t-1)\,dt=\frac{a}{3}-\frac{1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2}, & x\in(1,\infty).\end{cases}$$

Se observă că funcția g este continuă pe întreg R.

2.79. Se dă funcția $x\to f(x)=e^{-|x|}\sqrt{\sin x}$.

1) Să se determine domeniul de definiție E al lui f.

2) Fie g_n restricția funcției f la mulțimea $G=[0, (2n+1)\pi]\cap E$, $n\in N$. Să se calculeze volumul V_n al corpului obținut prin rotirea mulțimii $\{(x, y)\,|\,0\leqslant y\leqslant g_n(x), x\in G\}$ în jurul axei Ox.

3) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$.

(Universitatea Timișoara, 1976)

Soluție.

1) Relația care determină mulțimea E este $\sin x\geqslant 0$, deci $x\in[2k\pi, 2k\pi+\pi]$, $k\in Z$.

2) $$V_n=\pi\sum_{k=0}^{n}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}f^2(x)\,dx=\pi\sum_{k=0}^{n}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}e^{-2x}\sin x\,dx.$$

Deoarece
$$\int_{k2\pi}^{2k\pi+\pi}e^{-2x}\sin x\,dx=-\frac{1}{5}e^{-2x}(\cos x+2\sin x)\Big|_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}=+\frac{1}{5}e^{-4k\pi}(1+e^{-2\pi}),$$
(s-a integrat de două ori prin părți și s-a explicitat) rezultă
$$V_n=\frac{\pi}{5}(1+e^{-2\pi})(1+e^{-4\pi}+e^{-8\pi}+\ldots+e^{-4n\pi})=\frac{\pi}{5}(1+e^{-2\pi})\,\frac{1-e^{-4(n+1)\pi}}{1-e^{-4\pi}},$$

3) Deoarece progresia geometrică este descrescătoare, cu raţia $q=e^{-4\pi}$, rezultă că

$\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \frac{\pi}{5}\,\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-4\pi}}$, valoarea obţinută prin trecere la limită ($e^{-4(n+1)\pi}\to 0$ cînd $n\to\infty$).

2.80. Se dă funcţia $x\to f(x)=|x-1|^{1-\alpha}\cdot|x+1|^{1+\alpha}$ şi se cere:

1) Să se determine domeniul de definiţie, de continuitate, de derivabilitate şi tabelul de variaţie pentru $\alpha\in(0, 1)$.

2) Să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul lui f pentru $\alpha=\frac{1}{2}$,

3) Să se calculeze volumul corpului născut prin rotirea mulţimii $\{(x, y)\,|0\leqslant y\leqslant f(x),\ \alpha=\frac{1}{2},\ x\in[0, 2]\}$ în jurul lui Ox.

(I. P. Bucureşti, 1972)

Soluţie. 1) Deoarece $\alpha\in(0, 1)$ implică $1-\alpha>0$, $1+\alpha>0$, rezultă că f este definită pe $(-\infty, +\infty)$. Apoi, explicitînd modulele, putem scrie

$$f(x)=\begin{cases}(-x+1)^{1-\alpha}\,(-x-1)^{1+\alpha}, & x\in(-\infty, -1],\\ (-x+1)^{1-\alpha}\,(x+1)^{1+\alpha}\ , & x\in(-1, 1),\\ (x-1)^{1-\alpha}\ \ (x+1)^{1+\alpha}\ , & x\in[1, \infty).\end{cases}$$

Restricţiile lui f la subintervalele ce alcătuiesc domeniul de definiţie sînt evident continue. Pe de altă parte $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=f(-1)=0$, $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=f(1)=0$. De aceea f este continuă pe $(-\infty, +\infty)$. În plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$.

Restricţia lui f la $(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, \infty)$ este derivabilă, deoarece este definită prin expresii elementare derivabile:

$$f'(x)=\begin{cases}-(1-\alpha)(-x+1)^{-\alpha}(-x-1)^{1+\alpha}-(1+\alpha)(-x-1)^{\alpha}(-x+1)^{1-\alpha},\\ \qquad\qquad x\in(-\infty, -1),\\ -(1-\alpha)(-x+1)^{-\alpha}(x+1)^{1+\alpha}+(1+\alpha)(x+1)^{\alpha}(-x+1)^{1-\alpha},\ x\in(-1, 1),\\ (1-\alpha)(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{1+\alpha}+(1+\alpha)(x+1)^{\alpha}(x-1)^{1-\alpha},\ x\in(1, \infty).\end{cases}$$

Apoi observăm că $f'(-1)=0$, $f'_{d;s}(1)=\pm\infty$. De aceea f este derivabilă pe $(-\infty, -1]\cup(-1, 1)\cup(1, \infty)$.

Ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţiile $x=-1$ şi $x=\alpha$. De aceea obţinem următorul tabel de variaţie

x	$-\infty$		-1		0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

unde $f(\alpha)=(1-\alpha^2)\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha}$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Pentru $\alpha=\frac{1}{2}$ avem același tabel ca și mai sus, în care $f(1/2)=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{3}$. Deoarece

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-2x-1}{\sqrt{(1-x^2)(1-x)^3}}, & x\in(-1,\ 1),\\ \dfrac{2x^3-2x-1}{\sqrt{(x^2-1)(x-1)^3}}, & x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty),\end{cases}$$

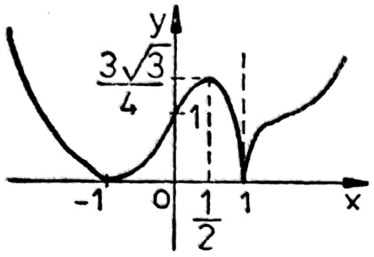


Fig. 31.

ecuația $f''(x)=0$ are soluțiile $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. Semnul lui $f''(x)$ ne arată că acestea sînt abscisele a două puncte de inflexiune (fig. 31).

3) Deoarece $f(x)=\sqrt{|1-x||1+x|^3}$, găsim $V=\pi\int_0^1(1-x)(x+1)^3dx+\pi\int_1^1(x-1)(x+1)^3dx=11\pi$ (se scriu expresiile de sub integrale ca polinoame ordonate după puterile lui x și se integrează termen cu termen).

2.81. Se dă funcția $x\to f(x)=x\sqrt{\sin x}$.

1) Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției f.

Să se găsească punctele de intersecție ale graficului funcției cu prima bisectoare a axelor și să se demonstreze că în aceste puncte prima bisectoare a axelor este tangentă la graficul funcției, cu excepția unui punct care se va preciza.

2) Să se demonstreze că graficul restricției lui f la $x\geqslant 0$ rămîne de aceeași parte față de prima bisectoare. Să se traseze graficul restricției lui f la $[0,\ 4\pi]$.

3) Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafața care rezultă prin rotirea în jurul lui Ox a graficului restricției lui f la $[0,\ \pi]$.

(I. P. București, 1972)

Soluție. 1) Condiția $\sin x\geqslant 0$ implică $x\in[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$, $k\in Z$.

Sistemul $y=x$, $y=x\sin x$ are soluțiile $x=y=0$ și $x_k=y_k=\pi/2+2k\pi$, $k\in Z$. Pe de altă parte $f'(x)=\sqrt{\sin x}+x\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$. Deoarece $f'(x_k)=1$, tangenta la $G(f)$ în punctele $(x_k,\ y_k)$ este $y=x$; deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0}f'(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\sqrt{x}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\cdot\frac{\cos x}{2}=0$, tangenta la $G(f)$ în $(0,\ 0)$, la dreapta, este axa Ox.

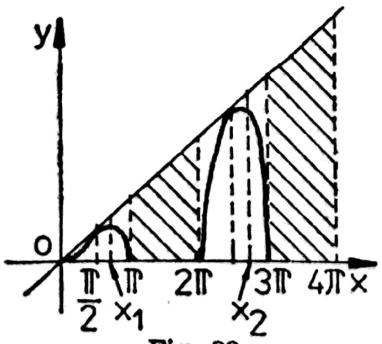


Fig. 32.

2) Fie $x\geqslant 0$. Deoarece $\sqrt{\sin x}\leqslant 1$ rezultă că $f(x)=x\sqrt{\sin x}\leqslant x$, $\forall x\geqslant 0$, adică graficul se află sub prima bisectoare.

Avem $f'(x)=\frac{2\sin x+x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{\varphi(x)}{2\sqrt{\sin x}}$. Deoarece $\varphi(\pi/2)=2>0$, $\varphi(\pi)=-\pi<0$, rezultă că există $x_1\in(\pi/2,\pi)$ astfel încît $f'(x_1)=0$; acesta este evident un punct de

maxim. La fel se arată că şi pe $(2\pi+\pi/2, 3\pi)$ mai avem un punct de maxim x_2. Acestea conduc la următorul tabel de variaţia şi la graficul din fig. 32.

x	0	x_1	π	2π	x_2	3π	4π
$f'(x)$	0	$+\ 0\ -$	$-\infty$	∞	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$ max $\searrow$	0	0	$\nearrow$ max	$\searrow$	0

3) Volumul cerut este

$$V=\pi\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx=$$ (se integrează prin părţi, $u=x^2$, $du=2x\,dx$; $dv=\sin x\,dx$, $v=-\cos x$), $$\pi\left(-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}x\cos x\,dx\right)=\pi^3+2\pi\int_0^{\pi}x\cos x\,dx=$$ (se integrează prin părţi, $u=x$, $du=dx$; $dv=\cos x\,dx$, $v=\sin x$), $$\pi^3+2\pi\left(x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right)=\pi(\pi^2-4).$$

2.82. Se consideră funcţia $x\to f(x)=x^2e^x$.

1) Să se arate că derivata de ordinul n a acestei funcţii este de forma $f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ şi să se calculeze coeficienţii a_n şi b_n.

2) Să se determine n astfel ca graficul funcţiei

$$x\to g(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)+f^{(n-1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)-f^{(n-1)}(x)}$$

să admită asimptota oblică $4y-2x=5$ şi pentru această valoare a lui n să se construiască graficul lui g.

3) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x=a$, $x=b$, unde a şi b sînt punctele de extrem ale funcţiei f.

(I. P. Bucureşti, 1971)

Soluţie. 1) Deoarece $f'(x)=(x^2+2x)e^x$ afirmaţia este adevărată pentru $n=1$ cu $a_1=2$, $b_1=0$.

Presupunem $f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$. Să arătăm că $f^{(n+1)}(x)=(x^2+a_{n+1}x+b_{n+1})e^x$. Într-adevăr, $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'=(x^2+a_nx+b_n+2x+a_n)e^x=(x^2+(a_n+2)x+(b_n+a_n))e^x$, cu $a_{n+1}=a_n+2$, $b_{n+1}=b_n+a_n$.

Relaţia $a_{n+1}=a_n+2$ implică faptul că $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt termenii unei progresii aritmetice cu $a_1=2$, $r=2$. Rezultă $a_n=a_1+(n-1)r=2n$. Relaţia $b_{n+1}=b_n+2n$ conduce la $b_n=b_1+2(1+2+\ldots+(n-1))=n(n-1)$.

2) Deoarece $f^{(n+1)}(x)=(x^2+2(n+1)x+n(n+1))e^x$, $f^{(n-1)}(x)=(x^2+2(n-1)x+(n-1)(n-2))e^x$, găsim $g(x)=\frac{x^2+2nx+n^2-n+1}{2x+2n-1}$. Impunînd condiţiile $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(g(x)-\frac{1}{2}x\right)=\frac{5}{4}$, găsim $n=2$. Astfel $g(x)=\frac{x^2+4x+3}{2x+3}$, $x\in(-\infty, -3/2)\cup(-3/2, \infty)$.

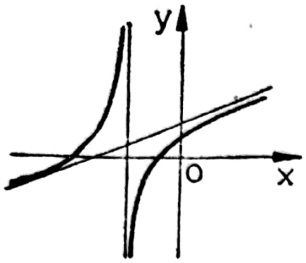


Fig. 33.

Un calcul direct ne conduce la $g'(x)=\frac{2(x^2+3x+3)}{(2x+3)^2}>0$.

De aceea avem tabelul

x	$-\infty$		-3		$-3/2$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$+$			$+$	$+$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\mid -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

și graficul din fig. 33.

3) Observăm că $f'(x)=(x^2+2x)e^x=0$ implică $x=-2$, $x=0$. Semnul lui $f'(x)$ ne arată că acestea sînt puncte de extrem.

$A=\int_{-2}^{0}x^2e^x\,dx=$ (integrăm prin părți, $x^2=u$, $2x\,dx=du$; $e^x dx=dv$, $v=e^x$), $x^2e^x\Big|_{-2}^{0}-2\int_{-2}^{0}xe^x dx=$ (iarăși integrăm prin părți), $-4e^{-2}-2xe^x\Big|_{-2}^{0}+2\int_{-2}^{0}e^x\,dx=2-10e^{-2}$.

2.83. Se consideră șirul cu termenul general

$$u_n=\frac{1+x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{n+p-1}},$$

cu $x\geqslant 0$ și p un număr întreg pozitiv dat.

1) Să se calculeze $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

2) Să se arate că f este continuă pe $[0,\infty)$, derivabilă pe $[0,1)\cup(1,\infty)$ și $f'_{st}(1)$, $f'_{dr}(1)$ există și sînt independente de p. Să se construiască graficele C_0, C_1, C_2 ale funcției f corespunzătoare valorilor $p=0$, $p=1$, $p=2$.

3) Fie x_M abscisa punctului de extrem al graficului C_2. Notăm cu S_0, S_1, S_2 ariile porțiunilor de suprafață cuprinse între Ox, dreptele $x=0$, $x=x_M$ și respectiv C_0, C_1, C_2. Să se arate că $S_1+S_2=S_0+1/2$.

(I. P. București, 1971)

Soluție. Mai întîi avem

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n+p-1}=\begin{cases}\frac{x^{n+p}-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ n+p, & x=1,\end{cases}$$

adică

$$u_n=\begin{cases}\frac{(1+x^n)(1-x)}{1-x^{n+p}}, & x\in[0,1)\cup(1,\infty),\\ 2/(n+p), & x=1.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

1) Ţinînd seama că pentru $x\in[0, 1)$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$, iar pentru $x>1$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\infty$, deducem

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} u_n=\begin{cases} 1-x, & x\in[0, 1], \\ \dfrac{x-1}{x^p}, & x\in(1, \infty). \end{cases}$$

2) Restricţiile lui f la $[0, 1]$ şi $(1, \infty)$ sînt evident continue. Deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=0$, funcţia este continuă şi în punctul $x=1$.

Restricţiile lui f la $[0, 1)$ şi $(1, \infty)$ sînt derivabile deoarece sînt date prin expresii elementare. Apoi observăm că

$$f'_{st}(1)=\lim_{x\nearrow 1}\frac{1-x-0}{x-1}=-1,\quad f'_{dr}(1)=\lim_{x\searrow 1}\frac{\frac{x-1}{x^p}-0}{x-1}=1.$$

Pentru $p=0, 1, 2$ avem respectiv

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\in[0, 1], \\ x-1, & x\in(1, \infty), \end{cases}\quad f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\in[0, 1], \\ \dfrac{x-1}{x}, & x\in(1, \infty) \end{cases}\quad f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\in[0, 1], \\ \dfrac{x-1}{x^2}, & x\in(1, \infty). \end{cases}$$

Acestea au respectiv graficele din fig. 34; $x_M=2$.

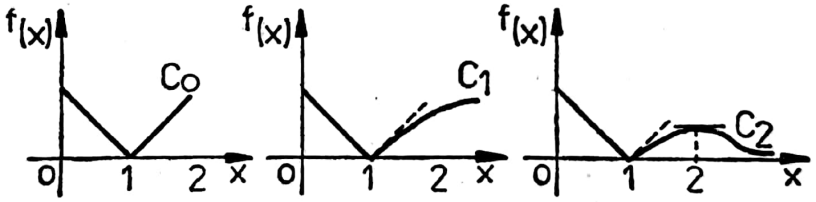


Fig. 34.

3) Avem $S_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, $S_1=\frac{1}{2}+\int\limits_1^2\frac{x-1}{x}\,dx=\frac{1}{2}+(x-\ln x)\Big|_1^2=$ $=3/2-\ln 2$, $S_2=\frac{1}{2}+\int\limits_1^2\frac{x-1}{x^2}\,dx=\frac{1}{2}+\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\ln 2$. Astfel $S_1+S_2=$ $=S_0+\frac{1}{2}$.

2.84. Se dă funcţia f, de valori

$$f(x)=\begin{cases} x\ln(ax), & x>0,\ a>0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

1) Să se studieze funcția f și să se reprezinte grafic.

2) Să se calculeze aria figurii plane cuprinsă între graficul funcției, axa Ox și dreptele $x=x_1$, $x=x_2$ unde x_1 este rădăcina nenulă a ecuației $f(x)=0$, iar x_2 este punctul de extrem al funcției.

3) Considerînd x_1, x_2 ca fiind în această ordine primii termeni ai unei progresii geometrice, să se arate că progresia este descrescătoare și să se calculeze $\lim\limits_{a\to 0}(e^a-1)S$, unde S este suma progresiei infinite.

(I. P. București, 1970)

Soluție. 1) Funcția f este continuă. Într-adevăr, restricția ei la $x>0$ este o funcție elementară, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(ax)}{\frac{1}{x}}=0$. Pe de altă parte, graficul se mai intersectează cu axa Ox în punctul $\left(x=\frac{1}{a}, y=0\right)$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

Deoarece $f'(x)=1+\ln(ax)$, $x>0$, $a>0$, găsim $f'(x)<0$ pentru $x<\frac{1}{ea}$; $f'(x)=0$ pentru $x=\frac{1}{ea}$, și $f'(x)>0$ pentru $x>\frac{1}{ea}$. De aceea punctul $x=\frac{1}{ea}$ este un punct de minim. Mai mult, $f''(x)=\frac{1}{x}>0$, $\forall x>0$ și de aceea graficul nu posedă puncte de inflexiune.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(ax)=\infty$, graficul nu admite direcții asimptotice și deci nici asimptote.

Avînd în vedere și tabelul de variație

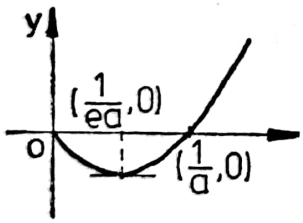


Fig. 35.

x	0		$\frac{1}{ea}$		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$---$	0	$+$	$+$	$+$	∞
$f''(x)$	∞	$+++$		$+$	$+$	$+$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{ea}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

găsim graficul din fig. 35.

2) Din cele precedente, $x_1=\frac{1}{ea}$ și $x_2=\frac{1}{a}$. Aria cerută este numeric egală cu integrala $I=-\int\limits_{1/ea}^{1/a} x\ln ax\,dx=$ (integrăm prin părți, $u=\ln ax$, $dv=x\,dx$; $du=\frac{1}{x}dx$, $v=\frac{x^2}{2}$), $-\frac{x^2}{2}\ln ax\Big|_{1/ea}^{1/a}+\int\limits_{1/ea}^{1/a}\frac{x}{2}dx=-\frac{x^2}{2}\ln ax\Big|_{1/ea}^{1/a}+\frac{x^2}{4}\Big|_{1/ea}^{1/a}=\frac{e^2-3}{4e^2a^2}$,

3) Progresia are termenii următori

$$x_1=\frac{1}{a},\ x_2=\frac{1}{ea},\ \ldots,\ x_n=\frac{1}{e^{n-1}a},\ \ldots \text{ cu raţia } \frac{1}{e}<1.$$

De aceea $S=\dfrac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{e}}=\dfrac{e}{a(e-1)}$ şi astfel $\lim\limits_{a\to 0}(e^a-1)\dfrac{e}{a(e-1)}=\dfrac{e}{e-1}\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{e^a-1}{a}=$

$=\dfrac{e}{e-1}$.

2.85. Se consideră integralele

$$I=\int_0^{x_0}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \text{ şi } J=\int_0^{x_0}\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ cu } x_0\in(0,\,a).$$

1) Să se stabilească două relaţii distincte între I şi J care să nu conţină altă integrală.

2) Să se calculeze I şi J utilizînd fie relaţiile găsite, fie direct.

(A.S.E., 1976)

Soluţie. 1) Integrînd prin părţi ($u=\sqrt{a^2-x^2}$, $v=x$), rezultă $I=$ $=x_0\sqrt{a^2-x^2}+J$.

Descompunînd în două integrale, rezultă

$$I=\int_0^{x_0}\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\arcsin\frac{x_0}{a}-J.$$

2) Din sistemul $I-J=x_0\sqrt{a^2-x_0^2}$,

$$I+J=a^2\arcsin\frac{x_0}{a} \text{ rezultă}$$

$$I=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x_0}{a}+x_0\sqrt{a^2-x_0^2}\right),$$

$$J=\frac{1}{2}\left((a^2\arcsin\frac{x_0}{a}-x_0\sqrt{a^2-x_0^2}\right)$$

Integrala directă se poate face, spre exemplu, folosind schimbarea variabilei, $x=a\sin t$:

$$I=\int_0^{x_0}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\arcsin\frac{x_0}{a}}a^2\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\,\cos t)\Big|_0^{\arcsin\frac{x_0}{a}}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x_0}{a}+x_0\cdot\sqrt{a^2-x_0^2}\right).\ \text{Analog, } J.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.86. Se consideră integrala

$$I(a)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x\,\mathrm{tg}\,a+1}, \quad \text{unde } a\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right].$$

1) Să se arate, fără a calcula integrala, că $I(a)$ este o funcție monoton descrescătoare de a.

2) Să se calculeze integrala pentru $a\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ și să se stabilească continuitatea lui $I(a)$ în punctul $a=\frac{\pi}{4}$, calculînd $\lim\limits_{\substack{a\to\frac{\pi}{4}\\ a<\frac{\pi}{4}}} I(a)$.

(*A.S.E.*, 1976)

Soluție. 1) Observăm că pentru $a\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ trinomul $x^2+2x\cdot\mathrm{tg}\,a+1>0$ (are rădăcini complexe; pentru $a=\frac{\pi}{4}$ trinomul devine $(x+1)^2$); dacă a_1, $a_2\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, arbitrare, $a_1<a_2$ rezultă $I(a_2)-I(a_1)=2(\mathrm{tg}\,a_1-\mathrm{tg}\,a_2)\int_0^1\frac{x\,dx}{(x^2+2x\,\mathrm{tg}\,a_1+1)(x^2+2x\,\mathrm{tg}\,a_2+1)}$.

Funcția de sub integrală este pozitivă, deci și integrala pe $[0,1]$ este pozitivă; funcția tangentă fiind crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ rezultă $I(a_2)-I(a_1)<0$.

2) Valoarea în $a=\frac{\pi}{4}$, $I\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}$.

Deoarece $I(a)=\int_0^1\frac{dx}{(x+\mathrm{tg}\,a)^2+1-\mathrm{tg}^2\,a}=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\,a}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\mathrm{tg}\,a}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\,a}}\Big|_0^1=$

$=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\,a}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\,a}}{1+\mathrm{tg}\,a}$ pentru $a\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, rezultă

$$\lim_{\substack{a\to\frac{\pi}{4}\\ a<\frac{\pi}{4}}} I(a)=\lim_{\substack{a\to\frac{\pi}{4}\\ a<\frac{\pi}{4}}}\frac{\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\,a}}{1+\mathrm{tg}\,a}}{\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\,a}}{1+\mathrm{tg}\,a}}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,a}=\frac{1}{2}$$

și în concluzie $I(a)$ este continuă (la stînga) în $a=\frac{\pi}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.87. 1) Să se determine funcţiile $f: R \to R$ care satisfac relaţia:

$$\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt - 1 = \frac{f(x)}{x^2} - \frac{f'(x)}{x}.$$

2) Să se determine constantele de integrare astfel încît f să satisfacă şi relaţia $\int_0^{\pi} f(t)dt = \pi$.

(Universitatea Galaţi, 1977)

Soluţie. 1) Observăm că integrala din prima relaţie este improprie dacă $f(0) \neq 0$. Dacă considerăm o nouă funcţie cu valorile $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pentru $x \neq 0$, $g(x) = \text{const.}$ pentru $x = 0$, atunci prima relaţie devine $\int_0^x g(t)dt - 1 = -g'(x)$; reţinem că $g'(0) = 1$.

Dacă $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, atunci $G'(x) = g(x)$ (rezultă, dacă spre exemplu se porneşte de la definiţia derivatei şi se foloseşte o formulă de medie pentru integrală). Prima relaţie devine o ecuaţie diferenţială, $g''(x) + g(x) = 0$ cu soluţia generală $g(x) = A \cos x + B \sin x$, sau $f(x) = x(A \cos x + B \sin x)$.

2) Integrînd în a doua relaţie, rezultă:

$$\int_0^{\pi} x(A \cos x + B \sin x)dx = \pi, \text{ sau } \pi B - 2A = \pi.$$

Din $g(x) = \frac{f(x)}{x} = A \cos x + B \sin x$ rezultă că $g'(x) = -A \sin x + B \cos x$, iar $g'(0) = 1$ conduce la $B = 1$ şi deci $A = 0$. În concluzie, $f(x) = x \sin x$.

2.88. Fie $f: R \to R$ o funcţie reală, continuă în x_0 şi R^+ mulţimea numerelor reale strict pozitive.

1) Să se arate că există o funcţie $g: R^+ \to R^+$ depinzînd de f şi x_0 aşa încît următoarea condiţie să fie îndeplinită: „pentru orice $\xi \in R^+$ avem $|f(x_0+h) - f(x_0)| < \xi$ de îndată ce $|h| < g(\xi)$".

2) Este funcţia g unic determinată de f şi x_0?

3) Există funcţii f şi puncte x_0 pentru care funcţia g este constantă?

4) Există funcţii f şi puncte x_0 pentru care g este identitatea pe R^+?

(Facultatea de matematică, Bucureşti, 1975)

Soluţie. 1) Se ştie că $f: R \to R$ este continuă în x_0 dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi $x \in R$ cu $|x - x_0| < \delta$ să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Punem $x = x_0 + h$, $\varepsilon = \xi$ şi fiecărui ξ îi asociem un singur $\delta(\xi)$ din cei posibili; în acest fel se defineşte o funcţie $\xi \to \delta(\xi)$, adică $g: R^+ \to R^+$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Funcția g nu este unic determinată de f și de x_0. Într-adevăr, se constată că g și αg, $\alpha \neq 0$, joacă același rol.

3) Fie $f(x)=c$, $\forall x \in R$. În acest caz putem lua $g(\xi)=1$, $\forall \xi \in R^+$.

4) Fie $f(x)=x+k$, $\forall x \in R$. În acest caz putem lua $g(\xi)=\xi$, $\forall \xi \in R^+$.

2.89. Fie $f, g : I \to R$ două funcții derivabile.

1) Punînd $g=f\cdot\varphi$, unde $\varphi : I \to R-\{-1\}$, să se arate că relația $f^3+g^3=3\cdot fg$ este echivalentă cu

$$f=\frac{3\varphi}{1+\varphi^3},\quad g=\frac{3\varphi^2}{1+\varphi^3}.$$

2) Să se arate că relațiile $f'g-2fg'=0$, $f^3+g^3=3fg$ implică $f=\frac{3c}{1+c^3}$, $g=\frac{3c^2}{1+c^3}$, unde $c=\text{const.}$

3) Să se arate că relațiile $f'g-2fg'=\frac{9}{2}$, $f^3+g^3=3fg$ implică $f(t)=3\sqrt[3]{(t+c)(1-\sqrt{t+c})}$, $g(t)=3\sqrt[3]{\sqrt{t+c}(1-\sqrt{t+c})^2}$ sau $f(t)=3\sqrt[3]{(t+c)(1+\sqrt{t+c})}$, $g(t)=-3\sqrt[3]{\sqrt{t+c}(1+\sqrt{t+c})^2}$, unde $c=\text{const.}$, $t+c>0$ pentru $t\in I$.

(I. P. Iași. 1971)

Soluție. 1) Dacă $f=\frac{3\varphi}{1+\varphi^3}$, $g=\frac{3\varphi^2}{1+\varphi^3}$, atunci prin calcul direct găsim $f^3+g^3=3fg$. Invers, din $f^3+g^3=3fg$, $g=f\varphi$ găsim $f^3(1+\varphi^3)=3f^2\varphi$, adică $f=0$, $g=0$ sau $f=\frac{3\varphi}{1+\varphi^3}$, $g=\frac{3\varphi^2}{1+\varphi^3}$.

2) Deoarece $f=\frac{3\varphi}{1+\varphi^3}$, $g=\frac{3\varphi^2}{1+\varphi^3}$ și φ este derivabilă exceptînd eventual punctele în care f se anulează, găsim $f'=\frac{3(1-2\varphi^3)}{(1+\varphi^3)^2}\varphi'$, $g'=\frac{3\varphi(2-\varphi^3)}{(1+\varphi^3)^2}\varphi'$ iar ecuația $f'g-2fg'=0$ implică $\varphi'=0$, adică $\varphi=\text{const.}$

3) Înlocuind pe f' și g' în ecuația $f'g-2fg'=\frac{9}{2}$ găsim $\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{(1+\varphi^3)^3}{6\varphi^2}$ sau $-\frac{6\varphi^2}{(1+\varphi^3)^3}d\varphi=+dt$, adică $\frac{1}{(1+\varphi^3)^2}=t+c$. De aici se găsește φ și apoi f și g.

2.90. Fie $f : R \to R$ o funcție reală cu valori reale și $G(f)=\{(x, f(x))/x\in R\}\subset R^2$ graficul său. Considerăm aplicația $u : R^2 \to R^2$, a planului real R^2 în el însuși, dată prin relația $u(x, y)=(2x+1, 3x+4y+5)$, $(x, y)\in R^2$.

1) Să se arate că imaginea $u(G(f))$ este graficul unei funcții $g : R \to R$.

2) Să se arate că dacă f este derivabilă, atunci și g este derivabilă.

3) Să presupunem că f este dată prin $f(x)=\sin x$, $x\in R$. Să se determine $g'(1)$.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1973)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1) Imaginea $u(G(f))$ înseamnă mulțimea elementelor $u(x, f(x))=(2x+1, 3x+4f(x)+5)=(X, Y)$, $x\in R$. Rezultă $X=2x+1$, $Y=3x+4f(x)+5$, $x\in R$ și deci $Y=\frac{3}{2}(X-1)+4f\left(\frac{X-1}{2}\right)+5$, $X\in R$. Aceasta este o funcție $g: R\to R$.

2) Dacă $f: R\to R$ este derivabilă, atunci avem $\frac{dY}{dX}=\frac{3}{2}+4f'\left(\frac{X-1}{2}\right)\frac{1}{2}=$ $=\frac{3}{2}+2f'\left(\frac{X-1}{2}\right)$, adică g este derivabilă.

3) Pentru $f(x)=\sin x$ găsim $Y=\frac{3}{2}(X-1)+4\sin\frac{X-1}{2}+5$. De aceea $\frac{dY}{dX}(1)=g'(1)=\frac{7}{2}$.

2.91. Să se arate că orice funcție continuă $f: [0, \infty)\to R$ care verifică condiția $f(x^2)=f(x)$, $\forall x\geqslant 0$, este o constantă.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1972)

Soluție. Ipoteza $f(x^2)=f(x)$ implică $f(x)=f(x^{1/2^n})$, $n\in N$. Ținînd seama că f este continuă pentru $x>0$ găsim $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x^{1/2^n})=f(\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/2^n})=$ $=f(1)$. Astfel

$$f(x)=\begin{cases} f(0), & x=0,\\ f(1), & x>0.\end{cases}$$

Pe de altă parte, continuitatea lui f în $x=0$ (la dreapta) impune $f(0)=$ $=f(1)$. De aceea $f(x)=f(0)$, $\forall x\in[0, \infty)$.

2.92. Să se arate că orice funcție $f: R\to R$ derivabilă, cu derivata continuă, care verifică condiția $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in R$, este de forma $f(x)=e^{ax}$, unde $a\in R$, sau $f=0$.

(Facultatea de matematică-mecanică, Bucureș[illegible], 1972)

Soluție. Evident, funcția $f=0$ verifică ipotezele problemei.

Presupunem $f\neq 0$. Relația $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ implică $f(x)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2>0$ De aceea există o funcție $g: R\to R$, derivabilă, cu derivata continuă, astfel încît $f(x)=e^{g(x)}$ și $g(x+y)=g(x)+g(y)$. Formula lui Lagrange arată că $g(y)=$ $=g(x+y)-g(x)=g'(\xi)y$. Acestea implică $g(0)=0$ și $g'(x)=g'(0)=a$ (const.), adică $g(x)=ax$, c.c.t.d.

2.93. Fie $f: [0, \infty)\to R$ derivabilă, astfel ca $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ și $f'(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[0, \infty)$. Să se arate că f este identic nulă.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1971)

Soluție. Funcția f este continuă pe $[0, \infty)$ deoarece este derivabilă. De aceea pe orice subinterval $[0, x]$ se poate aplica teorema lui Lagrange, $f(x)-f(0)=(x-0)f'(y)$, adică $f(x)=xf'(y)$, unde $y\in(0, x)$.

Observăm însă că $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ impune $f'(y)=0$.

Dacă derivata este nulă numai în unele puncte discrete, iar în rest este pozitivă (zerourile lui f' sînt puncte de inflexiune), atunci f ar fi crescătoare ceea ce contrazice ipoteza $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

Analog se arată că f' nu poate fi nulă numai pe un subinterval din $[0, \infty)$.

Rămîne că $f'(x)=0$, $\forall x\in(0, \infty)$ și deci $f(x)=c$, $\forall x\in(0, \infty)$. Dar continuitatea lui f și $f(0)=0$ impune $c=0$.

2.94. Fie $\mathscr{F}$ mulțimea funcțiilor reale, mărginite pe segmentul $[a, b]$, $\mathscr{C}$ mulțimea funcțiilor continue pe $[a, b]$, $\mathscr{D}$ mulțimea funcțiilor derivabile pe $[a, b]$. În ce relație se află aceste mulțimi?

(Universitatea Timișoara, 1976)

Soluție. Dacă $f\in\mathscr{C}$, atunci $f\in\mathscr{F}$ (teorema: o funcție continuă pe o mulțime compactă este mărginită pe această mulțime). Deoarece implicația inversă nu este adevărată (exemplu: dacă f are pe $[a, b]$ discontinuități cu salt finit, f este mărginită, dar nu este continuă pe $[a, b]$), rămîne că $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$.

Dacă $f\in\mathscr{D}$, atunci $f\in\mathscr{C}$ (teorema: O funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct; cu extindere la interval). Implicația inversă nu este adevărată (într-un punct de continuitate derivatele laterale pot fi diferite; cazul punctelor unghiulare); deci $\mathscr{D}\subset\mathscr{C}$. În concluzie, $\mathscr{D}\subset\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$.

2.95. Fie $I=[0, 1]$ și $f: I\times I\to R$ funcția definită prin $f(x, y)=(x-y)^2$. Vom asocia acestei funcții alte două funcții m_f, M_f, definite pe I cu valori reale, în modul următor:

$$m_f(y)=\min_{x\in I} f(x, y),\quad M_f(x)=\max_{y\in I} f(x, y).$$

1) Să se decidă dacă funcțiile m_f, M_f sînt derivabile în toate punctele lui I.

2) Să se determine numerele: $\max_{y\in I} m_f(y)$, $\min_{x\in I} M_f(x)$. Să se comenteze rezultatul.

3) Dacă U și V sînt două mulțimi finite și dacă $g: U\times V\to R$ este o funcție cu valori reale, care este legătura dintre numerele

$$\max_{v\in V}(\min_{u\in U} g(u, v)),\quad \min_{u\in U}(\max_{v\in V} g(u, v))?$$

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1973)

Soluție. 1) Deoarece $f(x, y)=f(y, x)=(x-y)^2$ este un trinom în x (sau în y), avem $m_f(y)=\min_{x\in I} f(x, y)=f(y, y)=0$ și $M_f(x)=\max_{y\in I} f(x, y)=\max\{f(x, 1)=(x-1)^2, f(x, 0)=x^2\}=\begin{cases}(x-1)^2, & x\in[0, 1/2]\\ x^2, & x\in(1/2, 1]\end{cases}$. Evident, m_f este derivabilă pe I.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru M_f avem $M_f'(x)=\begin{cases}2(x-1), & x\in[0,\ 1/2)\\ 2x, & x\in(1/2,\ 1]\end{cases}$ și $M_f'(1/2-0)=-1$, $M_f'(1/2+0)=1$. De aceea M_f nu este derivabilă pe I.

2) Utilizînd expresiile explicite ale lui m_f și M_f găsim $\max\limits_{y\in I} m_f(y)=0$, $\min\limits_{x\in I} M_f(x)=M_f(1/2)=\frac{1}{4}$.

Deoarece $f(x, y)=f(y, x)$, $\forall x, y\in I$, era de aşteptat ca $\max\limits_{y\in I}\min\limits_{x\in I} f(x, y)\leqslant \min\limits_{x\in I}\max\limits_{y\in I} f(x, y)$.

3) Dacă U și V sînt mulțimi finite, atunci $U\times V$ este finită și deci imaginea $g(U\times V)$ este finită. Avem $\min\limits_{u} g(u, v)\leqslant g(u, v)\leqslant \max\limits_{v} g(u, v)$ și deci $\max\limits_{v}\min\limits_{u} g(u, v)\leqslant \min\limits_{u}\max\limits_{v} g(u, v)$.

§ 2. GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE

GEOMETRIE PLANĂ

2.96. Pe o dreaptă d_1 se dau două puncte A şi B, iar pe o paralelă d_2 la aceasta se dau punctele C şi D. Dreptele AD şi BC se intersectează în M, iar dreptele AC şi BD se intersectează în P. Cunoscînd $AB=a$, $CD=b(a>b)$ şi distanţa h dintre d_1 şi d_2, să se calculeze distanţele de la punctele M şi P la dreapta d_1.

(I. P. Bucureşti, 1977)

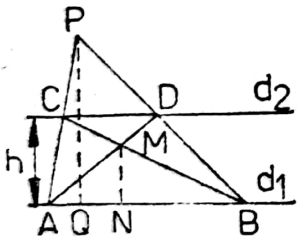


Fig. 36.

Soluţie. (fig. 36). Din asemănarea triunghiurilor CMD şi AMB, rezultă $\frac{MN}{h-MN}=\frac{a}{h}$ şi deci $MN=\frac{ah}{a+b}$. Analog, din asemănarea triunghiurilor APB şi CPD găsim $\frac{PQ}{PQ-h}=\frac{a}{b}$, adică $PQ=\frac{ah}{a-b}$.

2.97. Să se calculeze catetele unui triunghi dreptunghic ştiind că ipotenuza sa este de 15 cm, iar raza cercului înscris $r=3$ cm.

(I. P. Bucureşti, 1977)

Soluţie. Notăm ipotenuza cu a, catetele cu b şi c, aria cu S şi semiperimetrul cu p. Avem $b^2+c^2=a^2$, $S=rp=\frac{1}{2}bc$. Rezultă sistemul simetric $b^2+c^2=225$, $bc=3(15+b+c)$ care are soluţiile $(b=9,\ c=12)$ sau $(b=12,\ c=9)$.

Scanned with OKEN Scanner

2.98. Se dă un triunghi ABC, dreptunghic în A. Fie D piciorul înălțimii din A. Să se arate că $AD>AB+AC-BC$.

(I. P. București, 1975)

Soluție. $AD>AB+AC-BC\Rightarrow AD+BC>AB+AC\Rightarrow(AD+BC)^2>$ $>(AB+AC)^2$ (deoarece $AB^2+AC^2=BC^2$, $AB\cdot AC=BC\cdot AD$), $AD^2>0\Rightarrow$ $\Rightarrow AD>0$, inegalitate evidentă.

2.99. Pe latura BC a unui triunghi isoscel ABC $(AB=AC)$ se consideră două puncte P și Q, astfel încît $P\in MB$, $Q\in MC$ (M mijlocul lui BC). Paralelele duse prin P și Q la AM intersectează laturile AB și AC respectiv în P' și Q'. Să se arate că dacă P este mobil, iar lungimea segmentului PQ este constantă, atunci aria trapezului $PQQ'P'$ este constantă.

(I. P. București, 1976)

Soluție. (fig. 37). Deoarece aria $PQQ'P'=\frac{1}{2}(PP'+QQ')\cdot$ $\cdot PQ$, problema se reduce la a demonstra că $PP'+QQ'=$ const. Fie P_1 o altă poziție a lui P. Deoarece $PQ=P_1Q_1=$ const., rezultă $PP_1=QQ_1$. Ducînd $P'E\parallel PP_1$, $Q_1'F\parallel QQ_1$ rezultă $\Delta P_1'EP'=\Delta Q_1'FQ'$ și deci $EP_1'=FQ'$. Astfel $Q_1Q_1'+$ $+P_1P_1'=Q_1Q_1'+P_1E+EP_1'=Q_1'Q_1+PP'+FQ'=QF+PP'+$ $+FQ'=QQ'+PP'$.

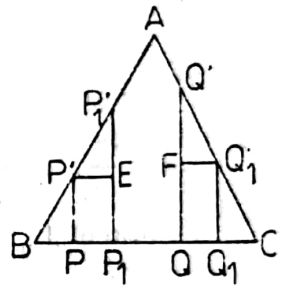


Fig. 37.

Observație. Aria unui trapez are expresia $\mathscr{A}=\frac{(B+b)h}{2}$, unde B = baza mare, b = baza mică și h = înălțimea. De aceea, dacă h = const., atunci $\mathscr{A}$ = const$\Leftrightarrow B+b$ = const.; dacă $B+$ $+b$=const., atunci $\mathscr{A}$=const$\Leftrightarrow h$ = const. Desigur, $\mathscr{A}$ poate să fie o constantă fără ca factorii $B+b$ și h să fie constanți.

2.100. Printr-un punct D situat pe baza BC a unui triunghi ABC se duce o paralelă la mediana AM. Această paralelă întîlnește laturile AB și AC sau prelungirile lor în punctele E, respectiv F. Să se arate că

$$\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}\text{ și }DE+DF=\text{const.}$$

(I. P. Iași, 1972)

Soluție. (fig. 38). Deoarece $AM\parallel ED$ rezultă $\frac{AE}{AB}=\frac{MD}{MB}$. Analog, $AM\parallel FD$ implică $\frac{AF}{AC}=\frac{MD}{MC}$. Ținînd acum seama că $BM=MC$ (AM=mediană), găsim $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$.

Observăm că $\Delta ABM\sim\Delta BED$ și astfel $\frac{AM}{DE}=\frac{BM}{BD}$. Pe de altă

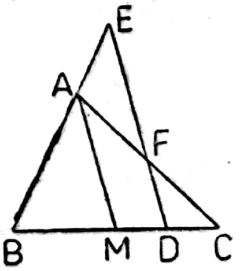


Fig. 38.

parte $\Delta DFC \sim \Delta AMC$ şi deci $\frac{DF}{AM}=\frac{CD}{CM}$. Din ultimele două egalităţi obţinem

$$DE+DF=\frac{AM\cdot BD}{BM}+\frac{CD\cdot AM}{CM}=\frac{AM(BD+DC)}{BM}=2AM=\text{const.}$$

2.101. Se dă un triunghi ABC cu laturile $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, şi un punct P pe BC, astfel ca $BP=kPC$.

1) Să se arate că segmentul AP este de forma

$$AP=\frac{1}{1+k}\cdot\sqrt{(1+k)(c^2+kb^2)-a^2k}.$$

2) Să se determine k astfel ca AP să fie înălţime în ΔABC.

3) Să se precizeze valorile lui k pentru care AP devine mediană, respectiv bisectoare.

(Institutul de construcţii, Bucureşti, 1971)

Soluţie. 1) Deoarece $\frac{BP}{PC}=k$ şi $BP+PC=a$ găsim $BP=\frac{ak}{1+k}$, $PC=\frac{a}{1+k}$. Relaţia lui Stewart, $c^2\cdot PC-AP^2\cdot a+b^2\cdot BP=a\cdot BP\cdot PC$ ne conduce la $AP^2=\frac{c^2+b^2k}{1+k}-\frac{a^2k}{(1+k)^2}$, adică $AP=\frac{1}{1+k}\sqrt{(1+k)(c^2+kb^2)-a^2k}$.

2) Condiţia $AP\perp BC$ este echivalentă cu $AP^2=c^2-BP^2=b^2-PC^2$. Rezultă $c^2-b^2=(BP+PC)(BP-PC)=a^2\frac{k-1}{k+1}$ şi deci $k=\frac{a^2-b^2+c^2}{a^2-c^2+b^2}$.

3) Pentru $k=1$ segmentul AP este mediană, $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$; $l_a=\frac{b}{b+c}\sqrt{\frac{c[(b+c)^2-a^2]}{b}}$ este lungimea bisectoarei AP şi corespunde valorii

$$k=\frac{c}{b}.$$

2.102. Pe laturile BC, CA şi AB ale unui triunghi oarecare ABC de arie S se consideră punctele A', B' şi C' (A' între B şi C, B' între C şi A, C' între A şi B) astfel încît $BA'=kBC$, $CB'=kCA$, $AC'=kAB$, $(0<k<1)$. Să se calculeze aria S' a triunghiului $A'B'C'$ în funcţie de S şi k.

(I. P. Bucureşti, 1976)

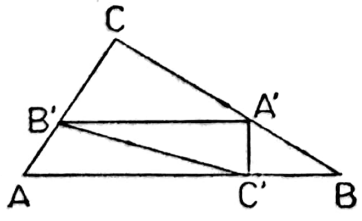


Fig. 39.

Soluţie. Deoarece $BA'=ka$, $CA'=(1-k)a$, $CB'=kb$, $AB'=(1-k)b$, $AC'=kc$, $BC'=(1-k)c$, găsim aria $(AB'C')=\frac{1}{2}\cdot AB'\cdot AC'\sin A=\frac{1}{2}(1-k)bkc\sin A=k(1-k)S$, aria $(BC'A')=\frac{1}{2}BC'\cdot BA'\sin B=$

$= \frac{1}{2}(1-k)cka = k(1-k)S$, aria $(CA'B') = \frac{1}{2} CA' \cdot CB' = \frac{1}{2}(1-k)akb =$
$= k(1-k)S$ (fig. 39).

Cu aceasta deducem $S' = S - \text{aria}\,(AB'C') - \text{aria}\,(BC'A') - \text{aria}\,(CA'B') =$
$= S - 3k(1-k)S = (1-3k+3k^2)S$.

2.103. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc pătratele $ABDE$ și $ACFG$ (D și F fiind vîrfuri opuse ale lui A). Să se arate că segmentul EG este perpendicular pe mediana (triunghiului) ce pleacă din A, iar lungimea lui este dublul lungimii medianei considerate.

(Facultatea de matematică-mecanică. București, 1970)

Soluție. (fig. 40). Din B ducem o paralelă la AC, iar din C ducem o paralelă la AB. Se formează paralelogramul $ABNC$. Cu acestea găsim $AB = EA$, $AG = AC = BN$ și $\sphericalangle EAG = 180° - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBN = \sphericalangle ABN$. De aceea $\Delta EAG = \Delta ABN$. Rezultă $EG = AN$ și astfel $EG = 2AM$.

Mai departe observăm că $\sphericalangle LEA + \sphericalangle LAE = \sphericalangle BAN + \sphericalangle LAE = 180° - \sphericalangle BAE = 90°$, adică dreptele EG și AM sînt perpendiculare.

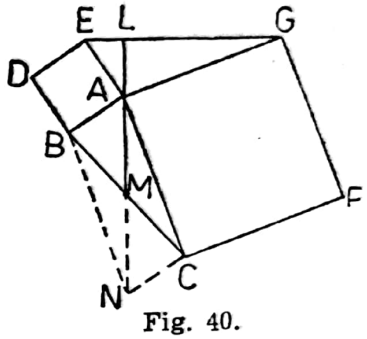


Fig. 40.

2.104. Se consideră triunghiul ABC și fie M un punct oarecare din interiorul său.

1) Dacă A', B', C' sînt simetricele punctului M față de laturile BC, CA, AB, să se arate că $MA' + MB' + MC' < 2(AB + BC + CA)$.

2) Fie D, E, F punctele în care dreptele AM, BM, CM intersectează respectiv laturile BC, CA, AB. Să se demonstreze că

$$\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = 1.$$

(Facultatea de matematică-informatică, Brașov, 1972)

Soluție. (fig. 41). 1) Fie $\{P\} = A'M \cap BC$. Deoarece $A'M \perp BC$, avem $MP < MC$ și $MP < MB$. Dar $MP = PA'$; astfel $MA' = MP + PA' < MC + MB$.

Analog $MB' < MC + MA$ și $MC' < MA + MB$.

De aceea $MA' + MB' + MC' < (MB + MC) + (MA + MC) + (MA + MB) <$ (se ține seamă de proprietatea liniilor frînte care unesc două puncte), $(AB + AC) + (BA + BC) + (CA + CB) = 2(AB + BC + CA)$.

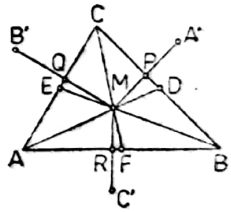


Fig. 41.

2) Fie α unghiul dintre dreapta AD și dreapta BC. Analog introducem pe β și γ. Avem

$$\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = \frac{BC \cdot MD \sin\alpha}{BC \cdot AD \sin\alpha} + \frac{AC \cdot ME \sin\beta}{AC \cdot BE \sin\beta} + \frac{AB \cdot MF \sin\gamma}{AB \cdot CF \sin\gamma} =$$

$$= \frac{2\,\text{aria}(MBC) + 2\,\text{aria}(MCA) + 2\,\text{aria}(MAB)}{2\,\text{aria}(ABC)} = 1.$$

2.105. Se consideră un pătrat $ABCD$ de arie S. Pe laturile AB, BC, CD, DA se iau respectiv punctele M, N, P, Q astfel încît $AM=BN=CP=DQ$. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este un pătrat și să se exprime aria acestuia în funcție de S și de $\sin 2\alpha$, $\alpha=\sphericalangle AQM$.

(I. P. Bucureşti, 1976)

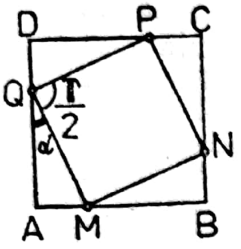


Fig. 42.

Soluţie. Triunghiurile dreptunghice AQM, BMN, CNP, DPQ sînt egale, avînd catetele respectiv egale (fig. 42). De aceea $MN=NP=PQ=QM$, adică patrulaterul $MNPQ$ este un romb. În plus, $\sphericalangle MQP=\pi-\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$, adică $MNPQ$ este un pătrat.

Fie $AM=BN=CP=DQ=x$. Deoarece $AB=CD=BC=DA=\sqrt{S}$, găsim $QA=MB=NC=PD=\sqrt{S}-x$. Apoi avem aria $MNPQ=$aria $ABCD-4$ aria $AMQ=S-4\cdot\frac{x(\sqrt{S}-x)}{2}$. Pe de altă parte $\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{\sqrt{S}-x}$ și deci $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2x(\sqrt{S}-x)}{S-2x(\sqrt{S}-x)}$. De aici deducem $2x(\sqrt{S}-x)=\frac{S\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$ și astfel aria $MNPQ=\frac{S}{1+\sin 2\alpha}$.

Precizare. Deoarece $\alpha\in(0,\pi/2)$ avem $0<\sin 2\alpha\leqslant 1$ și deci $1<1+\sin 2\alpha\leqslant 2$. De aceea $\frac{S}{2}<$aria $MNPQ\leqslant S$.

2.106. Într-un dreptunghi $ABCD$ $(AB>BC)$ se duce diagonala AC. Fie E și F punctele de tangență cu diagonala AC ale cercurilor înscrise respectiv în triunghiurile ABC și ACD. Să se calculeze lungimea segmentului EF în funcție de laturile $AB=a$ și $BC=b$.

(I. P. Bucureşti, 1976)

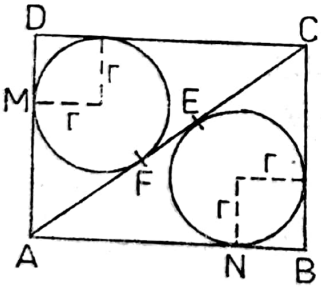


Fig. 43.

Soluţie. (fig. 43). Fie M și N punctele de tangență cu AD respectiv AB ale cercurilor date. Ținînd seamă că segmentele tangente duse dintr-un punct exterior la un cerc sînt egale, găsim

$$EF=AE-AF=AN-AM=(AB-r)-(AD-r)=$$
$$=(a-r)-(b-r)=a-b.$$

2.107. Se dă un cerc de rază R. Se consideră un paralelogram circumscris. Să se arate că

1) acest paralelogram este un romb,

2) există relația $\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BD^2}=\frac{1}{4R^2}$, AC și BD fiind diagonalele rombului.

(I. P. Cluj, 1972)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. (fig. 44). 1) Deoarece $ABCD$ este un paralelogram avem $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$. Faptul că el este circumscris cercului cu centrul în O atrage după sine egalitatea distanțelor dintre AB, DC și respectiv AD, BC.

De aceea $AB=AD$, adică $ABCD$ este un romb.

2) Avem $AC^2 \cdot BD^2 = 4(\text{aria } (ABCD))^2$ și

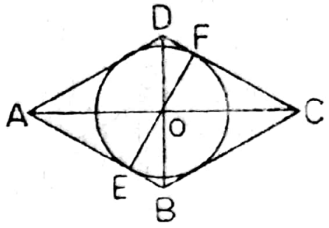


Fig. 44.

$AC^2+BD^2=4AB^2$. Astfel $\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BD^2}=\frac{AC^2+BD^2}{AC^2\cdot BD^2}=$

$$=\frac{AB^2}{(\text{aria}(ABCD))^2}=\frac{AB^2}{(AB\cdot EF)^2}=\frac{1}{EF^2}=\frac{1}{(2R)^2}=\frac{1}{4R^2}.$$

2.108. Se dă un trapez $ABCD$ în care $\sphericalangle A=\sphericalangle D=90°$, $AB=3a$, $BC=4a$, $DC=a$. Pe latura BC (între B și C) se ia punctul M astfel încît $MC=a$. Să se calculeze laturile triunghiului AMD.

(I. P. București, 1977)

Soluție. Din fig. 45 se observă că $AD^2=EC^2=BC^2-(AB-DC)^2=16a^2-4a^2=12a^2$ și deci $AD=2a\sqrt{3}$. Apoi $\sin \sphericalangle B=\frac{AD}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ne dă $\sphericalangle B=60°$. De aceea triunghiul isoscel ABM este un triunghi echilateral și astfel $AM=3a$, $\sphericalangle DAM=90°-\sphericalangle MAB=30°$. Mai mult, $\sphericalangle C=120°$ și, cum $DC=CM$, rezultă $\sphericalangle CDM=30°$. Acestea ne dau $\sphericalangle MDA=90°-\sphericalangle CDM=60°$ și deci $\frac{DM}{\sin 30°}=\frac{AM}{\sin 60°}$, adică $DM=a\sqrt{3}$.

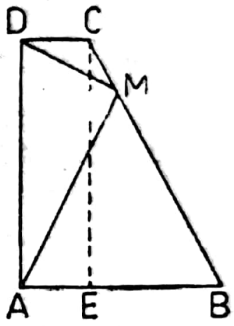


Fig. 45.

2.109. Se consideră un trapez isoscel $ABCD$ cu baza mare $AB=2a$ și baza mică $DC=2b$, în care diagonala AC este bisectoarea unghiului A. Să se exprime cu ajutorul lui a și b lungimile diagonalelor și lungimile laturilor neparalele ale trapezului. (Se presupune $a<3b$).

(I. P. București, 1976)

Soluție. (fig. 46). Prin ipoteză $AB \parallel DC$, $AD=BC$ și $\sphericalangle BAC=\sphericalangle CAD$. Rezultă $\sphericalangle CAD=\sphericalangle DCA$ și astfel triunghiul ADC este isoscel, adică $AD=CD=2b$. Fie CH înălțimea trapezului $ABCD$. Deoarece $HB=\frac{2a-2b}{2}=a-b$, găsim $CH^2=CB^2-HB^2=4b^2-(a-b)^2=2ab+3b^2-a^2$ (din ipoteza $a<3b$; rezultă că membrul drept este strict pozitiv). Din triunghiul dreptunghic ACH obținem $AC^2=AH^2+HC^2=[2a-(a-b)]^2+3b^2+2ab-a^2=4b(a+b)$.

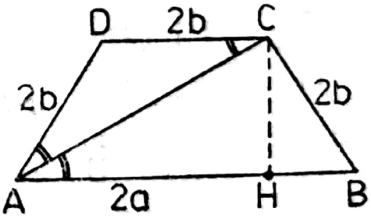


Fig. 46.

2.110. Să se calculeze raportul între aria unui romb și aria unui trapez isoscel, circumscrise aceluiași cerc, rombul și trapezul avînd unghiurile ascuțite egale cu un același unghi dat α.

(I. P. București, 1976)

Soluție. Notăm centrul cercului cu O, iar rombul cu $ABCD$. Ducînd semidiagonalele OC, OD și înălțimea OE a triunghiului OCD obținem fig. 47. Din triunghiul dreptunghic OEC găsim $CE=R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, iar din triunghiul dreptunghic OED deducem $ED=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Deoarece $OE\perp CD$, avem aria $(ABCD)=CD\cdot 2R=(CE+ED)\cdot 2R=2R^2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. Notăm trapezul cu $LMNP$, iar prin centrul O al cercului ducem segmentul QT perpendicular pe cele două baze. Unim apoi pe O cu N și cu M (fig. 48). Din triunghiul dreptunghic OQM obținem $QM=R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, iar din triunghiul dreptunghic OTN rezultă $TN=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. De aceea aria $(LMNP)=\frac{(LM+PN)\cdot 2R}{2}=R(2QM+2TN)=2R^2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

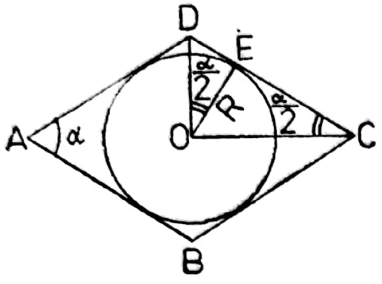


Fig. 47.

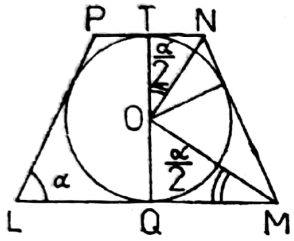


Fig. 48.

Astfel raportul cerut este 1.

2.111. Un cerc este înscris într-un trapez isoscel. Cunoscînd bazele trapezului $2a$ și $2b$ să se afle: perimetrul trapezului, aria trapezului, lungimea cercului înscris și aria triunghiului mare obținut prin prelungirea laturilor neparalele.

(I. P. Cluj, 1970)

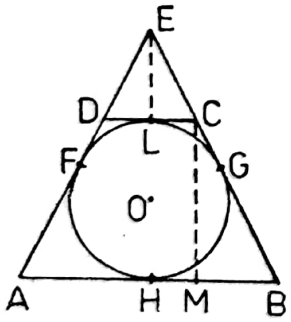


Fig. 49.

Soluție. (fig. 49). Ne bazăm pe proprietatea că tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sînt egale și pe faptul că punctele H și L sînt mijloacele bazelor. Astfel, dacă $a>b$ găsim $AF=AH=BH=BG=a$, $DF=DL=CL=CG=b$. Rezultă perimetrul $4(a+b)$.

În triunghiul dreptunghic BMC avem $BM=a-b$, $BC=a+b$. De aceea $MC=\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}=2\sqrt{ab}$.

Cu acestea găsim aria $(ABCD)=2(a+b)\sqrt{ab}$.

De asemenea raza cercului este $\sqrt{ab}$, iar lungimea sa este $2\pi\sqrt{ab}$.

Observăm că $\Delta ELC\sim\Delta CMB$. De aceea $\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=\frac{EL}{b}$, adică $EL=\frac{2b\sqrt{ab}}{a-b}$. Astfel aria $(ABE)=$aria $(ABCD)+$aria $(DCE)=2(a+b)\sqrt{ab}+\frac{2b^2\sqrt{ab}}{a-b}=\frac{2a^2\sqrt{ab}}{a-b}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.112. Se dau două cercuri O_1 și O_2 tangente exterioare. Prin punctul lor comun de tangență T se duc două drepte arbitrare ATC și DTB care taie cercul O_1 în A și D și cercul O_2 în C și B. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este un trapez.

(I. P. București, 1976)

Soluție. Fie EF tangenta comună. Observăm că $\sphericalangle TBD = \sphericalangle ETC = \sphericalangle FTA = \sphericalangle TAD$. Rezultă $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDA$ și deci $AD \| BC$, adică figura $ABCD$ este un trapez.

2.112 a. Să se construiască un trapez cunoscîndu-se una din laturile neparalele, diagonalele și unghiul format de diagonale. Să se arate că trapezul rezultă isoscel dacă și numai dacă diagonalele sînt egale.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1972)

Soluție. (fig. 50). Cu segmentele $A'D$ și DB ca laturi (egale cu diagonalele) și cu unghiul φ dintre ele construim triunghiul $A'DB$. Apoi descriem un cerc cu centrul în D și de rază egală cu latura neparalelă dată DA. Acesta intersectează pe $A'B$ în punctele A și A''. Din A se duce un segment AC paralel și egal cu $A'D$. Astfel obținem trapezul $ABCD$. Dacă în raționament am folosi punctul A'', atunci trapezul ar ieși cu bazele schimbate între ele.

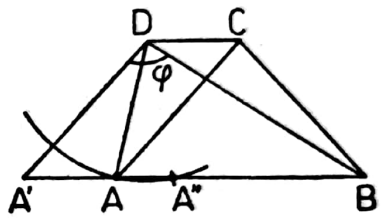


Fig. 50.

În final se observă că $ABCD$ este un trapez isoscel dacă și numai dacă $A'D = AC = BD$.

2.113. Se dă triunghiul ABC, în care $AB = R\sqrt{3}$ (R fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC) și $\sphericalangle BAC = x$.

1) Să se determine celelalte laturi și unghiuri în funcție de x și R.

2) Să se determine unghiul x pentru care este îndeplinită relația $AC^2 - BC^2 = 3R^2$.

(Institutul de construcții, București, 1973)

Soluție. (fig. 51). 1) Deoarece $AB = R\sqrt{3}$ (latura triunghiului echilateral înscris în cerc), se obține $\sphericalangle C = 60°$.

Din teorema sinusurilor

$$\frac{BC}{\sin x} = \frac{AC}{\sin B} = 2R, \text{ rezultă } BC = 2R \sin x,$$

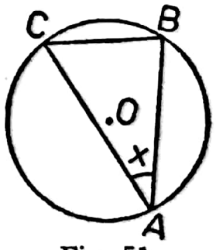


Fig. 51.

$AC = 2R \sin B = 2R \sin (180° - x - 60°) = 2R \sin (120° - x) = 2R \sin (x + 60°)$; observăm că $\sphericalangle B = 120° - x$.

2) Relația $AC^2 - BC^2 = 3R^2$ devine $AC^2 = BC^2 + AB^2$; deci ΔABC — dreptunghic în B, iar $x = 30°$.

2.114. Se consideră triunghiul ABC, avînd laturile a, b, c. Bisectoarea interioară a unghiului A taie latura BC în punctul D. Cercul cu centrul în B

Scanned with OKEN Scanner

și raza BD este intersectat de prelungirea laturii AB în E, iar cercul cu centrul în C și rază CD este intersectat de prelungirea laturii AC în F.

1) Să se calculeze lungimile tangentelor duse din A la cele două cercuri.

2) Să se arate că dreapta EF este paralelă cu BC și să se calculeze lungimea segmentului EF.

(Institutul de construcții, București, 1972)

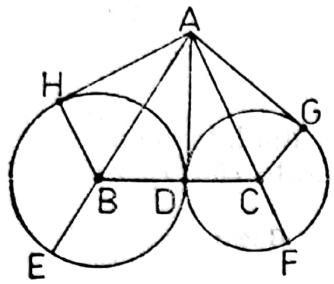


Fig. 52.

Soluție. (fig. 52). 1) Conform teoremei bisectoarei relativ la vîrful A avem $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$. Rezultă $\frac{AB+AC}{AC}=\frac{DB+DC}{DC}$ și astfel $DC=\frac{ab}{b+c}$, $DB=a-DC=\frac{ac}{b+c}$.

Pe de altă parte $HB=BD$, iar triunghiul AHB este dreptunghic. De aceea $AH=\sqrt{AB^2-HB^2}=\sqrt{c^2-\frac{a^2c^2}{(b+c)^2}}=\frac{c}{b+c}\sqrt{(b+c)^2-a^2}$.

Analog $AG=\frac{b}{b+c}\sqrt{(b+c)^2-a^2}$.

2) Observăm că $\frac{BE}{BA}=\frac{BD}{BA}=\frac{a}{b+c}$, $\frac{CF}{CA}=\frac{CD}{CA}=\frac{a}{b+c}$.

Astfel $\frac{BE}{BA}=\frac{CF}{CA}$ și conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă că $BC\|EF$.

Deoarece $BC\|EF$, triunghiurile ABC și AEF sînt asemenea, adică $\frac{BC}{EF}=\frac{BA}{EA}=\frac{CA}{FA}$. Pe de altă parte $EA=EB+BA=BD+BA=c+\frac{ac}{b+c}$. Rezultă $EF=\frac{BC\cdot EA}{BA}=\frac{a}{b+c}(a+b+c)$.

2.115. Un punct P de pe cercul circumscris triunghiului ABC se proiectează pe BC, CA, AB în L, M, N. Să se arate că $PA\cdot PL=PB\cdot PM=PC\cdot PN$.

(I. P. București, 1973)

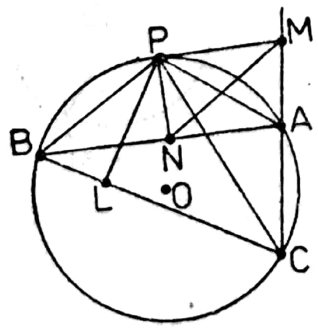


Fig. 53.

Soluție. (fig. 53). Deoarece $APBC$ este un patrulater inscriptibil avem $\sphericalangle PAM=\sphericalangle PBL$. De aceea triunghiurile MPA și PBL sînt asemenea și deci

$$\frac{PA}{PB}=\frac{PM}{PL}.$$

Deoarece și $MPNA$ este un patrulater inscriptibil (fig. 53) avem $\sphericalangle PNM=\sphericalangle PAM=\sphericalangle PBC$ și $\sphericalangle PMN=\sphericalangle PAN=\sphericalangle PAB=\sphericalangle PCB$. De aceea triunghiurile PBC și PNM sînt asemenea. Rezultă

$$\frac{PB}{PN}=\frac{PC}{PM}.$$

2.116. Fie ABC un triunghi și $A'B'C'$ picioarele înălțimilor. Să se arate că tangentele la cercul circumscris triunghiului ABC în A, B, C sînt paralele la laturile triunghiului $A'B'C'$ și că perpendicularele duse din vîrfurile A, B, C pe laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt concurente.

(I. P. București, 1973)

Soluție. (fig. 54). Patrulaterul $B'HA'C$ este inscriptibil. Astfel $\sphericalangle B'A'C = \sphericalangle B'HC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle C_1 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle A\right) =$ $= \sphericalangle A = \sphericalangle BCT$.

Rezultă că $CT \| B'A'$. Perpendiculara dusă pe $B'A'$, prin C, este perpendiculară și pe CT. De aceea această perpendiculară trece prin centrul O al cercului. Analog, celelalte perpendiculare trec tot prin O.

Cazul ortocentrului exterior se tratează similar.

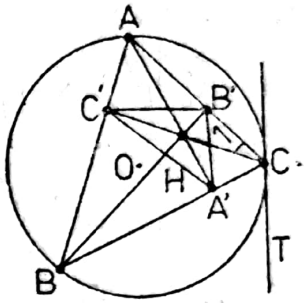


Fig. 54.

2.117. Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul de centru O și raza R cu unghiurile B și C egale respectiv cu 60° și 45°.

1) Să se arate că mijlocul I al laturii AC, centrul O și proiecția D a lui A pe BC sînt coliniare.

2) Proiectînd pe B în E pe AC, să se arate că $DE = R$.

(Facultatea de matematică, Cluj, 1970)

Soluție. (fig. 55). 1) Fie $\{D\} = OI \cap BC$. Deoarece OI este mediatoarea avem $OI \perp AC$, $AI = IC$.

Avînd în vedere și ipoteza $\sphericalangle DCI = 45°$, deducem că ΔDCI este dreptunghic isoscel și deci $IC = ID$. De aici rezultă că și ΔIAD este isoscel. Astfel $\sphericalangle IAD = 45°$ și deci $\sphericalangle BAD = 30°$, adică $\sphericalangle BDA = 90°$. Dar aceasta înseamnă că D coincide cu proiecția lui A pe BC, ceea ce probează afirmația problemei.

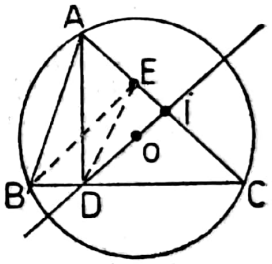


Fig. 55.

2) Din $\frac{AC}{\sin B} = 2R$ și din ipoteză găsim $AC = R\sqrt{3}$. Apoi $DC = AC \cos 45° = \frac{\sqrt{6}}{2} R$. Pe de altă parte ipoteza că $BE \perp AC$, $AD \perp BC$ implică inscriptibilitatea patrulaterului $BDEA$. Astfel $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BED = 30°$ și deci $\sphericalangle DEC = 60°$. Cu acestea și cu $\frac{DC}{\sin E} = \frac{DE}{\sin C}$ găsim $DE = R$.

2.118. Într-un triunghi ascuțitunghic ABC se notează cu A', B', C' proiecțiile vîrfurilor A, B, C pe laturile opuse. Perpendicularele duse din A' pe AB și AC taie dreapta $B'C'$ respectiv în C'' și B''. Se cere:

1) Să se arate că C'' și B'' sînt simetricele punctului A' față de AB, respectiv AC.

2) Fie M și N două puncte arbitrare pe laturile AB respectiv AC. Să se arate că perimetrul triunghiului $A'B'C'$ este mai mic decît perimetrul triunghiului $A'MN$.

3) Notăm cu I intersecția dreptelor AA' și $B''C''$. Să se arate că $IB' \cdot IC'' = IB'' \cdot IC' = IA \cdot IA'$.

(I. P. București, 1971)

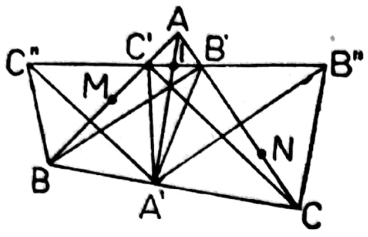


Fig. 56.

Soluție. (fig. 56). 1) Punctele B, C, B', C' se găsesc pe cercul de diametrul BC. Rezultă $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle C$; analog, $\sphericalangle BC'A' = \sphericalangle C$.

În plus, $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle C''C'B$, fiind opuse la vîrf. Astfel $\sphericalangle C''C'B = \sphericalangle BC'A'$, adică înălțimea $C'B$ este și bisectoare în $\Delta C''C'A'$. Cu alte cuvinte $C'B$ este o axă de simetrie în $\Delta C''C'A'$.

Analog se dovedește că A' și B'' sînt simetrice față de AC.

2) Datorită simetriei avem $A'C' = C''C'$, $A'M = C''M$, $A'B' = B'B''$, $A'N = NB''$. Se compară lungimea segmentului $C''B''$ cu lungimea unei linii poligonale, $A'C' + C'B' + B'A' = C''C' + C'B' + B'B'' = C''B''$,

$A'M + MN + NA' = C''M + MN + NB''$ (lungimea unei linii frînte) $\geqslant$ $\geqslant C''B''$.

3) Cercul de diametru AB trece prin A', B', C''. Segmentele AA' și $B'C''$ sînt coarde care se taie în I. De aceea $IB' \cdot IC'' = IA \cdot IA'$. Analog AA' și $C'B''$ sînt coarde, ce trec prin I, în cercul de diametru AC. Deci $IB'' \cdot IC' = IA \cdot IA'$.

2.119. AB fiind diametrul unui cerc și d o dreaptă perpendiculară pe AB, iar AM o coardă variabilă, se notează cu $\{P\}$ intersecția dintre AM și d, cu $\{Q\}$ intersecția dintre BM și d, cu $\{N\}$ intersecția dintre AQ și cerc și cu $\{C\}$ intersecția dintre AB și d.

1) Să se arate că patrulaterul $MQNP$ este inscriptibil.

2) Să se demonstreze că B, P, N sînt coliniare.

3) Să se arate că $CP \cdot CQ = \text{const.}$

(Facultatea de matematică, Craiova, 1972)

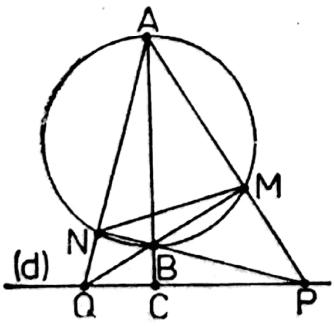


Fig. 57.

Soluție. (fig. 57). 1) Avem $\sphericalangle QMA = \sphericalangle BMA = 90° = \sphericalangle ANB$. Rezultă $\sphericalangle QNP = \sphericalangle QMP = 90°$, adică $MQNP$ este inscriptibil.

2) Avem $AC \perp QP$, $QM \perp AP$, $PN \perp AQ$, adică AC, QM, PN sînt înălțimi în triunghiul AQP; pe de altă parte înălțimile unui triunghi sînt concurente. Rezultă că $B \in NP$.

3) Se observă că $CQ^2 + CP^2 + 2CP \cdot CQ = (QC + CP)^2 = QP^2 = AQ^2 + AP^2 - 2AN \cdot AQ = AQ^2 + AP^2 - 2AB \cdot AC$.

Astfel $2CP \cdot CQ = (AQ^2 - CQ^2) + (AP^2 - CP^2) - 2AB \cdot AC = 2AC^2 - 2AB \cdot AC$, adică $CP \cdot CQ = AC \cdot BC = \text{const.}$

2.120. Se consideră un triunghi ABC dreptunghic în A și avînd cateta AC de lungime 4. Pe cateta AB se consideră punctul D la distanța 1 de A

Scanned with OKEN Scanner

și se presupune că cercul care trece prin A și D are raza de lungime $\frac{\sqrt{5}}{2}$ și este tangent la cercul circumscris triunghiului ABC.

1) Să se verifice că unul din cele două cercuri trece prin centrul celuilalt.
2) Să se calculeze aria cuprinsă între cele două cercuri.
3) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

(Facultatea de matematică, București, 1977)

Soluție (fig. 58). 1) Centrul O_1 al cercului circumscris triunghiului ABC coincide cu mijlocul ipotenuzei BC. Fie O_2 centrul cercului ce trece prin A și D; fie E proiecția lui O_2 pe AB. Deoarece cele două cercuri sînt tangente în A rezultă că punctele A, O_2, O_1 sînt coliniare.

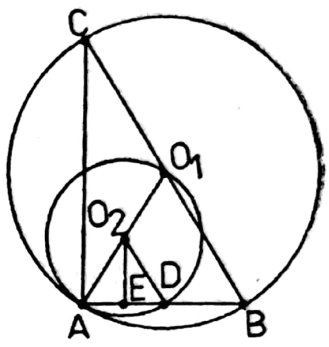


Fig. 58.

Deoarece $\measuredangle ABC = \measuredangle O_2AD$, triunghiurile dreptunghice EAO_2 și ABC sînt asemenea. De aceea $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{O_2E}$;

Pe de altă parte $AE = \frac{1}{2}$, $O_2E = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} = 1$.

De aceea $AB = 2$, $BC = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$, $O_1B = \sqrt{5} = AO_1 = 2AO_2$. Astfel AO_1 este diametru în cercul ce trece prin A și D.

2) Diferența ariilor este $\pi O_1B^2 - \pi O_2A^2 = \frac{15\pi}{4}$;

3) Aria $(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = 4$.

2.121. Se consideră două cercuri de centre O_1 și O_2 și raze R_1, respectiv R_2, tangente exterioare în punctul T. Tangenta exterioară comună AB se intersectează cu tangenta în T la cele două cercuri în punctul C, iar cu linia centrelor O_1O_2 în punctul M.

1) Să se calculeze lungimea segmentelor AB și TC în funcție de R_1 și R_2.
2) Să se arate că dreptele AT și BT sînt perpendiculare.
3) Să se calculeze lungimea segmentului MO_1 și unghiul format de O_1O_2 cu AB în cazul particular $R_1 = a$, $R_2 = 3a$.

(I. P. Iași, 1975)

Soluție (fig. 59). 1) $TC = BC = AC$ (Puterea punctului C față de O_1, O_2); deci $AB = 2TC$. Din ΔABD rezultă $AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = 2\sqrt{R_1R_2}$

$\left(\widehat{DBA} = \frac{\pi}{2},\ AD = R_1 + R_2,\ BD = R_2 - R_1\right)$.

2) $\left\{\widehat{AO_1T} + \widehat{BO_2T} = \pi,\ \widehat{ATC} = \frac{\widehat{AO_1T}}{2},\ \widehat{BTC} = \frac{\widehat{BO_2T}}{2}\right\} \to \left\{\widehat{ATB} = \frac{\pi}{2}\right\}$.

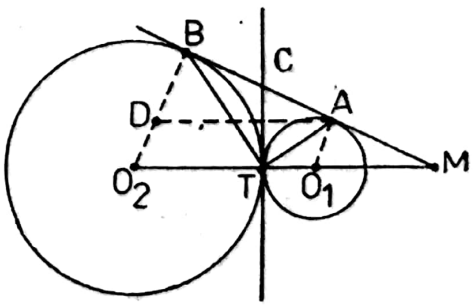


Fig. 59.

3) Din $\Delta MBO_2 \sim MAO_1$ rezultă $2=\frac{MO_2-MO_1}{MO_1}$, sau $MO_1=2a$.

În ΔAMO_1, $\sin \widehat{AMO_1}=\frac{AO_1}{O_1M}=\frac{1}{2}$, deci $\widehat{AMO_1}=\frac{\pi}{6}$.

2.122. Se dau două semidrepte perpendiculare Ox și Oy, un punct fix A pe Ox și un punct fix B pe Oy astfel încît $OA=OB=a$. Un punct P se mișcă pe segmentul OB, iar un punct P' se mișcă pe semidreapta By astfel încît $\sphericalangle OAP=\sphericalangle OP'A=\theta$, $\theta\in\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$:

1) Să se demonstreze relațiile

$$OP\cdot OP'=a^2,\ \frac{1}{AP^2}+\frac{1}{AP'^2}=\frac{1}{a^2}.$$

2) Să segăsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului APP'.

3) Să se studieze variația funcției definită prin

$$f(\theta)=\frac{AP+AP'}{OA}$$

și să se reprezinte grafic.

(I. P. București, 1971)

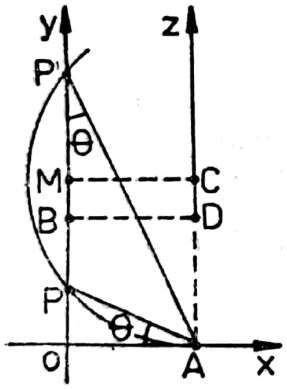


Fig. 60.

Soluție. 1) Relațiile $OP=OA\ \mathrm{tg}\,\theta$, $OP'=OA\ \mathrm{ctg}\,\theta$, $OA=a$, implică $OP\cdot OP'=OA^2=a^2$ (fig. 60). Relațiile $AP=\frac{OA}{\cos\theta}$, $AP'=\frac{OA}{\sin\theta}$, $OA=a$, implică $\frac{1}{AP^2}+\frac{1}{AP'^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{a^2}=\frac{1}{a^2}$.

2) Segmentul OA este tangent în A la cercul APP' deoarece punctele O și A sînt fixe, iar $\sphericalangle OAP=\sphericalangle OP'A=\theta$.

Dacă M este mijlocul segmentului PP', atunci centrul C al cercului APP' este punctul de intersecție al perpendicularei ridicate pe Oy în M cu perpendiculara Az ridicată în A pe Ox. Dreapta Az este fixă și $CM\leqslant CA$. Rezultă $CA\geqslant a$ și deci C aparține semidreptei Dz, unde $AD=a$.

Reciproc, fie $C\in Dz$. Prin C ducem $CM\perp Oy$ și pe Oy luăm $MP=MP'$, P fiind pe segmentul MO. Unim pe A cu P și cu P'. Segmentul OA este tangent la cercul APP' în A deoarece $CA\perp OA$. Rezultă $\sphericalangle OAP=\sphericalangle OP'A$ și deci C satisface problema.

Rezultă că locul geometric al punctului C este semidreapta Dz, unde $AD=a$.

3) Observăm că $f(\theta)=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$, $\theta\in\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. De aceea $f(\theta)>0$ $\forall\theta\in(0, \pi/4]$ și $\lim\limits_{\theta\to 0} f(\theta)=\infty$, adică $\theta=0$ este o asimptotă verticală.

Pe de altă parte avem $f'(\theta)=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(2+\sin 2\theta)}{2\sin^2\theta\cos^2\theta}<0$, $\forall\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $f'_{st}\left(\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}} f'(\theta)=0$. Acestea ne conduc la tabelul de variație

θ	0		$\pi/4$
$f'(\theta)$		$-\ -\ -$	0
$f(\theta)$	∞	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

și la graficul din fig. 61.

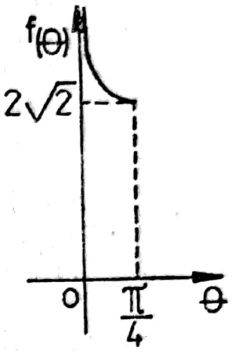


Fig. 61.

2.123. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu centrul în O, cu laturile $AB=a$, $BC=b$ (unde $AB>BC$) și se construiesc în exterior semicercurile S_1, S_2, S_3 cu diametrele respectiv BC, CD, DA. O dreaptă arbitrară dusă prin B întîlnește semicercul S_1 în M, iar paralela dusă prin D la BM întîlnește semicercul S_3 în N și semicercul S_2 în P. Se notează $\sphericalangle MBC=\alpha$.

1) Să se demonstreze că dreapta MP trece prin vîrful C al dreptunghiului.

2) Să se arate că $OM=OP$ și să se calculeze lungimea segmentului OM în funcție de laturile dreptunghiului și de unghiul α.

3) Să se găsească locul geometric al intersecției perpendicularelor duse din N și P, respectiv pe laturile AD și CD ale dreptunghiului.

(I. P. București, 1972)

Soluție (fig. 62). 1) Avem $\sphericalangle NDA=\alpha$, $\sphericalangle ADC=90°$, $\sphericalangle PDC=90°-\alpha$, $\sphericalangle DPC=90°$. De aceea $\sphericalangle PCD=\alpha$. Apoi $\sphericalangle MCB=90°-\alpha$ și deci $\sphericalangle PCM=\alpha+90°+(90°-\alpha)=180°$, adică punctele P, C și M sînt coliniare.

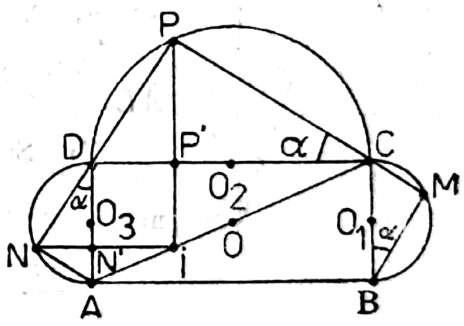


Fig. 62.

2) Observăm că $\Delta OO_1M=\Delta OO_2P$ deoarece $O_1M=OO_2=\frac{b}{2}$, $OO_1=O_2P=\frac{a}{2}$ și $\sphericalangle OO_1M=$ $=\sphericalangle OO_2P=90°+2\alpha$. Rezultă $OM=OP$.

Din triunghiul OO_1M găsim $OM^2=OO_1^2+$ $+O_1M^2-2OO_1\cdot O_1M\cos(90°+2\alpha)=\frac{a^2+b^2+2ab\sin 2\alpha}{4}$,

3) Deoarece $\sphericalangle NDA=\alpha$ rezultă $\sphericalangle PDC=90°-\alpha$ și $\sphericalangle PCD=\alpha$. Fie P' proiecția lui P pe CD și N' proiecția lui N pe DA. Punctul al cărui loc se cere este $I\equiv PP'\cap NN'$.

Dacă $N\equiv A$, atunci $I\equiv A$. Dacă N' este mijlocul lui DA, atunci P' este mijlocul lui CD și deci $I\equiv O$. Dacă $N\equiv D$, atunci $I\equiv C$. Să arătăm că I aparține segmentului AC, adică dreptele PP' și NN' se taie pe AC. Fie $I\equiv AC\cap$ $\cap PP'$ și $I'\equiv AC\cap NN'$. Avem

$$\frac{IA}{IC}=\frac{P'D}{P'C}=\left(\frac{PD}{PC}\right)^2=\operatorname{tg}^2\alpha,$$

$$\frac{IA}{I'C}=\frac{N'A}{N'D}=\left(\frac{NA}{ND}\right)^2=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Rezultă $\frac{I'A}{I'C}=\frac{IA}{IC}$, adică $I'\equiv I\in AC$.

Reciproc, fie $I\in AC$. Prin I ducem $IN\perp AD$, $IP\perp DC$. Unim pe N cu P şi pe C cu P. Dreapta PC taie cercul S_1 în M. Unim pe M cu B. Găsim $\sphericalangle MBC=\sphericalangle NDA$ şi deci I convine problemei.

Rezultă că locul lui I este diagonala AC.

2.124. Pe diagonala BD a pătratului $ABCD$ se consideră punctul variabil M. Perpendiculara în M pe AM taie latura CD în E, iar latura CB în F.

1) Să se arate că $ME=MA$ şi $AE=AF$.

2) Să se calculeze laturile triunghiului AME în funcţie de latura l a pătratului şi de unghiul $\alpha=\sphericalangle BAM$.

3) În ipoteza că α este rădăcina ecuaţiei

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$$

din intervalul $(\pi/6,\ \pi/3)$, să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea triunghiului AME în jurul dreptei AB.

(Facult. de fizică, Timişoara, 1971)

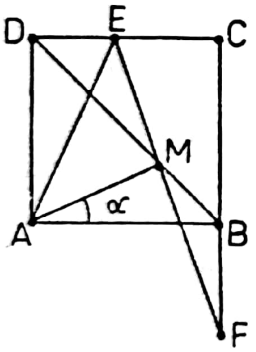


Fig. 63.

Soluţie (fig. 63). 1) Deoarece $\sphericalangle EDA=\sphericalangle EMA=\frac{\pi}{2}$, patrulaterul $EDAM$ este inscriptibil. De aceea $\sphericalangle EAM=\sphericalangle EDM=\frac{\pi}{4}$, $\sphericalangle MEA=\sphericalangle MDA=\frac{\pi}{4}$ şi deci $ME=MA$.

Analog $MF=MA$ şi din $AM\perp EF$, $MF=ME$ deducem $AE=AF$.

2) Se observă că $\sphericalangle DAE=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\pi}{4}-\alpha$. De aceea $AE=\frac{l}{\cos\sphericalangle DAE}=\frac{2l}{\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)}$ şi $MA=ME=\frac{AE}{\sqrt{2}}=\frac{l}{(\cos\alpha+\sin\alpha)}$.

3) Ecuaţia echivalentă este $\sin 2\alpha\cdot\sin\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=0$ şi are soluţia $\alpha=\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$. Aceasta înseamnă că M este centrul pătratului, iar E se confundă cu D. De aceea volumul cerut este $V=\frac{\pi}{3}AB\cdot AD^2-2\frac{\pi}{3}\cdot\frac{AB}{2}\cdot\left(\frac{AD}{2}\right)^2=\frac{\pi l^3}{4}$.

Observaţie. Deoarece $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, se satisface relaţia $1\leqslant\cos\alpha+\sin\alpha\leqslant\sqrt{2}$ şi deci $AE\geqslant l$.

Scanned with OKEN Scanner

2.125. Se consideră patru puncte A, B, C și M situate, în această ordine, pe un cerc. Fie D mijlocul segmentului MB. O paralelă prin D la MC taie pe AM în P și pe BC în Q. Să se determine locul geometric al punctului P în ipoteza că punctele A, B și C sînt fixe, iar M este mobil pe arcul AC.

(I. P. București, 1977)

Soluție. Fie M_0 poziția lui M pentru care $P \equiv A$ (fig. 65). Evident Q este fix și $PQ \parallel MC$. De aceea $\sphericalangle APQ = \sphericalangle AMC$ (fig. 64) sau $\sphericalangle APQ = 180° - \sphericalangle AMC$ (fig. 66), adică

$$\sphericalangle APQ = \begin{cases} \text{măs}\,\dfrac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{2}, & M \in CM_0, \\ 180° - \text{măs}\,\dfrac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{2}, & M \in \overset{\frown}{M_0A}. \end{cases}$$

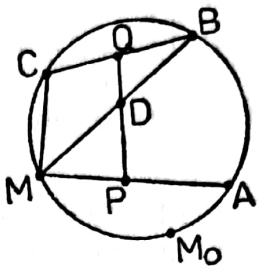


Fig. 64.

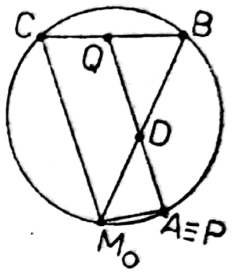


Fig. 65.

Deoarece $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\text{const.}$, rezultă că P aparține unui arc de cerc.

Fie $\{P_0\}$ intersecția lui AC cu paralela dusă prin Q la tangenta în C la cerc și $\{P_1\}$ intersecția tangentei în A la cerc cu paralela dusă prin Q la AC. Dacă $M \equiv C$, atunci $P \equiv P_0$, iar dacă $M \equiv A$, atunci $P \equiv P_1$. Astfel P aparține arcului de cerc cu extremitățile P_0 și P_1 din fig. 67.

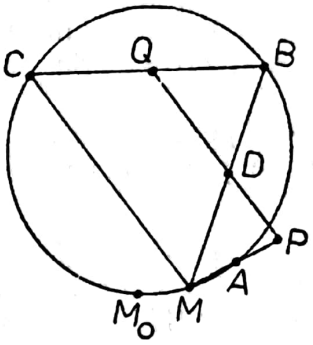


Fig. 66.

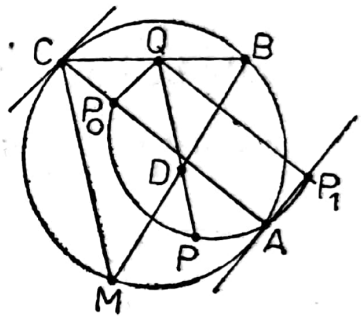


Fig. 67.

Reciproc, $P \in \overset{\frown}{P_0P_1}$ implică $M \in \overset{\frown}{AC}$. De aceea locul geometric căutat este arcul $\overset{\frown}{P_0P_1}$ din cercul circumscris patrulaterului AP_1QP_0.

2.126. Se consideră un triunghi ABC înscris în cercul (C) de centru O și B', respectiv C', mijloacele arcelor AC respectiv AB. Fie de asemenea I centrul cercului înscris triunghiului ABC. Se notează cu $\{O_1\}$ intersecția paralelelor duse din B', respectiv C' la OC', respectiv OB'. Să se arate că $AB' = IB'$ și $O_1A = OI$.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1971)

Soluție (fig. 68). Punctul I se află la intersecția bisectoarelor triunghiului ABC; în $\Delta AB'I$, $\sphericalangle IAB' = \frac{1}{2}(\text{măs}\,\overset{\frown}{B'C} + \text{măs}\,\overset{\frown}{CA'})$, iar $\sphericalangle AIB' = \frac{1}{2}(\text{măs}\,\overset{\frown}{AB'} + \text{măs}\,\overset{\frown}{BA'})$.

Deoarece măs $\overset{\frown}{AB'}$ = măs $\overset{\frown}{B'C}$, măs $\overset{\frown}{CA'}$ = măs $\overset{\frown}{A'B}$ rezultă că $\sphericalangle IAB' = \sphericalangle AIB'$ și deci $AB' = IB'$.

În paralelogramul $B'O_1C'O$, $OB' = OC' = R$; deci $B'O_1C'O$ este romb și $OO_1 \perp B'C'$, iar $\sphericalangle O_1B'C' = \sphericalangle C'B'O$. Avînd aceeași măsură, măs $\overset{\frown}{AC'}$ = măs $\overset{\frown}{C'B}$, rezultă că $\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle BB'C'$. Scăzînd ultimele două egalități, se obține $\sphericalangle AB'O_1 = \sphericalangle OB'I$ și deoarece $IB' = AB'$, $OB' = O_1B' = R$, rezultă că $\Delta AB'O_1 = \Delta IB'O$. În concluzie, este satisfăcută egalitatea $AO_1 = IO$.

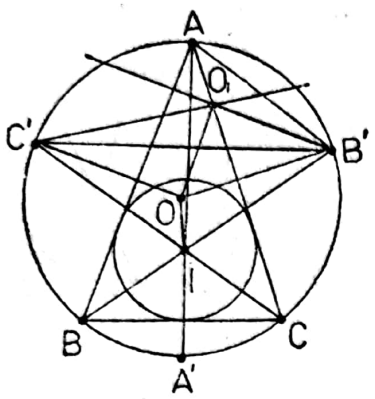


Fig. 68.

2.127. Pe cercul cu centrul O, de diametru fix $AB = 2R$, se iau punctele M și C situate de o parte și de alta a diametrului. Fie N mijlocul lui MC și P proiecția lui N pe AM.

1) Să se afle locul geometric al punctului P cînd M descrie semicercul pe care se află, punctul C fiindfix.

2) Se notează $\sphericalangle MAB = x$. Să se determine x astfel încît să avem $AM + BC = AC + BM$.

3) Să se arate că, pentru poziția lui M determinată la punctul 2), în patrulaterul $AMBC$ se poate înscrie un cerc. Să se afle raza acestui cerc.

(I. P. București, 1970)

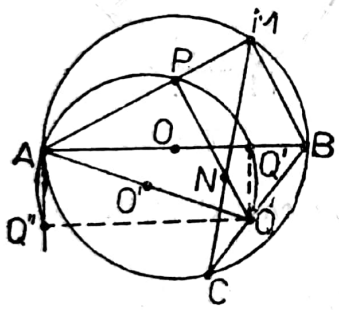


Fig. 69.

Soluție. 1) Deoarece $NP \perp AM$ și $BM \perp AM$ (fig. 69), rezultă $NP \parallel BM$. Astfel PN este linie mijlocie în triunghiul MCB, adică trece prin mijlocul Q al lui BC. Deoarece segmentul AQ este fix, iar $\sphericalangle APQ = \pi/2$ rezultă că P aparține unui arc din cercul de diametru AQ. Dacă $M \equiv B$, atunci $P \equiv Q'$ (proiecția lui Q pe AB). Dacă $M \equiv A$, atunci $P \equiv Q''$ (proiecția lui Q pe tangenta la cercul dat în punctul A). Deoarece $\sphericalangle Q''AQ' = \pi/2$, rezultă că P aparține semicercului $Q''AQ'$.

Raționamentul reciproc este ușor de urmărit și astfel locul geometric căutat este semicercul $Q''AQ'$.

2) Avem $AM = 2R\cos x$, $BM = 2R\sin x$, $BC = 2R\sin \sphericalangle BAC$, $AC = 2R\cos \sphericalangle BAC$. De aceea notînd cu $\alpha = \sphericalangle BAC$, relația din enunț devine $\cos x + \sin\alpha = \cos\alpha + \sin x$ sau $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. Deoarece $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, ecuația precedentă admite numai soluția $x = \alpha$, adică M trebuie să fie simetricul lui C față de AB.

3) Dreapta AB este bisectoare pentru $\sphericalangle MAC$ și $\sphericalangle MBC$. Bisectoarele unghiurilor AMB și ACB trec respectiv prin mijloacele arcelor ACB și BMA. De aceea ele sînt simetrice față de AB și deci se întîlnesc într-un punct I de pe AB. Acesta este centrul cercului înscris în patrulater.

Fie D proiecția lui I pe MB, adică ID este raza cercului înscris. Avem $ID = IB\cos x = MD = IA\sin x = (2R - IB)\sin x$. Din $IB\cos x = (2R - IB)\sin x$ găsim $IB = \frac{2R\sin x}{\cos x + \sin x}$. De aceea $ID = IB\cos x = \frac{2R\sin x\cos x}{\cos x + \sin x}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.128. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și AD una din înălțimi. Notînd cu M proiecția lui D pe AB și cu N proiecția lui D pe AC, să se arate că patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil. Să se calculeze apoi aria acestui patrulater cunoscînd lungimile catetelor $AB=6$ cm și $AC=8$ cm.

(I. P. București, 1977)

Soluție (fig. 70). $\sphericalangle BCA=\sphericalangle ADN$ ca unghiuri cu laturile perpendiculare; $\sphericalangle ADN=\sphericalangle AMN$ deoarece $AMDN$ este dreptunghi. Rezultă $\sphericalangle BCA=\sphericalangle AMN$ și deci patrulaterul $AMDN$ este inscriptibil.

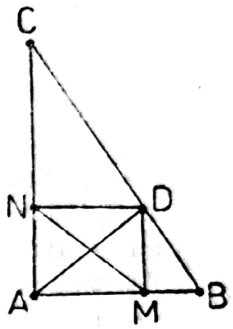


Fig. 70.

Avem $BC=10$ și $AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{24}{5}$. Cum $\Delta MDA\sim\Delta ABC$, rezultă $\frac{MD}{AB}=\frac{AD}{BC}$ și deci $MD=\frac{72}{25}$. Analog $AM=AC\frac{AD}{BC}$, adică $AM=\frac{96}{25}$. Cu acestea găsim aria $(BMNC)=\frac{AB\cdot AC}{2}-\frac{AM\cdot AN}{2}=\frac{AB\cdot AC}{2}-\frac{AM\cdot MD}{2}=\frac{11\,544}{625}$ cm^2.

2.129. Se consideră un triunghi echilateral ABC și un punct O pe paralela dusă prin A la BC. Cercul cu centrul în O, tangent la BC într-un punct T situat între B și C, taie laturile AB și AC respectiv în M și N (M între A și B, iar N între A și C). Fie de asemenea P punctul în care latura AC taie a doua oară cercul.

1) Să se arate că triunghiul APM este isoscel și să se calculeze în grade arcul MN.

2) Să se arate că patrulaterul $AOMN$ este inscriptibil.

3) Notînd cu R raza cercului, cu x segmentul OA, se cere să se calculeze lungimile segmentelor AM și AN în funcție de R și x. (Se va nota $\sphericalangle AMO=\alpha$.)

(I. P. București, 1974)

Soluție (fig. 71). 1) Deoarece axa de simetrie RS, a cercului cu centrul în punctul O (situat între proiecțiile lui B și C pe RS) este paralelă cu BC, rezultă că $\sphericalangle RAP=\sphericalangle BCA=60°$, $\sphericalangle MAR=\sphericalangle ABC=60°$ și deci $AP=AM$.

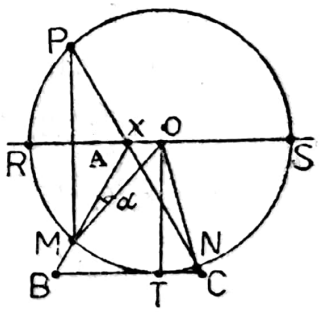


Fig. 71.

Ținînd seama că $MP\perp RS$ deducem $\sphericalangle AMN=\sphericalangle APM=30°$. De aceea măs $\overset{\frown}{MN}=60°$.

2) Deoarece $\sphericalangle MAN=60°$ (de la punctul 1) și $\sphericalangle MON=60°$, rezultă că $MAON$ este patrulater inscriptibil.

3) Aplicînd teorema sinusurilor în ΔAMO:

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin 120°}=\frac{AM}{\sin(60°-\alpha)},$$

din prima egalitate deducem $\sin\alpha=\frac{x\sqrt{3}}{2R}$ și deci

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{4R^2-3x^2}}{2R},$$

$$AM=\frac{R\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin 120^\circ}=\frac{R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{4R^2-3x^2}-x).$$

Analog, ținînd seama că $\sphericalangle ANO=\alpha$, din ΔANO găsim

$$AN=\frac{1}{2}(\sqrt{4R^2-3x^2}+x)$$

2.130. Pe segmentul $AB=4a$, luăm segmentele $AO_1=O_1C=CO_2=O_2B=a$. Se consideră cercurile cu centrele în O_1 și O_2 de rază a și cercul cu centrul în C de rază $2a$. Din A ducem o tangentă la cercul O_2, punctul de tangență fiind T. Această tangentă taie cercurile cu centrele în O_1 și C respectiv în R și S.

1) Să se arăte că $RT=TS=\frac{1}{2}AR$.

2) Se duc perpendicularele în B și C pe AB. Ele taie dreapta AT în P respectiv în Q. Să se arate că $PT=2QT$.

(I. P. Cluj, 1975)

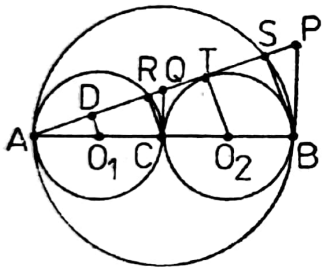


Fig. 72.

Soluție (fig. 72). 1) Din O_1 ducem $O_1D\perp AP$. Apoi observăm că $CR\perp AP$ (deoarece AC = diametru în cercul cu centrul O_1), $O_2T\perp AP$ (deoarece AT este tangentă la cercul de centru O_2) și $BS\perp AP$ (deoarece AB = diametru în cercul de centru C). Deci $O_1D\parallel CR\parallel O_2T\parallel BS$. Ținînd seama că aceste drepte paralele determină pe AB și AP segmente proporționale și că $OA_1=O_1C=CO_2=O_2B$ rezultă că $AD=DR=RT=TS=\frac{1}{2}AR$.

2) Deoarece CQ este linie mijlocie în triunghiul dreptunghic ABP, rezultă $QC=\frac{1}{2}PB$. Dar $QC=QT$ și $PT=PB$ (tangente duse dintr-un punct exterior). Deci $QT=\frac{1}{2}PT$.

2.131. În patrulaterul $ABCD$ fie $\{O\}$ intersecția diagonalelor AC și BD astfel ca $AO=2OC$ și $2BO=OD$. Se cere:

1) Să se arate că $ABCD$ este un trapez.

2) Să se exprime aria $(ABCD)$ în funcție de aria (BOC).

3) Dacă în patrulaterul $ABCD$ diagonalele sînt perpendiculare, atunci avem $AD^2+BC^2=AB^2+DC^2$ și există un singur patrulater inscriptibil $ABCD$ cu aceste proprietăți.

(I. P. București, 1970)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1) În fig. 73 avem $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOD$ și $\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$. De aceea triunghiurile BOC și AOD sînt asemenea. Rezultă $\sphericalangle OAD = \sphericalangle OCB$ și astfel $AD \parallel BC$, adică patrulaterul $ABCD$ este un trapez.

2) Fie EF înălțimea trapezului. Deoarece $\frac{FO}{OE} = \frac{1}{2}$, $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$, rezultă $EF = 3OF$, $BC + AD = 3BC$. De aceea găsim

$$\text{aria}\,(ABCD) = \frac{1}{2}(AD + BC)EF = \frac{1}{2}(3BC) \cdot 3OF =$$

$$= 9\ \text{aria}\,(BOC).$$

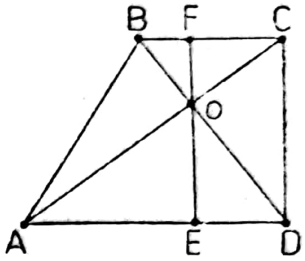


Fig. 73.

3) Dacă $AC \perp BD$, atunci triunghiurile BOA, AOD, DOC, COB sînt dreptunghice. Evident, relațiile $BC^2 = OB^2 + OC^2$, $CD^2 = OC^2 + OD^2$, $DA^2 = OD^2 + OA^2$, $AB^2 = OB^2 + OA^2$ implică $AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$.

Condiția de inscriptibilitate $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DBC$ împreună cu $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$ ne conduce la $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB$, adică triunghiul BOC este isoscel, și $OB = OC$. Astfel $BD = AC$, adică trapezul este isoscel, și $BD \perp AC$; acestea implică unicitatea.

2.132. Fie ABC un triunghi în care se dau laturile $BC = a$, $AC = b$. Fie AA', BB' înălțimile duse din A și B, H punctul lor de intersecție și D punctul în care dreapta BB' întîlnește paralela dusă în C la AA'.

1) Să se arate că patrulaterul $A'HB'C$ este inscriptibil.

2) Să se determine o valoare a unghiului ascuțit C astfel încît $\text{aria}\,(A'BH) = \text{aria}\,(A'HDC)$. Discuție după a și b.

3) Presupunînd triunghiul ABC isoscel ($a = b$), să se afle pentru ce valoare a lui C (unghi ascuțit) este maxim raportul $\text{aria}\,(ABC)/\text{aria}\,(A'HB)$.

(I. P. București, 1970)

Soluție. 1) Deoarece $AA' \perp BC$ și $BB' \perp AC$, rezultă $\sphericalangle A' + \sphericalangle B' = \pi$ și deci patrulaterul $A'HB'C$ este inscriptibil (fig. 74).

2) Se observă ușor că $\sphericalangle A'HB = \sphericalangle CDB = \sphericalangle BCA$, iar $A'C = AC\cos C = b\cos C$, $BA' = a - b\cos C$. Din echivalența $\text{aria}\,(BA'H) = \text{aria}\,(CA'HD) \Leftrightarrow \text{aria}\,(BCD) = 2\ \text{aria}\,(BA'H)$ rezultă $\frac{\text{aria}(BA'H)}{\text{aria}(BCD)} = \frac{1}{2} = \left(\frac{A'B}{BC}\right)^2$, sau $\frac{|a - b\cos C|}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pentru $C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se obțin două cazuri:

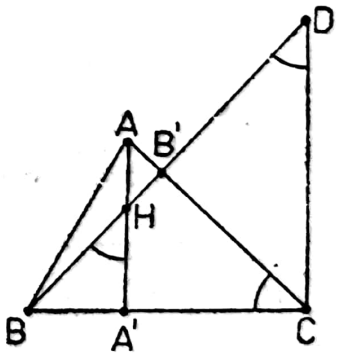


Fig. 74.

I) $a > b\cos C$, căruia îi corespunde $\sphericalangle B < \frac{\pi}{2}$; ecuația se transcrie sub forma $\cos C = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{b}$ și cu satisfacerea condiției $0 < \frac{a}{b} < \sqrt{2}+2$ admite soluția $C = \arccos\left[\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{a}{b}\right]$.

II) $a<b\cos C$, care corespunde situației $\sphericalangle B>\frac{\pi}{2}$; ecuația devine $\cos C=\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{a}{b}$ și pentru $0<\frac{a}{b}<2-\sqrt{2}$ ea admite soluția $C=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{b}\right)$. În acest caz $HDCA'$ nu mai este patrulater convex, ci se reduce la două triunghiuri.

3) Fie $a=b$. Deoarece aria $(ABC)=\frac{a^2\sin C}{2}$, avem $r=f(C)=\frac{\sin^2 C}{(1-\cos C)^2\cos C}=$ $=\frac{1+\cos C}{(1-\cos C)\cos C}$, $C\in(0,\pi/2)$. Deoarece $f'(C)=\frac{\cos^2 C+2\cos C-1}{(1-\cos C)^2\cos^2 C}(-\sin C)$ se observă că $f'(C)=0\Leftrightarrow C=\arccos(\sqrt{2}-1)$. Din semnul lui $f''(C)$ se deduce că C este un punct de maximum pentru r.

Observație. $t=\cos C$, $C\in(0,\pi/2)$, $t\in(0,1)$, este o bijecție, iar f este compunerea unei funcții raționale cu această bijecție.

De aceea extremul din problema precedentă este în mod esențial extremul unei funcții raționale, adică al unei funcții definită printr-o expresie $g(t)=\frac{P(t)}{Q(t)}$, unde P și Q sînt polinoame, $t\in R-\{t\mid Q(t)=0\}$.

Dar

$$g'(t)=\frac{P'(t)Q(t)-P(t)Q'(t)}{Q^2(t)},$$

$$g''(t)=\frac{P''(t)Q(t)-P(t)Q''(t)}{Q^2(t)}-\frac{2Q'(t)}{Q(t)}g'(t).$$

Deci $P'(t)Q(t)-P(t)Q'(t)=0$ ne dă punctele posibile de extrem, iar semnul lui $P''Q-PQ''$ în aceste puncte ne precizează natura lor.

2.133. Se dă un cerc cu diametrul AB. În A se duce tangenta la cerc și pe ea se iau două puncte oarecare M și N, de o parte și de alta a lui A. Se duce dreapta BM care taie cercul în P și dreapta BN care taie cercul în Q.

1) Să se arate că patrulaterul $MNQP$ este inscriptibil.

2) Să se verifice egalitatea $MP\cdot MB-NQ\cdot NB=MB^2-NB^2$.

(*I. P. Iași, 1971*)

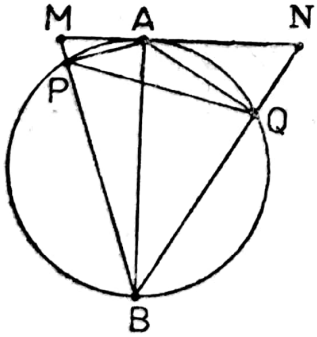


Fig. 75.

Soluție (fig. 75). 1) Deoarece AB este diametru avem $AP\perp BM$, $AQ\perp BN$. Pe de altă parte $\sphericalangle BMA=90°-\sphericalangle MBA=90°-\sphericalangle PBA=90°-\sphericalangle PQA$. De aceea $\sphericalangle PMA=\sphericalangle PQB$, adică patrulaterul $MNQP$ este inscriptibil.

2) Triunghiurile PQB și MBN sînt asemenea. De aceea $PB\cdot MB=NB\cdot QB$. Dar aceasta implică $MP\cdot MB-NQ\cdot NB=(MB-PB)\cdot MB-(NB-QB)\cdot NB=MB^2-BN^2$.

Scanned with OKEN Scanner

2.134. Două cercuri de centru O și O' au razele $r=x+2$, $r'=1-2x$ și distanța $OO'=4$.

1) Să se determine x astfel încît cele două cercuri să fie tangente interior.

2) Pentru ce valori ale lui x cercurile sînt secante?

(Institutul de arhitectură, București. 1973)

Soluție. Deoarece r și r' sînt distanțe se impun condițiile $x+2>0$ și $1-2x>0$, adică $-2<x<1/2$.

1) Condiția de tangență interioară este $|r-r'|=OO'$. Astfel $|3x+1|=4$ ne dă $x=1$ sau $x=-5/3$; deci $x=-\frac{5}{3}$.

2) Cercurile sînt secante numai dacă $|r-r'|<OO'<r+r'$. Acestea ne conduc la $|3x+1|<4<3-x$, adică $-5/3<x<1$ și $x<-1$, adică $-5/3<x<-1$.

Scanned with OKEN Scanner

GEOMETRIE ANALITICĂ

2.135. ABC fiind un triunghi oarecare și AA', BB', CC' cele trei înălțimi ale lui, din A' se duce $A'E$ perpendicular pe AB și $A'D$ perpendicular pe AC. Dreapta $B'C'$ taie pe AA' în I' și dreapta DE taie pe AA' în I. Să se arate (analitic) că I este mijlocul lui $A'I'$.

(Facultatea de matematică, Craiova, 1972)

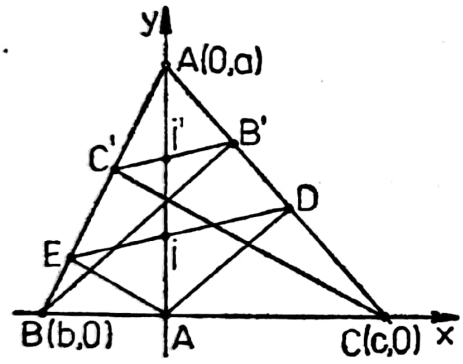


Fig. 76.

Soluție (fig. 76). Dreapta AC are ecuația $ax+cy-ac=0$, iar dreapta BB' are ecuația $-ay+cx-bc=0$. De aceea soluția sistemului

$$\begin{cases} ax+cy-ac=0, \\ -ay+cx-bc=0 \end{cases}$$

adică $x=\frac{c(a^2+bc)}{a^2+c^2}$, $y=\frac{ac(c-b)}{a^2+c^2}$, dă coordonatele punctului B'. Analog C' are coordonatele

$$x_{C'}=\frac{b(a^2+bc)}{a^2+b^2},\quad y_{C'}=\frac{ab(b-c)}{a^2+b^2}.$$

Intersectînd dreapta $B'C'$, de ecuație $\frac{x-x_{B'}}{x_{C'}-x_{B'}}=\frac{y-y_{B'}}{y_{C'}-y_{B'}}$, cu dreapta AA', de ecuație $x=0$, găsim punctul I' de coordonate

$$x_{I'}=0,\quad y_{I'}=\frac{2abc}{bc-a^2}\ \text{(ipoteză: } bc\neq a^2).$$

Analog găsim coordonatele punctelor D și E:

$$x_D=\frac{a^2c}{a^2+c^2},\quad y_D=\frac{ac^2}{a^2+c^2};\quad x_E=\frac{a^2b}{a^2+b^2},\quad y_E=\frac{ab^2}{a^2+b^2},$$

Intersectînd dreapta DE, de ecuație $\frac{x-x_D}{x_E-x_D}=\frac{y-y_D}{y_E-y_D}$, cu dreapta AA', de ecuație $x=0$, găsim punctul I de coordonate

$$x_I=0=\frac{x_{A'}+x_{I'}}{2},\quad y_I=\frac{abc}{bc-a^2}=\frac{y_{A'}+y_{I'}}{2}.$$

Acestea justifică afirmația din enunț.

2.136. Fie C un punct mobil pe axa Ox, iar OBC un triunghi isoscel cu $OB=BC=a$. Se cere:

1) locul geometric al mijlocului M al segmentului BC;

2) poziția punctului C, pentru care dreapta BC este tangentă locului geometric determinat la 1).

(Facult. de matematică, Craiova, 1973)

Soluție. (fig. 77). 1) Dacă $C(t, 0)$, atunci $B\left(\frac{t}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{4a^2-t^2}\right)$; triunghiul există, dacă $|t|<2a$. Deoarece $BM=MC$, rezultă

$$\begin{cases} x_M=\frac{3t}{4}, \\ y_M=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2-t^2}, \quad t\in(-2a,\ 2a), \end{cases}$$

care este o parametrizare corespunzătoare locului lui M. Ecuația implicită a locului rezultă eliminînd pe t:

$$\frac{x^2}{\frac{9a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{4}}-1=0,$$

care este ecuația unei elipse cu centrul în O de semiaxe $\frac{3a}{2}$, $\frac{a}{2}$.

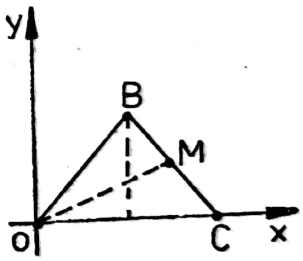


Fig. 77.

2) Ecuația dreptei care trece prin punctele B, C este

$$\frac{y-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-t^2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-t^2}}=\frac{x-\frac{t}{2}}{t-\frac{t}{2}},\quad \text{sau}$$

$$x\sqrt{4a^2-t^2}+ty-t\sqrt{4a^2-t^2}=0.$$

Ecuația tangentei la elipsă într-un punct al său (x_0, y_0) este:

$$\frac{x_0x}{\frac{9a^2}{4}}+\frac{y_0y}{\frac{a^2}{4}}-1=0,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau pentru punctul $M\left(\frac{3t}{4}, \frac{1}{4}\sqrt{4a^2-t^2}\right)$,

$$\frac{t}{3a^2}x+\frac{1}{a^2}\sqrt{4a^2-t^2}\,y-1=0.$$

Din condiția ca dreapta ce trece prin B, C să fie tangentă la elipsă, $\frac{t}{3a^2\sqrt{4a^2-t^2}}=$ $=\frac{\sqrt{4a^2-t^2}}{ta^2}=\frac{1}{t\sqrt{4a^2-t^2}}$, rezultă $t=\pm a\sqrt{3}$ și poziția punctului C.

2.137. În planul determinat de două drepte paralele Δ_1 și Δ_2 se consideră un punct fix A ce nu aparține acestor drepte. Prin A se duc două drepte d_1 și d_2. Se notează

$$\{B\}=\Delta_1\cap d_1,\ \{Q\}=\Delta_1\cap d_2,\ \{R\}=\Delta_2\cap d_1,\ \{C\}=\Delta_2\cap d_2.$$

1) Să se arate că dacă are loc una din propozițiile:
— lungimea segmentului BQ este constantă;
— lungimea segmentului CR este constantă;
— aria triunghiului ABC este constantă;
atunci au loc și celelalte două din aceste propoziții.

2) Să se afle locul geometric al punctului $M\equiv BC\cap QR$ cînd dreptele d_1 și d_2 se rotesc în jurul lui A.

3) Să se arate că dreapta AM trece prin mijlocul segmentului BQ.

4) În ipoteza $BQ=a$ (const.) să se arate că dreapta BC trece printr-un punct fix.

(Facultatea de matematică-mecanică, Timișoara, 1971)

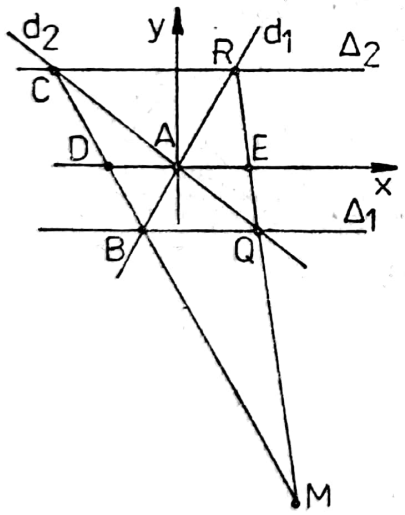


Fig. 78.

Soluție (fig. 78). 1) Presupunem $BQ=$ const. Din asemănarea triunghiurilor BAQ și ACR rezultă $\frac{CR}{BQ}=\frac{\text{dist}\,(A;\Delta_2)}{\text{dist}\,(A;\Delta_1)}$. De aceea $BQ=$const. implică $CR=$ const.

Pe de altă parte avem

$$2\,\text{aria}\,(ABC)=\text{aria}\,(BCR)+$$

$$+\text{aria}\,(BQC)-\text{aria}\,(ACR)-\text{aria}\,(ABQ)=$$

$$=\frac{(CR+BQ)\,\text{dist}\,(\Delta_1,\Delta_2)-CR\,\text{dist}\,(A;\Delta_2)-BQ\,\text{dist}\,(A;\Delta_1)}{2}=$$

$$=\text{const.}$$

Celelalte variante se tratează analog.

2) Deoarece $\Delta_1\|\Delta_2$ avem $\frac{\text{dist}\,(M;\Delta_2)}{\text{dist}\,(M;\Delta_1)}=\frac{CR}{BQ}=$ $=$const. $(=k)$, sau $\frac{x}{x-d}=k$, unde $x=\text{dist}\,(M;\Delta_2)$, $d=\text{dist}\,(\Delta_1;\Delta_2)$. Rezultă $x=\frac{kd}{k-1}$ și astfel M descrie o paralelă la Δ_1.

Scanned with OKEN Scanner

3) Prin construcție $DE \parallel BQ \parallel CR$. Aceasta implică

$$\frac{DA}{CR} = \frac{\text{dist}\,(A;\Delta_1)}{d}, \quad \frac{AE}{CR} = \frac{\text{dist}\,(A;\Delta_1)}{d},$$

adică $DA = AE$. Cum însă un fascicul de drepte determină pe drepte paralele segmente proporționale, dreapta AM trece prin mijlocul lui BQ.

4) Aici este mai ușoară soluția analitică. Considerînd un sistem de axe rectangulare cu originea în A, $Ay \perp \Delta_2$, avem

Δ_1: $y=\alpha<0$; Δ_2: $y=\beta>0$; d_1: $y=m_1x$, $m_1\neq 0$; d_2: $y=m_2x$, $m_2\neq 0$.

Cu acestea găsim

$$BC: \frac{y-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\alpha(m_1x-\alpha)}{\alpha\beta m_1+\alpha(\beta-\alpha)}.$$

Observăm că toate dreptele BC trec prin punctul

$$x = \frac{-\alpha\beta}{\beta-\alpha}, \quad y=0.$$

2.138. Într-un plan se consideră un sistem de coordonate rectangulare xOy și un punct $P(a, b)$. Se construiește pătratul $OPQR$, notația fiind în acord cu sensul direct de parcurgere a perimetrului (interiorul pătratului la stînga).

1) Să se determine coordonatele punctelor Q și R.

2) Ce loc geometric descrie punctul Q, cînd P descrie o dreaptă.

3) Păstrînd notația de mai sus, fie M mulțimea punctelor din plan și $f: M\to M$ funcția definită prin $f(P)=Q$. Să se arate că f este o bijecție care aplică un poligon pe un poligon asemenea.

(Facultatea de matematică-mecanică, Cluj, 1972)

Soluție (fig. 79). 1) Ecuațiile parametrice ale dreptei OP sînt $x=at$, $y=bt$, $t\in R$. Deoarece $PQ \perp OP$, dreapta PQ va avea ecuațiile parametrice $x-a=-bs$, $y-b=as$, $s\in R$. Punînd condiția $d(P, Q)=d(0, P)=\sqrt{a^2+b^2}$, găsim $s=1$. De aceea coordonatele lui Q sînt $x=a-b$, $y=a+b$. Deoarece unghiul făcut de OP cu Ox este egal cu unghiul dintre OR și Oy, coordonatele lui R sînt $x=-b$, $y=a$.

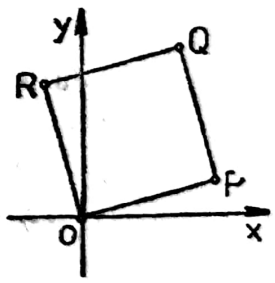


Fig. 79.

2) Dacă coordonatele lui P verifică ecuația $ux+vy+w=0$, adică $ua-v(-b)+w\equiv 0$, atunci coordonatele lui Q verifică ecuația $uy-vx+w=0$. De aceea dacă P descrie o dreaptă, atunci Q descrie tot o dreaptă însă perpendiculară pe prima.

3) Funcția f se explicitează astfel: $f(x, y)=(x-y, x+y)$. Deoarece $f(x_i, y_i)=(x_i-y_i, x_i+y_i)$, $i=1, 2$, $f(x_1, y_1)=f(x_2, y_2)$ implică $x_1-y_1=x_2-y_2$, $x_1+y_1=x_2+y_2$, adică $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, funcția f este injectivă. În plus, $\forall (u, v)\in R^2$, $f(x, y)=(x-y, x+y)=(u, v)$ conduce la $x-y=u$, $x+y=v$, adică $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{v-u}{2}$ și deci f este surjectivă. Astfel f este bijectivă.

Pentru a arăta că f aplică un poligon pe un poligon asemenea este suficient să arătăm că ea duce dreptele în drepte și că păstrează unghiurile a două drepte.

Fie dreapta de ecuații parametrice $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $t\in R$. Imaginea sa prin f este dată de $f(x, y)=f(x_0+lt, y_0+mt)=(x_0-y_0+(l-m)t, x_0+y_0+(l+m)t)=(X, Y)$. Dar $X=x_0-y_0+(l-m)t$, $Y=x_0+y_0+(l+m)t$, $t\in R$, sînt ecuații parametrice ale dreptei ce trece prin punctul (x_0-y_0, x_0+y_0) și are direcția $(l-m, l+m)$.

Fie acum două drepte cu direcțiile (l_1, m_1), respectiv (l_2, m_2). Imaginile lor prin f vor avea direcțiile (l_1-m_1, l_1+m_1), respectiv (l_2-m_2, l_2+m_2). Notînd cu φ unghiul dintre dreptele inițiale și cu Φ unghiul imaginilor lor, avem

$$\cos\Phi=\frac{(l_1-m_1)(l_2-m_2)+(l_1+m_1)(l_2+m_2)}{\sqrt{(l_1-m_1)^2+(l_1+m_1)^2}\sqrt{(l_2-m_2)^2+(l_2+m_2)^2}}=\frac{2(l_1l_2+m_1m_2)}{\sqrt{2(l_1^2+m_1^2)}\sqrt{2(l_2^2+m_2^2)}}=$$

$$=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_1^2+m_2^2}}=\cos\varphi \text{ c.c.t.d.}$$

2.139. Într-un sistem ortogonal xOy, fie punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$. Pe o dreaptă d paralelă cu AB se consideră punctul P variabil, și fie $\{I\}=BP\cap Ox$, $\{J\}=AP\cap Oy$.

1) Să se determine locul geometric al punctului $M\equiv IJ\cap OP$.

2) Să se determine dreapta d astfel încît să fie tangentă cercului circumscris triunghiului AOB.

3) Să se calculeze aria trapezului determinat de dreptele AB, Ox, Oy și d, în cazul în care distanța de la dreapta AB la dreapta d este $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

(Facultatea de matematică-informatică, Timișoara, 1975)

Soluție. 1) Dreapta AB are ecuația $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, iar dreapta d are ecuația $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=c$ (constant). De aceea coordonatele (α, β) ale lui P trebuie să satisfacă relația $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=c$.

Deoarece $BP:\frac{x}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta-b}$, punctul I are coordonatele $\left(\frac{-\alpha b}{\beta-b}, 0\right)$. Analog $AP:\frac{x-a}{\alpha-a}=\frac{y}{\beta}$ implică $J\left(0, \frac{-\beta a}{\alpha-a}\right)$,

Apoi $IJ:\frac{x+\frac{\alpha b}{\beta-b}}{\frac{\alpha b}{\beta-b}}=\frac{y}{\frac{-\beta a}{\alpha-a}}$, $OP:\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}$. Rezultă că $x=\frac{-ab\alpha}{a(\beta-b)+b(\alpha-a)}$, $y=\frac{-ab\beta}{a(\beta-b)+b(\alpha-a)}$ sînt coordonatele lui M. La acestea adăugăm condiția

$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=c$ și eliminăm pe α și β. Rezultă $\alpha=\frac{2a^2b^2x}{bx+ay+ab}$, $\beta=\frac{2a^2b^2y}{bx+ay+ab}$ și deci $\frac{2ab^2x}{bx+ay+ab}+\frac{2a^2by}{bx+ay+ab}=c$, adică $2ab(bx+ay)=c(bx+ay+ab)$. Astfel locul geometric al lui M este o dreaptă.

Precizare. În rezolvarea precedentă am lăsat deoparte cazurile speciale.

2) Deoarece $\measuredangle AOB=90^\circ$ centrul cercului este la jumătatea segmentului AB. De aceea coordonatele centrului C sînt $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, iar raza este $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

Dreapta d este tangentă la cercul AOB dacă și numai dacă distanța de la C la d este egală cu raza, adică

$$\frac{\left|b\frac{a}{2}+a\frac{b}{2}-abc\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

sau $2c=\pm(a+b)^2$.

3) Dreapta d taie axele în $M(ac, 0)$, $N(0, bc)$. De aceea aria cerută are valoarea

$$\frac{(AB+MN)\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{(a^2+b^2)(1+|c|)}{4},$$

unde c are expresia găsită la punctul precedent.

2.140. Două laturi ale unui patrulater inscriptibil au ecuațiile $2x-y+4=0$ și $2x+y=0$, iar diagonalele lui sînt ortogonale și se intersectează în punctul $Q(1, 2)$.

1) Să se găsească ecuațiile celorlalte două laturi ale patrulaterului.

2) Să se afle centrul și raza cercului circumscris patrulaterului dat.

3) Să se afle aria patrulaterului considerat.

4) Să se arate că dreapta de ecuație $3x-4y-29=0$ este tangentă cercului circumscris patrulaterului dat și să se afle coordonatele punctului de tangență.

(Facult. de matematică, Buc., 1977)

Soluție (fig. 80). 1)—2) Fie A, B, C, D vîrfurile patrulaterului dat astfel încît coordonatele lui A să verifice sistemul $2x-y+4=0$ și $2x+y=0$. Găsim $A(-1, 2)$. Diagonala AC are ecuația $y=2$ deoarece se confundă cu dreapta AQ; de aceea punctul C și centrul O al cercului circumscris au ordonatele egale cu 2. Diagonala BD are ecuația $x=1$, fiind perpendiculară pe AC. Din $x=1$, $2x-y+4=0$ găsim $D(1, 6)$, iar din $x=1$, $2x+y=0$ obținem $B(1, -2)$.

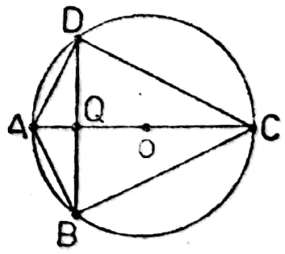


Fig. 80.

Pe de altă parte, cercul $ABCD$ se identifică cu cercul ABD, iar ecuația acestuia este $x^2+y^2-8x-4y-5=0$. Deducem $O(4, 2)$, $r=5$. Mai mult, intersectînd pe AQ cu acest cerc obținem $C(9, 2)$. Apoi $DC: x+2y-13=0$, $BC: x-2y-5=0$.

3) Deoarece $AC \perp BD$ avem aria $(ABCD)=\frac{BD \cdot AC}{2}=40$.

4) Centrul cercului are coordonatele (4, 2), iar distanța de la acest punct la dreapta $3x-4y-29=0$ este $d=\frac{|3 \cdot 4-4 \cdot 2-29|}{\sqrt{9+16}}=5=r$. De aceea dreapta este tangentă la cerc. Rezolvînd sistemul $x^2+y^2-8x-4y-5=0$, $3x-4y-29=0$ găsim coordonatele punctului de tangență $T(7, 2)$.

2.141. Se consideră o dreaptă d, un punct M al acestei drepte și un cerc C tangent la dreapta d în punctul M. Pe dreapta d se consideră două puncte A și A'. Cercul taie mediatoarea segmentului AA' în punctele N_1 și N_2. Dreptele AN_1 și $A'N_2$ se întîlnesc într-un punct P. Să se găsească locul geometric al punctului P cînd cercul C variază rămînînd tangent în M la dreapta d.

(Universitatea București, 1974)

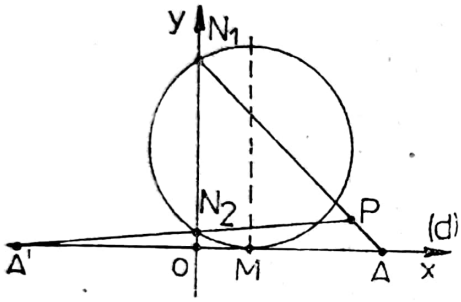


Fig. 81.

Soluție (fig. 81). Se consideră axa Ox după d și Oy după mediatoarea lui AA'. Fie $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$, $M(\alpha, 0)$, r — raza cercului C. Ordonatele punctelor N_1, N_2 se determină din sistemul $(x-\alpha)^2+(y-r)^2=r^2$, $x=0$. Condiția ca mediatoarea și cercul să aibă puncte de intersecție (reale) este $r \geqslant |\alpha|$; se obține $N_2(0, r-\sqrt{r^2-\alpha^2})$, $N_1(0, r+\sqrt{r^2-\alpha^2})$. Ecuația dreptei prin A', N_2 este $y=\frac{r-\sqrt{r^2-\alpha^2}}{a}(x+a)$, iar prin A, N_1, $y=-\frac{r+\sqrt{r^2-\alpha^2}}{a}(x-a)$. Intersecția celor două drepte este P de coordonate $x=\frac{a}{r}\sqrt{r^2-\alpha^2}$, $y=\frac{\alpha^2}{r}$, $|\alpha| \leqslant r$, $\alpha=$dat. Ultima parametrizare (în raport cu r) determină locul punctului P; forma implicită a ecuației locului, care rezultă prin eliminarea parametrului r, este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}-1=0$.

2.142. Fie E o elipsă raportată la axe, A, A' vîrfurile sale de pe Ox, iar B, B' cele de pe Oy și P un punct oarecare al elipsei.

1) Să se arate că dreapta determinată de punctele de intersecție ale cercurilor circumscrise triunghiurilor PAA' și PBB' este tangentă în P la E.

2) Fie P_1, P_2 simetricele lui P față de centrele celor două cercuri. Să se arate că dreapta P_1P_2 trece printr-un punct fix.

3) Să se găsească locul geometric al simetricului punctului P față de centrul cercului circumscris triunghiului PAA', cînd $P \in E$.

(Facultatea de matematică-mecanică, Iași, 1970)

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. 1) Cercurile care trec prin două puncte au centrele pe mediatoarea segmentului care uneşte aceste puncte.

Ecuaţia canonică a elipsei este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. De aceea P are coordonatele $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0,\ 2\pi)$.

Deoarece $A'(-a,\ 0)$, $A(a,\ 0)$ sînt simetrice faţă de Oy, rezultă că cercurile care trec prin A' şi A au ecuaţii de forma $x^2+(y-v)^2=a^2+v^2$, adică $x^2+y^2-2vy=a^2$. Un asemenea cerc trece prin P numai dacă $a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t-2vb\sin t=a^2$, adică $2v=\frac{b^2-a^2}{b}\sin t$.

Analog, cercul care trece prin punctele P, $B'(0,\ -b)$, $B(0,\ b)$ are ecuaţia $x^2+y^2-2ux=b^2$, cu condiţia $a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t-2ua\cos t=b^2$, adică $2u=\frac{a^2-b^2}{a}\cos t$.

Ecuaţia dreptei ce trece prin punctele de intersecţie ale celor două cercuri se obţine scăzînd, membru cu membru, ecuaţiile cercurilor; găsim $2ux-2vy=a^2-b^2$ cu condiţiile $2u=\frac{a^2-b^2}{a}\cos t$, $2v=\frac{b^2-a^2}{b}\sin t$. Înlocuind pe $2u$ şi $2v$, simplificînd cu a^2-b^2 deducem $\frac{x\cos t}{a}+\frac{y\sin t}{b}=1$, iar aceasta este ecuaţia tangentei la E în P obţinută prin dedublare.

2) Cercul PAA' are centrul $O_1\left(0,\ v=\frac{b^2-a^2}{2b}\sin t\right)$, iar cercul PBB' are centrul $O_2\left(u=\frac{a^2-b^2}{2a}\cos t,\ 0\right)$. De aceea simetricele lui $P(a\cos t,\ b\sin t)$ faţă de O_1 şi O_2 sînt respectiv $P_1\left(-a\cos t,\ -\frac{a^2}{b}\sin t\right)$, $P_2\left(-\frac{b^2}{a}\cos t,\ -b\sin t\right)$.

Dreapta P_1P_2 are ecuaţia

$$\frac{x+a\cos t}{\frac{\cos t}{a}}=\frac{y+\frac{a^2}{b}\sin t}{\frac{\sin t}{b}},$$

adică $ax\sin t-by\cos t=0$. Aceasta trece prin origine.

3) Locul geometric al punctului $P_1\left(-a\cos t,\ -\frac{a^2}{b}\sin t\right)$ are ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases}x=-a\cos t\\ y=-\frac{a^2}{b}\sin t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi),$$

sau ecuaţia carteziană implicită

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}=1.$$

Aceasta este însă o elipsă.

Scanned with OKEN Scanner

2.143. Se consideră o hiperbolă H și un punct P în planul acesteia. Se duc prin P paralele la asimptotele hiperbolei H. Fie M, N punctele de intersecție ale acestor paralele cu hiperbola.

1) Care este locul geometric al punctelor P, care au proprietatea că dreapta MN trece prin centrul O al hiperbolei?

2) Care este locul geometric al punctelor P pentru care dreapta MN este paralelă cu una din axele hiperbolei?

(Facultatea matematică-mecanică, București, 1973)

Soluție. Pentru ca să existe punctele M, N (în planul finit) trebuie ca P să nu aparțină hiperbolei sau asimptotelor. Se consideră $H: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ și asimptotele $y=\pm\frac{b}{a}x$.

1) Se consideră $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(x', y')$; ecuațiile paralelelor la asimptote sînt $y-y'=\pm\frac{b}{a}(x-x')$.

Restricțiile impuse la început se exprimă analitic prin

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1\neq 0,\quad bx'\pm ay'\neq 0.$$

Coordonatele punctului M sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} y_1-y'=\frac{b}{a}(x_1-x') \\ \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1=0 \end{cases},\quad \text{respectiv} \quad \begin{cases} x_1=\frac{(bx'-ay')^2+a^2b^2}{2b(bx'-ay')} \\ y_1=\frac{a^2b^2-(bx'-ay')^2}{2a(bx'-ay')} \end{cases}.$$

Analog, coordonatele lui N

$$x_2=\frac{a^2b^2+(ay'+bx')^2}{2b(ay'+bx')},\quad y_2=\frac{(ay'+bx')^2-a^2b^2}{2a(ay'+bx')};$$

Dreapta MN trece prin O, dacă O, M, N sînt coliniare sau $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$, de unde rezultă $b^2x'^2-a^2y'^2+ab=0$.

Deci locul lui P este hiperbola conjugată lui H,

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-1=0.$$

2) Dreapta prin M, N este paralelă cu $y=0$, dacă $y_1=y_2$, de unde rezultă $x'=0$; în acest caz locul lui P este axa Oy. Cazul de paralelism la $x=0$; din $x_1=x_2$ rezultă că locul lui P este axa Ox.

2.144. În planul raportat la un sistem de axe rectangulare xOy, se consideră parabola $2y=x^2$. Fie P un punct pe parabolă. Să se determine, în funcție de abscisa k a lui P:

Scanned with OKEN Scanner

1) coordonatele punctului T unde tangenta în P taie axa Ox, aria triunghiului OTP și cooreonatele centrului de greutate G al aceluiași triunghi;
2) să se afle locul geometric al punctului G cînd P descrie parabola dată;
3) să se arate că înălțimea triunghiului OTP corespunzătoare lui T trece printr-un punct fix.

(Facultatea de matematică, București, 1976)

Soluție(fig. 82). 1) Deoarece P este pe parabolă, are coorbonatele $P\left(k, \frac{k^2}{2}\right)$. Ecuația tangentei (prin dedublare) este $y+\frac{k^2}{2}=xk$, sau $2y-2kx++k^2=0$; intersecția cu Ox este punctul $T\left(\frac{k}{2}, 0\right)$.

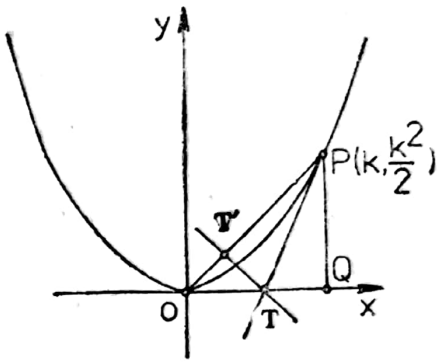


Fig. 82.

Aria $(OTP)=\frac{1}{2}OT\cdot PQ$, unde PQ este înălțime în triunghiul OTP;deci aria $(OTP)=\frac{k^3}{8}$.

Coordonatele centrului de greutate sînt

$$x_G=\frac{x_0+x_P+x_T}{3},\ y_G=\frac{y_0+y_P+y_T}{3},\ \text{adică}\ x_G=\frac{k}{2},\ y_G=\frac{k^2}{6}.$$

2) Dacă P descrie parabola, parametrizarea $\left(x=\frac{k}{2};\ y=\frac{k^2}{6},\ k\in R\right)$ corespunde locului geometric al lui G; forma implicită rezultă prin eliminarea parametrului: $3y-2x^2=0$.

3) Fie TT' înălțimea corespunzătoare lui T; deoarece $TT'\perp OP$ și panta dreptei OP este $m=\frac{k}{2}$, rezultă că panta dreptei TT' este $m'=-\frac{2}{k}$, $k\neq 0$, iar ecuația sa este $y=-\frac{2}{k}\left(x-\frac{k}{2}\right)$, sau $ky+2x-k=0$. Deoarece se transcrie sub forma $k(y-1)+2x=0$ rezultă că oricare ar fi $k\in R-\{0\}$ ecuația este verificată de (0, 1), adică punctul fix este $A(0, 1)$.

2.145. Să se determine locul geometric al punctelor de intersecție a parabolelor $y=x^2-\frac{3}{2}mx+m^2+m$, $y=x^2-\frac{3}{2}px+p^2+p$ dacă $\frac{1}{m}+\frac{1}{p}+\frac{1}{mp}=\frac{1}{c}$.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1970)

Soluție. Pentru găsirea locului geometric trebuie să eliminăm parametrii m și p între următoarele ecuații

$$\begin{cases} y=x^2-\frac{3}{2}mx+m^2+m \\ y=x^2-\frac{3}{2}px+p^2+p \\ \frac{1}{m}+\frac{1}{p}+\frac{1}{mp}=\frac{1}{c}. \end{cases}$$

Scăzînd primele două egalităţi obţinem $\left(\frac{3}{2}x-m-p-1\right)(p-m)=0$.

Dacă $p=m$, atunci din ultima ecuaţie deducem $m^2-2mc-c=0$ sau $m_{1,2}=c\pm\sqrt{c^2+c}$; locul geometric căutat constă din parabolele $y=x^2-\frac{3}{2}m_{1,2}\,x+m^2{}_{1,2}+m_{1,2}$.

Dacă $\frac{3}{2}x=m+p+1$, atunci $y=x^2-mp$. Transcriind ultima ecuaţie în forma $c(m+p+1)=mp$ şi eliminînd pe $m+p+1$ şi mp găsim locul geometric $\frac{3}{2}cx=x^2-y$. Aceasta este o parabolă cu axa $x=\frac{3c}{4}$ şi tangenta în vîrf $y=-\frac{9c^2}{16}$.

Scanned with OKEN Scanner

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

2.146. Se dă o prismă dreaptă cu baza un pătrat $ABCD$. Prin vîrful A se duce un plan P care taie suprafața laterală a prismei după un romb R. Să se calculeze unghiul diedru format de planul P cu planul bazei prismei, în funcție de unghiul ascuțit x al rombului R.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1972)

Soluție (fig. 83). Deoarece $AB=AD$, $AL=AN$ și $\sphericalangle NDA=\sphericalangle LBA=90°$, rezultă $LB=ND$ și deci $NL \parallel DB$. Pe de altă parte $AM \perp NL$, $AC \perp BD$ arată că planul AMC este perpendicular pe planul bazei, iar intersecția dintre planul P și planul bazei este paralelă cu BD. De aceea unghiul căutat este $\varphi=\sphericalangle MAC$. Avem $\cos\varphi=$

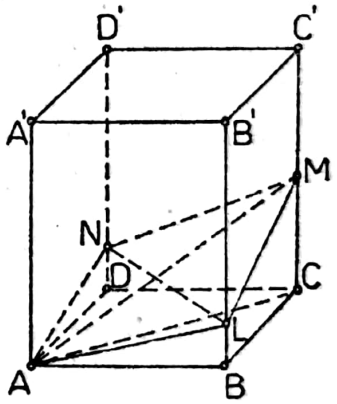


Fig. 83.

$$=\frac{AC}{AM}=\frac{DB}{AM}=\frac{NL}{AM}=\frac{2\,AN\sin\frac{x}{2}}{2\,AN\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$ adică $\varphi=$

$$=\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

2.147. Să se calculeze volumul unui paralelipiped drept cu baza un romb cu latura $a\sqrt{3}$, avînd un unghi ascuțit de 60°, știind că lungimea diagonalei mari a paralelipipedului este $d=5a$.

(I. P. București, 1977)

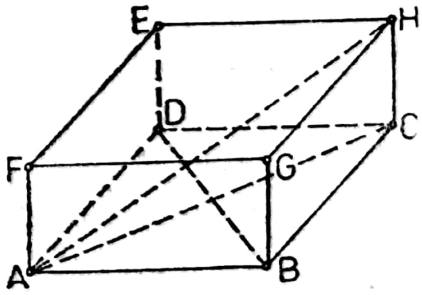


Fig. 84.

Soluție. Cu notațiile din fig. 84 avem $\frac{AC\cdot BD}{2}=\text{aria}\ (ABCD)=BC\cdot DC\ \sin\ \sphericalangle BCD=$

$=a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}\sin 60^\circ=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Pe de altă parte $BC=DC=a\sqrt{3}$ și $\sphericalangle BCD=60^\circ$ implică $BD=a\sqrt{3}$ (adică triunghiul BCD este echilateral). De aceea $AC=3a$. Deoarece ACH este triunghi dreptunghic deducem $CH=\sqrt{AH^2-AC^2}=4a$ și deci $V=CH\cdot$aria $(ABCD)=6a^3\sqrt{3}$.

2.148. Se consideră o piramidă dreaptă de muchie $a\sqrt{2}$ și cu baza un pătrat de latură a.

1) Să se calculeze aria totală și volumul piramidei.

2) Să se determine aria pătratului obținut prin secționarea piramidei cu un plan paralel cu planul bazei, la distanța $\frac{a}{2}$ de vîrful piramidei.

3) Să se calculeze aria și volumul sferei înscrise în piramidă.

(I. P. Timișoara, 1975)

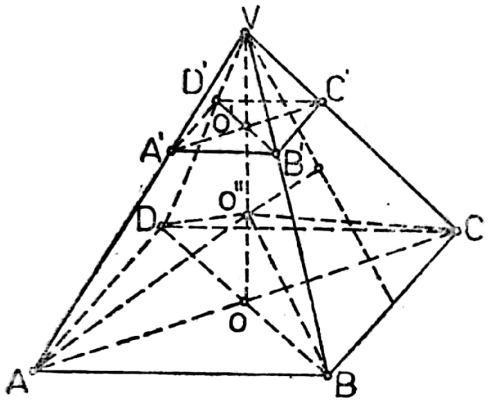


Fig. 85.

Soluție (fig. 85). 1) Apotema, $h=\frac{a}{2}\sqrt{7}$; $A_{lat}=\frac{4a}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{7}=a^2\sqrt{7}$; $A_{tot}=a^2(1+\sqrt{7})$. Înălțimea, $H=\sqrt{VA^2-AO^2}=a\sqrt{\frac{3}{2}}$; $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

2) Deoarece piramida $VA'B'C'D'$ este „asemenea" piramidei inițiale, rezultă pentru raportul volumelor

$$\frac{V'}{V}=\left(\frac{VO'}{VO}\right)^3=\frac{VO'\cdot A_{A'B'C'D'}}{VO\cdot A_{ABCD}};$$

$VO'=\frac{a}{2}$, $VO=a\sqrt{\frac{3}{2}}$ și deci $A_{A'B'C'D'}=$

$$=\left(\frac{VO'}{VO}\right)^2\cdot A_{ABCD}=\frac{a^2}{6}.$$

3) Deoarece volumul piramidei date este egal cu suma volumelor a cinci piramide cu vîrful comun în centrul sferei O'', rezultă $V=\frac{r}{3}A_{tot}$, și deci

$$r=\frac{3V}{A_{tot}}=\frac{a\sqrt{6}\,(\sqrt{7}-1)}{12}.$$

2.149. Se dă o piramidă $VABCD$ cu baza un dreptunghi $ABCD$, avînd $AB=2a$, $BC=a$, înălțimea piramidei fiind muchia $VD=2a$. Pe muchia VB se ia un punct P și se cere:

1) Să se calculeze aria laterală a piramidei.

2) Să se arate că dacă P este mijlocul lui VB, triunghiul APC este isoscel și să se determine aria acestuia.

3) Să se determine poziția lui P pe VB, astfel încît triunghiul APC să fie dreptunghic.

(I.P. București, 1967; I.P. Iași, 1975)

Soluţie (fig. 86) 1). $A_{\Delta VDA}=\frac{VD\cdot AD}{2}=a^2\left(\text{deoarece } \sphericalangle VDA=\frac{\pi}{2}\right)$; $A_{\Delta VDC}=\frac{VD\cdot DC}{2}=2a^2\left(\sphericalangle VDC=\frac{\pi}{2}\right)$; $A_{\Delta BCV}=\frac{BC\cdot CV}{2}=a^2\sqrt{2}\left(\sphericalangle BCV=\frac{\pi}{2}\right.$, deoarece $CB\perp$plan (V, D, C)); $A_{\Delta VAB}=\frac{AB\cdot VA}{2}=a^2\sqrt{5}$; $A_{lat\ VABCD}=\Sigma A_{\Delta VDA}=(3+\sqrt{2}+\sqrt{5})a^2$.

2) ΔVAB, ΔBCV sînt dreptunghice; dacă $VP=PB$, atunci $AP(CP)$ este mediană relativ la ipotenuza VB în ΔVAB (în ΔBCV) şi deci $AP=\frac{VB}{2}$ $\left(CP=\frac{VB}{2}\right)$. Deoarece $PC=PA=\frac{VB}{2}$, ΔAPC este isoscel. În ΔVBD, OP este linie mijlocie, deci $PO=\frac{VD}{2}=a$ şi $PO\perp$plan (A, B, C, D); rezultă $A_{\Delta PAC}=\frac{PO\cdot AC}{2}=\frac{a^2\sqrt{5}}{2}$.

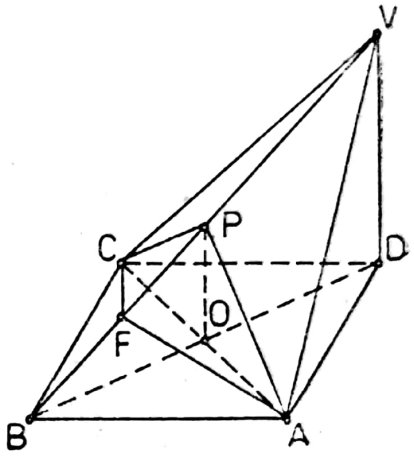


Fig. 86.

3) Se cunoaşte una din soluţii, cînd P se confundă cu B. Considerăm plan $(C, F, A)\perp VB$, F fiind punctul de intersecţie al planului cu VB. Din simetria faţă de plan (C, F, A) rezultă a doua soluţie: $BP=2\cdot BF=2\cdot\frac{AB^2}{BV}=\frac{8a}{3}$ (cu teorema catetei în ΔVAB).

2.150. O piramidă are baza un paralelogram $ABCD$ şi vîrful V astfel încît muchia VD este perpendiculară pe planul bazei. Se notează cu M mijlocul muchiei VB, B fiind vîrful opus lui J în paralelogramul $ABCD$.

1) Să se arate că planele MAC şi MBD sînt perpendiculare pe planul bazei şi $MA=MC$, $MB=MD$.

2) Să se probeze că unghiurile formate de planele MAD şi MBC cu planul bazei sînt egale.

3) Fie α, β, γ unghiurile formate respectiv de drepetele VA, VB, VC cu planul bazei. Ce devine paralelogramul $ABCD$ dacă $\operatorname{ctg}^2\beta=\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma$?

(I. P. Bucureşti, 1971)

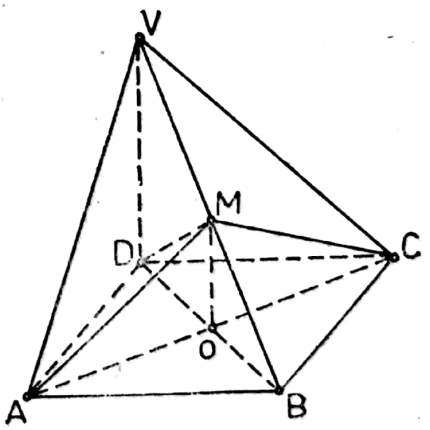


Fig. 87.

Soluţie (fig. 87). Deoarece $VM=MB$, $DO=OB$, avem $MO\|VD$ şi deci $MO\perp(ABCD)$.

1) Planele MAC şi MBD conţin dreapta MO. De aceea ele sînt perpendiculare pe planul $(ABCD)$. Deoarece $MO\perp AC$ şi $AO=OC$, rezultă $MA=MC$. Analog $MB=MD$.

2) Dreapta OM este axă de simetrie pentru piramida $MABCD$. De aceea secţiunea cu

un plan ce trece prin MO și este perpendicular pe AD, respectiv BC determină unghiuri plane egale. Aceasta înseamnă că afirmația din enunț este adevărată.

3) Deoarece $VD \perp DA, DB, DC$, avem $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AD}{VD}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{BD}{VD}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{CD}{VD}$. Astfel relația dată implică $BD^2 = AD^2 + CD^2$, adică $ABCD$ trebuie să fie un dreptunghi.

2.151. Baza unei piramide $OABCD$ este trapezul $ABCD$ cu baza mică $AB=3$ cm și baza mare $CD=5$ cm. Știind că planele fețelor laterale OAD și OBC se taie după o perpendiculară pe bază, că aria feței laterale OAB este de 9 cm^2 și că aria feței laterale OCD este de 20 cm^2, să se găsească volumul piramidei.

(Facultatea de matematică, București, 1977)

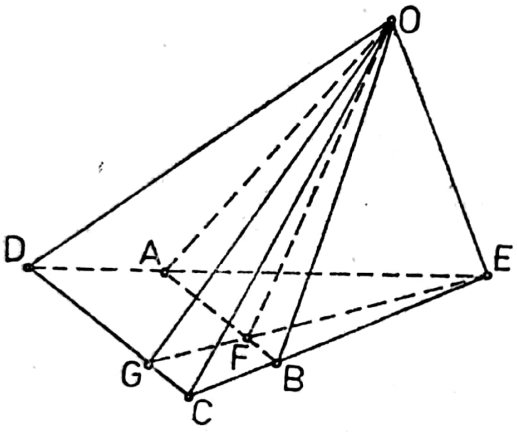


Fig. 88.

Soluție (fig. 88). Fie $\{E\} = DA \cap CB$, iar F și G punctele în care perpendiculara din E pe DC întîlnește pe AB, respectiv DC.

Notăm $GF=x, FE=y$. Deoarece $\Delta ABE \sim \Delta DCE$ avem $\frac{y}{x+y} = \frac{3}{5}$, adică $2y=3x$.

Deoarece $OE \perp$ pe (DCE) și $EF \perp AB$, $EG \perp DC$, teorema celor trei perpendiculare ne arată că $OG \perp DC$ și $OF \perp AB$. Astfel $\frac{DC \cdot OG}{2} = 20$, $\frac{AB \cdot OF}{2} = 9$ și deci $OG=8$, $OF=6$. Apoi din triunghiurile dreptunghice EGO, EFO găsim $OE^2 = OG^2 - (x+y)^2 = OF^2 - y^2$. De aceea $x^2 + 2xy = 28$.

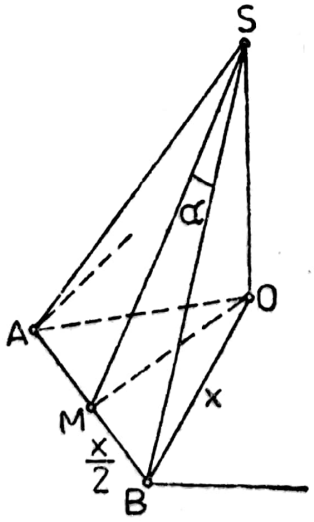


Fig. 89.

Ecuațiile în x și y dau $x=\sqrt{7}$, $y=\frac{3\sqrt{7}}{2}$; cu acestea găsim $OE = \frac{9}{2}$ și $\operatorname{vol}(OABCD) = \frac{OE}{3}\text{aria}\ (ABCD) = \frac{OE}{3}\frac{(DC+AB)x}{2} = 6\sqrt{7}$.

2.152. Să se calculeze volumul unei piramide hexagonale regulate cunoscînd înălțimea ei h și unghiul 2α format de muchiile egale ale unei fețe laterale. Pentru ce valori ale unghiului α este posibilă problema?

(I. P. București, 1976)

Soluție. Fie $AB=x$ o latură a hexagonului, M mijlocul lui AB și SO înălțimea

piramidei (fig. 89, a 6-a parte din piramidă). Avem $OB=x$ și din triunghiurile dreptunghice SOM și SOB găsim $\frac{x}{2}=SB\sin\alpha$ și $SB^2=x^2+h^2$. Rezultă $\frac{x^2}{4}=(x^2+h^2)\sin^2\alpha$, de unde $x^2=\frac{4h^2\sin^2\alpha}{1-4\sin^2\alpha}$. Această egalitate ne arată că problema are sens numai dacă $1-4\sin^2\alpha>0$, adică $\sin\alpha<\frac{1}{2}$ (deoarece $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$), de unde $\alpha<\frac{\pi}{6}$. Volumul piramidei este

$$V=\frac{h}{3}\cdot S_{hex}=\frac{h}{3}\cdot 6\cdot\frac{x\cdot OM}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}hx^2=\frac{2\sqrt{3}h^3\sin^2\alpha}{1-4\sin^2\alpha},$$

Notă. Determinarea valorilor lui α pentru care este posibilă problema se poate face și astfel: triunghiul MOB este proiecția triunghiului MSB pe planul bazei; deoarece $\sphericalangle MOB=\frac{\pi}{6}$, rezultă $\sphericalangle MSB=<\frac{\pi}{6}$;

2.153. O piramidă, cu baza un hexagon regulat înscris într-un cerc de rază R, are muchiile laterale egale cu $L=R\sqrt{2}$. Să se calculeze:

1) Volumul și aria totală a piramidei.

2) Aria hexagonului rezultat prin secționarea piramidei cu un plan paralel cu planul bazei, la distanța x de vîrf.

3) Raportul dintre volumul sferei circumscrise și volumul sferei înscrise piramidei date.

(Facult. de arhitectură, Timișoara, 1974)

Soluție (fig. 90). 1) În general, $L_n=2R\sin\frac{\pi}{n}$, $a_n=R\cos\frac{\pi}{n}$. Pentru $n=6$ rezultă $L_6=R$, $a_6=R\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $S=\text{aria}\,(BCDEFG)=p\cdot a_6=3R\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$; $V=S\cdot\frac{h}{3}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R}{3}=\frac{R^3\sqrt{3}}{2}$, $A_t=A_{baza}+A_{lat}$. Apotema unei fețe laterale este $A_n=\frac{R\sqrt{7}}{2}$ și deci $A_{lat}=6\cdot\frac{R\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{R}{2}=\frac{3R^2\sqrt{7}}{2}$, $A_t=\frac{3R^2\sqrt{7}}{2}+\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3R^2}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})$.

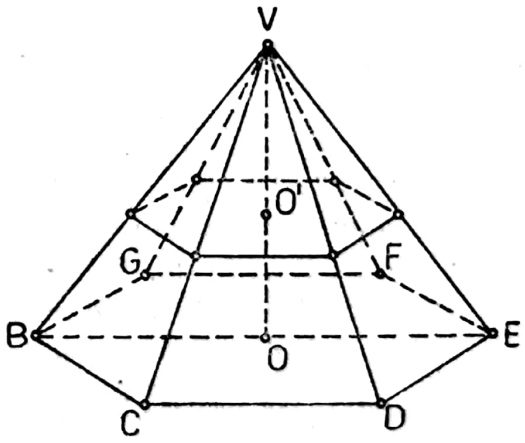


Fig. 90.

2) Cele două piramide sînt corpuri „asemenea"; deci

$$\frac{V_x}{V}=\frac{S_x\cdot VO'}{S\cdot VO}=\left(\frac{VO'}{VO}\right)^3 \text{ sau } S_x=\left(\frac{x}{R}\right)^2\cdot\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}.$$

3) Deoarece centrele sferelor se află în planul de simetrie VBE al piramidei, $r=\frac{2\text{aria}(VBE)}{2VB+BE}=\frac{R}{1+\sqrt{2}}$, iar $\rho=R$ (deoarece $\sphericalangle BVE=\frac{\pi}{2}$). Raportul volumelor sferelor este

$$k=\frac{\rho^3}{r^3}=\frac{R^3}{R^3}(1+\sqrt{2})^3=7+5\sqrt{2}.$$

2.154. Se consideră, în spațiu, trei semidrepte Ox, Oy și Oz formînd, două cîte două, unghiuri de 60°. Pe semidreapta Ox se ia un punct A astfel încît $OA=2a$. Să se determine distanțele de la punctul A la semidreptele Oy și Oz și la planul yOz.

(I. P. București, 1977)

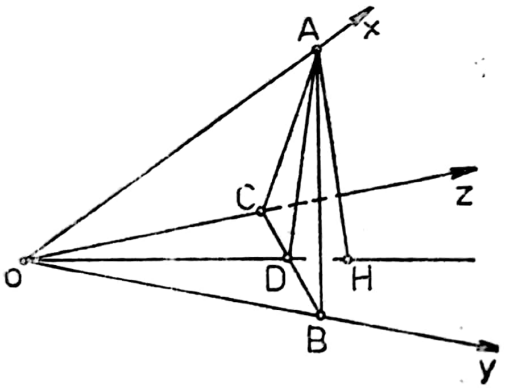


Fig. 91.

Soluție. Fie B, C, D, H proiecțiile lui A, respectiv pe Oy, Oz, BC și yOz (fig. 91). Teorema celor trei perpendiculare ne arată că $OD\perp BC$.

Deoarece $\sphericalangle OAC=\sphericalangle OAB=30°$, avem $AC=AB=a\sqrt{3}$, $OC=OB=a$. În plus, ipoteza $\sphericalangle BOC=60°$ implică faptul că triunghiul BOC este echilateral și astfel $BC=a$, $DC=\frac{a}{2}$, $OD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Cu acestea găsim $AD^2=AC^2-DC^2=\frac{11a^2}{4}$, iar din $AD^2=OA^2+OD^2-2OD\cdot OH$ (*teorema lui Pitagora generalizată*) deducem $OH=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. În sfîrșit, $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

2.155. Un triunghi ABC, dreptunghic în A are catetele $AB=4k$ și $AC=3k$. Pe perpendiculara în A la planul acestui triunghi se ia punctul S astfel încît $AS=4k$. Fie M punctul variabil de pe segmentul AC astfel ca $AM=x$. Se secționează tetraedrul $SABC$ cu un plan paralel cu muchiile SA și BC obținîndu-se secțiunea $MNPQ$ cu perimetrul L dat.

1) Să se arate că $x=\frac{3(L-8k)}{2}$ și că $8k<L<10k$.

2) Să se determine aria triunghiului SBC, distanța de la vîrful A la planul SBC precum și raza r a sferei înscrisă în tetraedrul $SABC$.

3) Să se arate că aria secțiunii $MNPQ$ este maximă pentru $x=\frac{3k}{2}$.

(Inst. de arhitectură București. 1972)

Soluție (fig. 92). Din ipoteze rezultă $MN||BC||PQ$, $MQ||NP||AS$, $MQ\perp NM$. Astfel, secțiunea $MNPQ$ este un dreptunghi. În plus, $BC=\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=5k$.

1) Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul ANM. Rezultă $\frac{x}{3k}=\frac{NM}{5k}=\frac{PQ}{5k}$. Analog $\Delta MQC\sim\Delta ASC$. Astfel $\frac{3k-x}{3k}=\frac{MQ}{4k}$. Introducînd pe PQ și pe MQ în $PQ+MQ=\frac{1}{2}L$ deducem $x=\frac{3}{2}(L-8k)$.

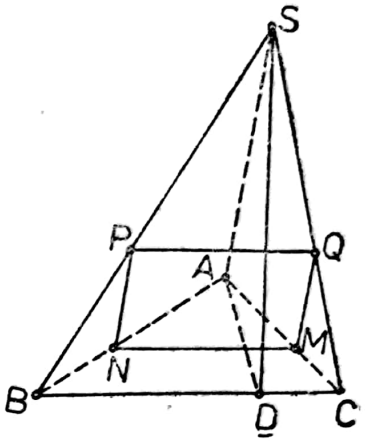


Fig. 92.

Relația $0<x<3k$, adică $0<\frac{3}{2}(L-8k)<3k$, implică $8k<L<10k$.

2) Fie SD înălțimea triunghiului SBC. Deoarece $AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{12k}{5}$ și $SA\perp AD$, rezultă $SD=\sqrt{\frac{144k^2}{25}+16k^2}=\frac{4k\sqrt{34}}{5}$. De aceea aria $(SBC)=\frac{BC\cdot DS}{2}=2\sqrt{34}\,k^2$ și

$$h=\frac{4\text{vol}\,(SABC)}{\text{aria}\,(SBC)}=\frac{AS\cdot AB\cdot AC}{2\,\text{aria}\,(SBC)}=\frac{48\,k^3}{4\sqrt{34k^2}}=\frac{12k}{\sqrt{34}}.$$

Deoarece segmentele care unesc centrul sferei respectiv cu punctele de tangență ale fețelor sînt perpendiculare respectiv pe fețe, piramida poate fi descompusă în „subpiramide" în care aceste segmente să fie înălțimi. De aceea $r[\text{aria}\,(ABC)+\text{aria}\,(ABS)+\text{aria}\,(ACS)+\text{aria}\,(BSC)]=3$ vol $(SABC)$. Pe de altă parte aria $(ABC)=6k^2$, aria $(ABS)=8k^2$, aria $(ACS)=6k^2$, aria $(BCS)=2\sqrt{34}k^2$, vol $(SABC)=8k^3$. Astfel $r=\frac{12k}{10+\sqrt{34}}$.

3) aria $(MNPQ)=MN\cdot MQ=\frac{20}{9}(3kx-x^2)$. Binomul are valoarea maximă $\Leftrightarrow x=\frac{3k}{2}$.

2.156. Se consideră un romb $ABCD$ cu unghiurile $\sphericalangle B=\sphericalangle D<90°$, diagonalele $AC=2a$, $BD=2b$, intersectîndu-se în O. Se duce din A o perpendiculară pe BC care taie pe BD în H.

1) Să se calculeze lungimea segmentului AH în funcție de a și b.

2) Să se determine unghiurile rombului știind că latura sa este medie proporțională între diagonalele sale.

3) Să se calculeze tangenta trigonometrică a unghiurilor rombului știind că aria laterală a corpului născut prin rotirea sa în jurul diagonalei BD este egală cu dublul ariei sferei de diametru AC.

(I. P. București, 1972)

Soluție (fig. 93). 1) Observăm că aria $(ABC)=ab=\frac{AE\cdot BC}{2}=\frac{AE}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. De aceea $AE=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Pe de altă parte, patrulaterul $OHEC$ este inscriptibil, lucru ce implică $AH\cdot AE=AO\cdot AC$. Din acestea găsim $AH=\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$.

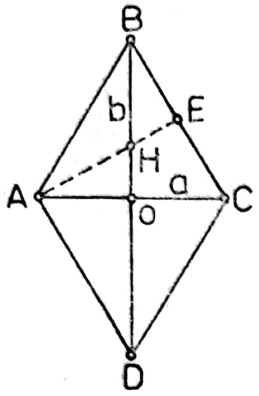


Fig. 93.

2) Egalitățile $AB^2=4ab$, $a=AB\sin\frac{B}{2}$, $b=AB\cos\frac{B}{2}$ implică $\sin B=\frac{1}{2}$, adică $\sphericalangle B=30°$ și deci $\sphericalangle A=150°$.

3) Prin rotirea rombului în jurul lui BD ia naștere un corp format din două conuri egale. Aria acestui corp este $2\pi a\sqrt{a^2+b^2}$. Egalitatea $2\pi a\sqrt{a^2+b^2}=8\pi a^2$ implică $\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}$. Cu acestea găsim

$$\operatorname{tg}B=\frac{2\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Apoi $\operatorname{tg}C=-\frac{\sqrt{15}}{7}$.

2.157. Un trapez dreptunghic $ABCD$ (AB baza mare, CD baza mică, $AB\perp AD$) se rotește în jurul bazei mari. Cunoscînd $AB=13$ cm, $CD=10$ cm, $BC=5$ cm, se cere să se calculeze volumul și aria totală a corpului astfel generat.

(I. P. București, 1977)

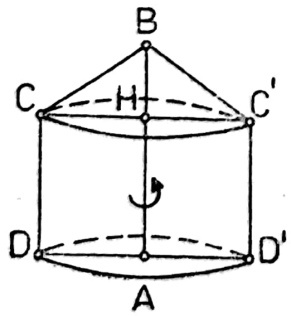


Fig. 94.

Soluție. Ducînd $CH\perp AB$ (fig. 94) găsim $CH=\sqrt{BC^2-HB^2}=4$ cm. Deoarece corpul generat prin rotația trapezului este format dintr-un cilindru și un con, avem $V=\pi\cdot CH^2\cdot DC+\frac{1}{3}\pi\cdot CH^2\cdot HB=176\,\pi$ cm^3 și $A=\pi\cdot CH^2+2\pi\cdot CH\cdot DC+\pi\cdot CH\cdot CB=116\,\pi$ cm^2.

2.158. Mijlocul unui segment de dreaptă AC de lungime dată $2R$ se notează cu B. Pe AB și AC ca diametre se construiesc două semicercuri de aceeași parte a dreptei AC. O secantă variabilă ce trece prin A taie cele două semicercuri în D, respectiv E. Notînd cu x unghiul format de secanta variabilă cu dreapta AC, să se exprime în funcție de R și x volumul corpului obținut prin rotația triunghiului CDE în jurul dreptei AC.

(Institutul de mine, Petroșani, 1974)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție (fig. 95). Volumul este $V=\frac{\pi}{3}D'E'(DD'^2+EE'^2+DD'\cdot EE')+$ $+\frac{\pi}{3}E'C\cdot EE'^2-\frac{\pi}{3}D'C\cdot DD'^2$.

Deoarece $EE'=EC\cos x=2R\sin x\cos x$, $DD'=\frac{EE'}{2}=R\sin x\cos x$, $AE'=$ $=EE'\operatorname{ctg}x=2R\cos^2 x$, $AD'=\frac{AE'}{2}=R\cos^2 x$, $E'C=$ $=2R-AE'=2R\sin^2 x$, $D'E'=AE'-AD'=AD'=$ $=R\cos^2 x$, $D'C=2R-AD'=R(1+\sin^2 x)$, rezultă că $V=\frac{\pi}{3}R\cos^2 x(R^2\sin^2 x\cos^2 x+4R^2\sin^2 x\cos^2 x+$ $+2R^2\sin^2 x\cos^2 x)+\frac{\pi}{3}2R\sin^2 x\cdot 4R^2\sin^2 x\cos^2 x-$ $-\frac{\pi}{3}R(1+\sin^2 x)R^2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{\pi}{3}R^3(7\sin^2 x\cos^4 x+8\sin^4 x\cos^2 x-$ $-\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x\cos^2 x)=\frac{\pi}{3}R^3\cdot 6\sin^2 x\cos^2 x=\frac{\pi R^3}{2}\sin^2 2x$.

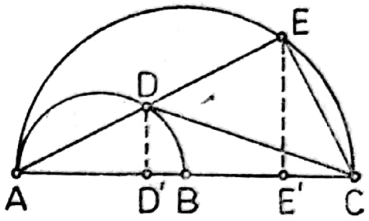


Fig. 95.

2.159. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Pe latura AB a acestuia se ia un punct M. Dreptele DM și CM taie laturile BC și AD respectiv în punctele P și N.

1) Presupunînd M fix și segmentele $AD=a$, $AM=m$, $MB=n$ date, să se afle aria trapezului $CDNP$.

2) În condițiile de la punctul 1) să se afle volumul V al corpului generat de trapezul $ABPN$ prin rotirea lui în jurul laturii AB.

3) În aceleași condiții, să se calculeze aria corpului obținut prin rotirea triunghiului CMD în jurul lui AB.

4) Să se verifice că aria triunghiului MNP rămîne constantă cînd M variază pe AB.

(Facultatea de arhitectură, Timișoara, 1974)

Soluție (fig. 96). 1) Din $\Delta MNA\sim\Delta MCB$ rezultă $\frac{AN}{BC}=\frac{MA}{MB}$, sau $AN=\frac{am}{n}$. Analog, $BP=\frac{an}{m}$. Rezultă aria $(ABPN)=\frac{a(m^2+n^2)(m+n)}{2mn}$ și aria $(CDNP)=\frac{a(m+n)^3}{2mn}$.

2) $V=\frac{\pi}{3}AB(BP^2+AN^2+BP\cdot AN)=\frac{\pi}{3}a^2(m+n)\left(\frac{n^2}{m^2}+\right.$ $\left.+\frac{m^2}{n^2}+1\right)$.

3) Aria totală a corpului se sumează din ariile laterale ale unui cilindru și două conuri:

$A_{rot}=2\pi AD\cdot CD+\pi BC\cdot CM+\pi AD\cdot DM=2\pi a(m+n)+$ $+\pi a\sqrt{a^2+n^2}+\pi a\sqrt{a^2+m^2}=\pi a(2(m+n)+\sqrt{a^2+n^2}+$ $+\sqrt{a^2+m^2})$.

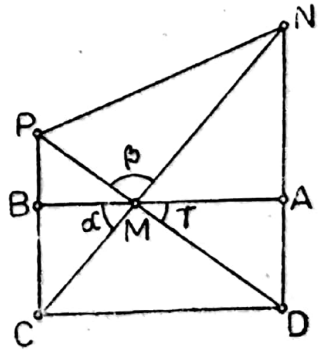


Fig. 96.

4) O variantă trigonometrică: aria $(PMN)=\frac{1}{2}PM\cdot MN\sin\beta$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{n}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{a}{m}$, $PM=\frac{n}{\cos\gamma}$, $MN=\frac{m}{\cos\alpha}$. Deoarece $\sin\beta=\sin(\alpha+\gamma)$, rezultă că aria $(PMN)=\frac{1}{2}\cdot\frac{mn}{2\cos\alpha\cos\gamma}\sin(\alpha+\gamma)=\frac{1}{2}mn(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma)=\frac{1}{2}mn\left(\frac{a}{n}+\frac{a}{m}\right)=\frac{a}{2}(m+n)=\frac{1}{2}$ aria $(ABCD)=$const.

2.160. Într-un con circular drept de rază R și înălțime h se face o secțiune plană printr-un plan paralel cu baza conului, situat la distanța x de vîrf. Se consideră conul care are ca bază această secțiune și avînd vîrful în centrul bazei conului dat. Să se determine x astfel ca volumul conului construit în felul acesta să fie maxim și să se calculeze apoi aria totală a conului de volum maxim determinat mai sus.

(I. P. Cluj-Napoca, 1973)

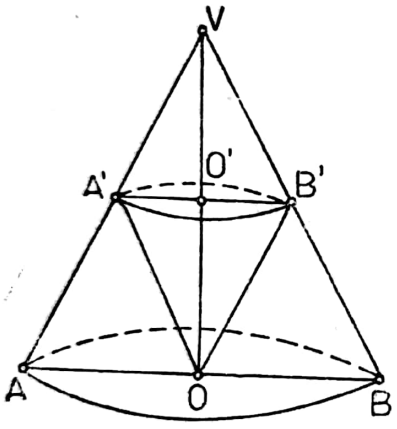


Fig. 97.

Soluție (fig. 97). Din $\Delta VO_1B'\sim\Delta VOB$ rezultă că $O_1B'=\frac{Rx}{h}$; $OO_1=h-x$, $OB'=\sqrt{\frac{R^2x^2}{h^2}+(h-x)^2}$.

$$V_{A'B'O}=\frac{\pi}{3}OO_1\cdot O_1B'^2=\frac{\pi}{3}(h-x)\frac{R^2x^2}{h^2}=\frac{\pi}{3}\frac{R^2}{h^2}x^2(h-x).$$

Fie $f(x)=x^2(h-x)$.

Deoarece $f'(x)=2hx-3x^2$, rezultă că $f'(x)=0$ pentru $x=0$, $x=\frac{2h}{3}$; $x=\frac{2h}{3}$ este valoarea lui x pentru care V este maxim: $V_{max}=\frac{4\pi R^2h}{81}$; $A_{tot}=\pi O_1B'\cdot B'O+\pi O_1B'^2=\pi\frac{2R}{9}\sqrt{4R^2+h^2}+\pi\frac{4R^2}{9}=\frac{2\pi R}{9}(\sqrt{4R^2+h^2}+2R)$.

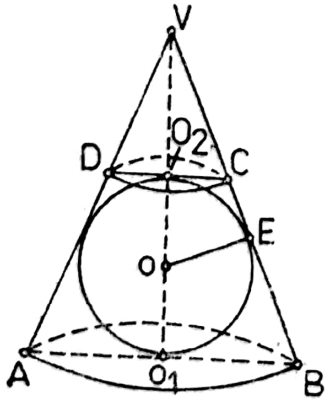


Fig. 98.

2.161. Un con circular drept care are raza bazei R și înălțimea $h=2R$ se taie cu un plan paralel cu planul bazei, determinînd astfel un trunchi de con cu înălțimea d.

1) Să se calculeze volumul acestui trunchi de con în funcție de R și d.

2) Să se determine d în funcție de R astfel ca în acest trunchi de con să se poată înscrie o sferă.

(Ingineri, 1978)

Soluție (fig. 98). 1) Fie $r=O_2C$. Din $\Delta VO_2C\sim\Delta VO_1B$ rezultă $\frac{VO_2}{VO_1}=\frac{O_2C}{O_1B}$, adică $\frac{2R-d}{2R}=\frac{r}{R}$

sau $r=R-\frac{d}{2}$. Cu acestea putem calcula volumul $V=\frac{\pi d}{3}\left[R^2+R\left(R-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{d}{2}\right)+\left(R-\frac{d}{2}\right)^2\right]=\frac{\pi d}{12}(12R^2-6Rd+d^2)$.

2) Se pune condiția $O_2C+O_1B=BC$, adică $r+R=G$, unde G este generatoarea trunchiului de con. Pe de altă parte $G^2=d^2+(R-r)^2$. Din acestea găsim $d=R(\sqrt{5}-1)$.

2.162. Un trunchi de con are aria laterală $4\pi a^2$ și înălțimea a, iar generatoarea sa este egală cu suma razelor bazelor. Să se calculeze în funcție de a razele bazelor și aria laterală a conului din care provine trunchiul.

(I. P. București, 1976)

Soluție. Notînd $OA=R$, $O'E=r$, avem $AE=R+r$, $FA=R-r$ (fig. 99). Din $\pi(R+r)^2=4\pi a^2$ rezultă $R+r=2a$. Pe de altă parte $R-r=FA=\sqrt{AE^2-FE^2}=\sqrt{(R+r)^2-a^2}=a\sqrt{3}$. Astfel găsim $R=a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $r=a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

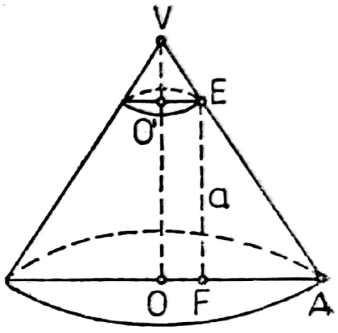


Fig. 99.

Din asemănarea triunghiurilor $VO'E$ și VOA rezultă $\frac{O'E}{OA}=\frac{VE}{VA}$, adică $\frac{r}{R}=\frac{VA-(R+r)}{VA}$. De aici obținem $VA=\frac{R(R+r)}{R-r}=a\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ și deci aria laterală a conului va fi $\pi R\cdot VA=\frac{\pi a^2}{6}(12+7\sqrt{3})$.

2.163. Într-un con circular drept este înscrisă o sferă. Știind că raportul dintre volumul conului și volumul sferei este m, să se găsească raportul dintre aria totală a conului și aria sferei, în funcție de m.

(I. P. București, 1975)

Soluție. Fie r raza conului, h înălțimea conului și R raza sferei (fig. 100). Avem $V_s=\frac{4\pi R^3}{3}$; $A_s=4\pi R^2$, $V_c=\frac{\pi r^2 h}{3}$, $A_c=\pi r^2+\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. Observăm că

$$\frac{V_s}{A_s}=\frac{R}{3}. \tag{1}$$

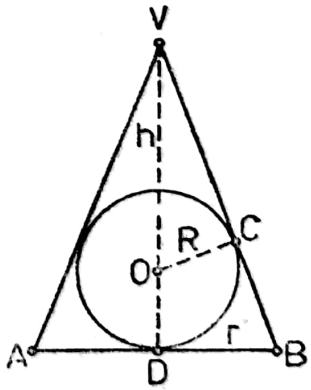


Fig. 100.

Pe de altă parte, din asemănarea triunghiurilor VOC și VBD deducem $\frac{h-R}{\sqrt{r^2+h^2}}=\frac{R}{r}$. Aceasta implică $\frac{rh}{r+\sqrt{r^2+h^2}}=R$.

Astfel

$$(2)\qquad \frac{V_c}{A_c}=\frac{1}{3}\,\frac{rh}{r+\sqrt{r^2+h^2}}=\frac{R}{3}.$$

Deoarece $\frac{V_c}{V_s}=m$, relaţiile (1) şi (2) ne dau $\frac{A_c}{A_s}=m$.

2.164. Un con circular drept cu generatoarea a, are trei generatoare perpendiculare două cîte două.

1) Să se afle volumul conului.

2) Să se afle aria sferei înscrisă în acest con.

3) Să se afle raportul ariilor calotelor determinate de cercul de tangenţă al sferei cu conul.

(I. P. Cluj, 1973)

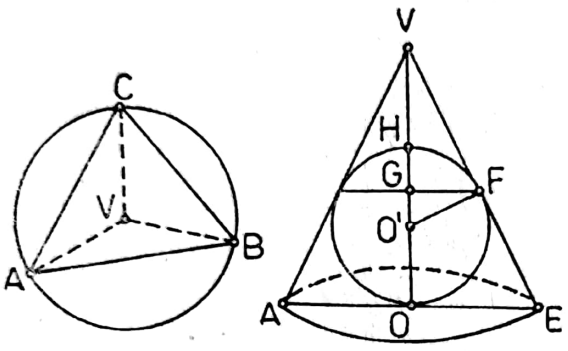


Fig. 101.

Soluţie (fig. 101). 1) Deoarece $VA=VB=VC=a$ şi $AV\perp CV\perp BV$, triunghiul ABC este echilateral şi $AB=a\sqrt{2}$. Ţinînd seama de legătura dintre raza R a cercului circumscris triunghiului ABC şi latura AB, găsim $R=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Apoi, egalităţile $VA=a$, $AO=R$ conduc la

$$VO=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\quad\text{şi}\quad V=\frac{\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}}{3}=\frac{2\pi a^3}{9\sqrt{3}}.$$

2) Raza sferei înscrisă în con este $O'F$. Dar $\frac{O'F}{OE}=\frac{VO'}{VE}=\frac{VO-O'O}{VE}$, $O'O=O'F$ şi de aici găsim $O'F=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, iar $A=\frac{8\pi a^2}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

3) Succesiv avem

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{2\pi O'F\cdot GH}{2\pi O'F\cdot OG}=\frac{GH}{OG}=\frac{O'H-O'G}{OO'+O'G}=\frac{O'F-O'F\sin\sphericalangle O'FG}{O'F+O'F\sin\sphericalangle O'FG}=\frac{1-\sin\sphericalangle OVE}{1+\sin\sphericalangle OVE}=$$

$$=\frac{1-\frac{OE}{VE}}{1+\frac{OE}{VE}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2.$$

2.165. În interiorul unui con circular drept se consideră două sfere determinate prin condiţiile: sferele au centrele pe axa conului şi sînt tangente exterior între ele; ambele sfere sînt tangente generatoarelor conului, iar cea

mai mare dintre ele este tangentă de asemenea planului bazei conului. Presupunînd cunoscute razele r şi R ale celor două sfere, să se determine:

1) semisuma razelor cercurilor formate din punctele de tangenţă ale sferelor cu generatoarele conului,

2) volumul conului.

(Facultatea de matematică-mecanică, Iaşi, 1970)

Soluţie (fig. 102). 1) Deoarece tangentele duse dintr-un punct la un cerc sînt egale, avem $HM=HT=HF$. Pe de altă parte $MP||HT||FD$. De aceea TH este linie mijlocie în trapezul $DPMF$ şi deci $TH=\frac{1}{2}(PM+DF)$, unde PM şi DF sînt razele cercurilor formate din punctele de tangenţă ale sferelor cu generatoarele conului. Astfel $TH=\frac{1}{2}(r+R)\cos\alpha$, unde $\alpha=\sphericalangle O_1FD=\sphericalangle O_2MP=\sphericalangle BCO$.

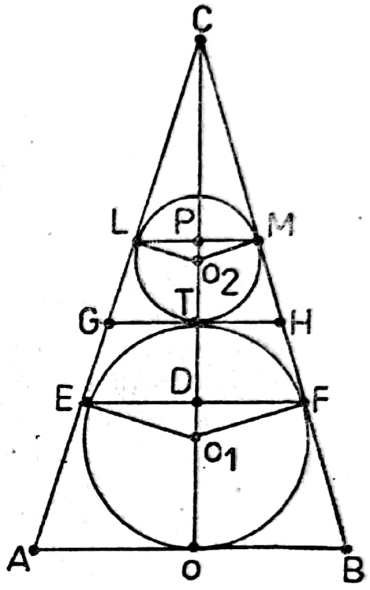


Fig. 102.

Din $r=O_2M=O_2C\sin\alpha$, $R=O_1F=O_1C\sin\alpha$ găsim $R-r=(R+r)\sin\alpha$, iar de aici $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{rR}}{r+R}$. Cu acestea avem $TH=\sqrt{rR}$.

2) Din $\frac{O_1F}{OB}=\frac{CF}{CO}$ deducem $\frac{R}{OB}=\frac{CO_1\cos\alpha}{CO_1+CO_1\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$, adică $OB=\frac{R(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{R\sqrt{R}}{\sqrt{r}}$. Apoi $OC=OB\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2R^2}{R-r}$.

Astfel, $V=\frac{\pi\cdot OB^2\cdot OC}{3}=\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$.

2.166. Un trunchi de con este circumscris unei sfere de rază egală cu unitatea; se ştie că raportul numerelor care măsoară volumul şi suprafaţa laterală a trunchiului de con este un număr dat m. Să se calculeze razele x şi y ale bazelor trunchiului de con. Să se discute rezultatul în funcţie de parametrul real m.

(I. P. Braşov, 1970)

Soluţie. În figura 103 avem $CE=CG$, $BF=BG$, respectiv ca tangente duse dintr-un punct la un cerc. Apoi observăm că $(x+y)^2=2^2+(y-x)^2$, adică $xy=1$.

Dacă notăm $x+y=t$, atunci trunchiul de con are volumul $\frac{2}{3}\pi(t^2-1)$ şi aria laterală πt^2. Impunînd condiţia din text găsim $2(t^2-1)=3mt^2$, adică $(2-3m)t^2=2$. Pentru ca această ecuaţie să aibă soluţii în t se impune $2-3m>0$, adică $m<\frac{2}{3}$.

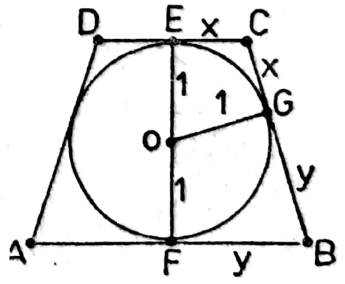


Fig. 103.

Astfel găsim sistemul

$$\begin{cases} x+y=t=\sqrt{\dfrac{2}{2-3m}};\left(0<m<\dfrac{2}{3}\right) \\ xy=1, \end{cases}$$

care este echivalent cu ecuația $z^2-z\sqrt{\dfrac{2}{2-3m}}+1=0$. Această ecuație trebuie să aibă rădăcinile pozitive, distincte x și y. Deoarece produsul xy și suma $x+y$ sînt pozitive, rămîne să impunem condiția $\Delta=\left(\sqrt{\dfrac{2}{2-3m}}\right)^2-4=\dfrac{6(2m-1)}{2-3m}>0$. Rezultă $\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{2}{3}$ și $x=\dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{6m-3})}{2\sqrt{2-3m}}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{6m-3})}{2\sqrt{2-3m}}$.

2.167. Două sfere de centre O, O_1 și raze R, R_1 ($R_1<R$) sînt tangente exterior. Să se afle aria laterală a trunchiului de con ce are ca baze cercurile de tangență cu cele două sfere ale conului circumscris sferelor.

(I. P. Iași, 1973)

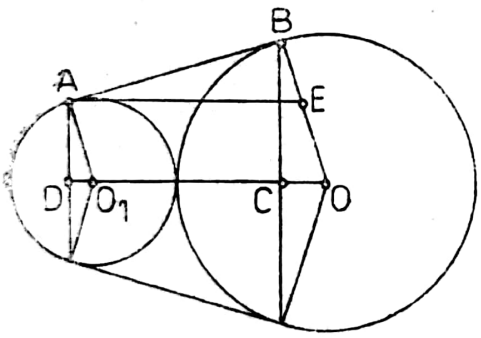


Fig. 104.

Soluție (fig. 104). Aria laterală este $A_{lat}=\pi AB(BC+AD)$. Deoarece $AEOO_1$ — paralelogram, $AE=OO_1=R+R_1$, iar $BE=R-R_1$. Din ΔABE — dreptunghic, $AB=\sqrt{AE^2-BE^2}=2\sqrt{R\cdot R_1}$. Deoarece $\sphericalangle EAB=\sphericalangle OBC$ (au laturi perpendiculare), rezultă $\Delta EAB\sim\Delta OBC$ și deci $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{OB}{AE}$ sau $BC=\dfrac{2R\sqrt{R\cdot R_1}}{R+R_1}$. Analog se obține $AD=\dfrac{2R_1\sqrt{R\cdot R_1}}{R+R_1}$ din $\Delta O_1AD\sim\Delta OBC$. În final, $A_{lat}=4\pi R\cdot R_1$.

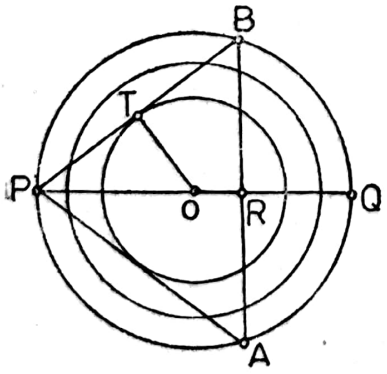


Fig. 105.

2.168. Fie S_1, S_2, S_3 trei sfere cu centrul O și razele r_1, r_2, r_3 date încît $r_1<r_2<r_3$, $r_1^2+r_2^2=r_3^2$. Fie P un punct pe sfera S_3.

1) Să se calculeze în funcție de r_1 și r_2 ariile laterale A_1 și A_2 ale conurilor cu vîrful în P înscrise în sfera S_3 și tangente la sferele S_1, respectiv S_2.

2) În cazul în care $A_1=A_2\sqrt{3}$ să se calculeze unghiurile pe care le fac generatoarele celor două conuri cu dreapta OP.

(Ingineri, 1978)

Soluție I. Presupunem că baza conului „tangent" la sfera S_1 nu este tangentă la sfera S_1 (fig. 105).

1) Atunci din triunghiul dreptunghic PTO găsim $PT=\sqrt{r_3^2-r_1^2}=r_2$. Se observă însă că T este mijlocul lui PB; deci $TB=r_2$ și $BQ=2r_1$. Din asemănarea $\Delta PTO\sim\Delta PRB$ deducem $\frac{BR}{r_1}=\frac{2r_2}{r_3}$, adică $BR=\frac{2r_1r_2}{r_3}$. Astfel $A_1=$

$=\pi BR\cdot PB=\frac{4\pi r_1r_2^2}{r_3}=\frac{4\pi r_1r_2^2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$.

Analog $A_2=\frac{4\pi r_1^2r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$.

2) Relația $A_1=A_2\sqrt{3}$ implică $r_2=r_1\sqrt{3}$ și deci $r_3=2r_1$. De aceea unghiurile cerute sînt $\theta_1=30°$, $\theta_2=60°$.

II. Presupunem că baza conului „tangent" la sfera S_1 este tangentă la sfera S_1. În acest caz $BT=BR=r_2$, ca tangente duse din B la primul cerc. Rezultă că ABP este un triunghi echilateral și deci $\sphericalangle OPT=30°$. Aceasta implică $r_3=2r_1$, $r_2=r_1\sqrt{3}$ și deci $\frac{A_1}{A_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

III. În ipotezele din problemă, baza conului „tangent" la sfera S_2 nu poate fi tangentă la sfera S_2.

2.169. Se dă o sferă S de centru O și de rază R și un segment fix AB de lungime l; din punctul M variabil pe S se duce dreapta (d) paralelă cu AB pe care se consideră punctul N astfel încît $MN=AB$. Se cere locul geometric al punctului N.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1970)

Soluție (fig. 106). Din O ducem segmentul OC paralel și egal cu AB. Deoarece $MN\equiv AB$, rezultă $MN\equiv OC$ și de aceea figura $OCNM$ este un paralelogram. Astfel $CN=OM=R$. Cum însă C este un punct fix rezultă că N va descrie o sferă cu centrul în C și de rază R.

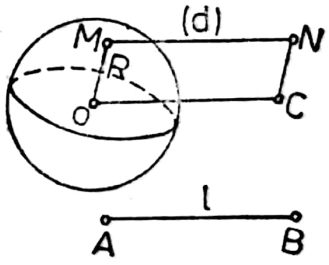


Fig. 106.

2.170. Un punct mobil M descrie un cerc cu centrul O situat în planul P; A fiind un punct fix în spațiu să se determine poziția punctului M astfel încît aria triunghiului OAM să fie maximă.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1970)

Soluție. Construim fig. 107; notăm cu A' proiecția lui A pe planul P. Deoarece aria $(OAM)=\frac{OM\cdot OA\sin\sphericalangle(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})}{2}$ și $OM=\text{const}$, maximul va fi atins pentru $\sin\sphericalangle(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})=1$, adică pentru $MO\perp OA$. Ținînd seama de una din reciprocele teoremei celor trei perpendiculare, deducem $OM\perp A'O$.

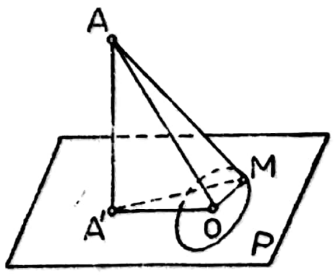


Fig. 107.

2.171. Un punct mobil M din spațiu se rotește în jurul dreptei (D) într-un plan perpendicular pe (D), descriind un cerc de rază r și de centru $O \in (D)$. Să se determine pozițiile punctului M astfel încît distanța dintre (D) și dreapta AM, A fiind un punct fix din spațiu, să fie maximă. Discuție. (Prin definiție distanța dintre două drepte în spațiu este lungimea segmentului de pe perpendiculara comună, cu extremitățile pe cele două drepte.)

(Facultatea de matematică-mecanică, București. 1970)

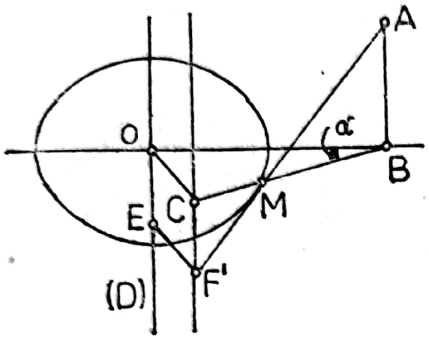


Fig. 108.

Soluție. 1) Presupunem că proiecția B a lui A pe planul cercului este exterioară (fig. 108). Din O ducem perpendiculara OC pe BM. Deoarece $OC \perp AB$ rezultă că OC este perpendiculară pe planul determinat de AB și AM. Acestea împreună cu $OC \perp (D)$ arată că dreapta OC dă direcția perpendicularei comune. Prin C ducem o paralelă la (D) care se întîlnește cu AM în F; prin F ducem o paralelă EF la OC. Evident segmentul $EF(=OC)$ reprezintă distanța dintre dreptele (D) și AM. Notînd $\sphericalangle OBC = \alpha$ avem $EF = OC = OB \sin \alpha$; α = unghi ascuțit. De aceea EF este maxim cînd α = maxim; unghiul α este maxim cînd BM este tangentă la cerc și $C \equiv M$. Maximul distanței este r și se atinge în punctele de tangență ale tangentelor duse din B la cerc.

2) Presupunem că B aparține cercului. În acest caz $EF = OC = OB \sin \alpha$ este maxim cînd $\alpha = \frac{\pi}{2}$, adică $B \equiv M$.

3) Presupunem că B cade în interiorul cercului. În această situație $EF = OC = OB \sin \alpha$ este maxim pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$, adică $BM \perp OB$. Maximul este OB și acesta se atinge în punctele M de intersecție a cercului cu perpendiculara dusă prin B pe OB (în planul cercului).

Scanned with OKEN Scanner

TRIGONOMETRIE

2.172. Fiind dat unghiul $\alpha \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right)$, să se arate că unghiurile x și y supuse condițiilor $\alpha < x < y < 2\pi$ verifică sistemul

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin \alpha = 0 \\ \cos x + \cos y + \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

dacă și numai dacă

$$x = \alpha + \frac{2\pi}{3}, \quad y = \alpha + \frac{4\pi}{3}.$$

(I. P. București, 1977)

Soluție. Observăm că

$$\begin{cases} x = \alpha + \frac{2\pi}{3} \\ y = \alpha + \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (1) \begin{cases} \frac{y+x}{2} = \alpha + \pi \\ \frac{y-x}{2} = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin \alpha = 0 \\ \\ \cos x + \cos y + \cos \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (2) \begin{cases} 2 \sin \frac{y+x}{2} \cos \frac{y-x}{2} = \sin(\alpha + \pi) \\ \\ 2 \cos \frac{y+x}{2} \cos \frac{y-x}{2} = \cos(\alpha + \pi). \end{cases}$$

Evident (1)$\Rightarrow$(2) și sînt mai multe ipoteze decît este necesar.

Invers, să arătăm că (2), împreună cu celelalte ipoteze din problemă, implică pe (1). Mai întîi observăm că $\alpha < x < y < 2\pi$, $\alpha \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right)$ ne conduc

la $\alpha<\frac{y+x}{2}<2\pi$, $0<\frac{y-x}{2}<\pi$. De asemenea (2) ne arată că $\frac{y-x}{2}\neq\pi/2$. De aceea, din $\operatorname{tg}\frac{y+x}{2}=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)$, $\alpha<\frac{y+x}{2}<2\pi$, deducem $\frac{y+x}{2}=\alpha+\pi$ și apoi din $\cos\frac{y-x}{2}=\frac{1}{2}$, $0<\frac{y-x}{2}<\frac{\pi}{2}$, găsim $\frac{y-x}{2}=\frac{\pi}{3}$.

2.173. Să se rezolve ecuația trigonometrică

$$\sin(x+a)+\cos(3x+a)+\sin(5x+a)+\cos(7x+a)=0,$$

unde a este un unghi dat.

(I. P. București, 1976)

Soluție Grupăm primul termen cu al treilea și al doilea cu al patrulea. Transformînd în produse, obținem

$$2\sin(3x+a)\cos 2x+2\cos(5x+a)\cos 2x=0 \text{ sau}$$

$$\cos 2x\,[\sin(3x+a)+\cos(5x+a)]=0.$$

Din $\cos 2x=0$ găsim $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$. Apoi avem $\cos(5x+a)=-\sin(3x+a)=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x+a\right)$. Aceasta implică

$$5x+a=\pm(\pi/2+3x+a)+2m\pi,\ m\in Z,$$

care ne dă

$$x=\frac{\pi}{4}+m\pi \quad \text{sau} \quad x=-\pi/16-a/4+m\pi/4.$$

2.174. Să se rezolve ecuația

$$2^{\sin x+\sin 2x}=32^{\frac{\sin 3x}{a}}.$$

(I. P. Galați, 1970)

Soluție. Evident $a\neq 0$. În plus observăm că ecuația se transcrie astfel

$$2^{\sin x+\sin 2x}=2^{5\frac{\sin 3x}{a}}.$$

Deoarece bazele sînt egale, rezultă $a(\sin x+\sin 2x)=5\sin 3x$. Ținînd seama că $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\sin 3x=\sin x(3-4\sin^2 x)=\sin x(4\cos^2 x-1)$, găsim

$$\sin x(20\cos^2 x-2a\cos x-5-a)=0.$$

Din $\sin x=0$ deducem $x=k'\pi$, $k'\in Z$. Apoi observăm că ecuația

$$20\cos^2 x-2a\cos x-5-a=0,$$

are soluțiile $\cos x_1 = -\frac{1}{2}$, $\cos x_2 = \frac{a+5}{10}$. Prima conduce la $x_1 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$, iar a doua dă $x_2 = \pm\arccos\frac{a+5}{10} + 2m\pi$, $m \in Z$, numai dacă $\frac{a+5}{10} \in [-1, 1]$, adică $a \in [-15, 0) \cup (0, 5]$.

2.175. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\cos ax + \cos 3ax + \cos 5ax}{\sin ax + \sin 3ax + \sin 5ax} = \sqrt{3}.$$

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1970)

Soluție. Evident se impune condiția $a \neq 0$. Deoarece $\cos ax + \cos 5ax = 2\cos 3ax \cos 2ax$, $\sin ax + \sin 5ax = 2\sin 3ax \cos 2ax$ ecuația se transcrie în forma

$$\frac{(1+2\cos 2ax)\cos 3ax}{(1+2\cos 2ax)\sin 3ax} = \sqrt{3}.$$

Aceasta impune $1+2\cos 2ax \neq 0$, $\sin 3ax \neq 0$ și $\operatorname{ctg} 3ax = \sqrt{3}$. De aceea $x = \frac{\pi}{18a} + \frac{k\pi}{3a}$, $k \in Z$.

2.176. Se dau $f(x) = a\cos x - \sin x$, $g(x) = a^2\cos^2 x - \sin^2 x$, $h(x) = (a^2-1)\cos 2x - 2a\sin 2x + a^2 + 1$, unde a este un parametru real.

1) Să se arate că $h(x) = 2f^2(x)$, $\forall x$.
2) Să se rezolve ecuația $f(x) = g(x)$ pentru $a = 1$.
3) Să se transforme $g(x)$ în produs de funcții trigonometrice.

(I. P. Timișoara, 1975)

Soluție. 1) Avem $2f^2(x) = 2a^2\cos^2 x + 2\sin^2 x - 4a\sin x\cos x = a^2(1+\cos 2x) - (\cos 2x - 1) - 2a\sin 2x = (a^2-1)\cos 2x - 2a\sin 2x + a^2 + 1 = h(x)$, $\forall x$.

2) Pentru $a = 1$, ecuația $f(x) = g(x)$ devine $\cos x - \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Rezultă $\cos x - \sin x = 0$, adică $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$, sau $\cos x + \sin x = 1$, adică $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și deci $x = 2l\pi$, $2l\pi + \frac{\pi}{2}$, $l \in Z$.

3) Se observă că $g(x) = (a\cos x - \sin x)(a\cos x + \sin x)$. Deoarece $a \in R$ putem pune $a = \operatorname{tg}\alpha$. Cu aceasta găsim $g(x) = \frac{\sin(\alpha - x)\sin(\alpha + x)}{\cos^2\alpha}$.

2.177. Să se determine valorile lui m pentru care ecuația $\sqrt{1-\cos 2x} + \sqrt{1+\cos 2x} = m$ admite soluții în intervalul $I = [0, \pi]$. Pentru $m = \sqrt{2}$ să se determine soluțiile acestei ecuații, care se găsesc în intervalul I.

(I. P. București, 1976)

Soluție. Deoarece $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, ecuația dată este echivalentă cu $\sin x+|\cos x|=\frac{m}{\sqrt{2}}$, $x\in[0,\ \pi]$ sau cu:

$$\sin x+\cos x=\frac{m}{\sqrt{2}},\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \text{ și } \sin x-\cos x=\frac{m}{\sqrt{2}},\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right].$$

Acestea se pot aduce la forma

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{m}{2},\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \text{ și } \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{m}{2},\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right],$$

Deoarece $\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right]$ rezultă $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{m}{2}\leqslant 1$, adică $m\in[\sqrt{2},\ 2]$.

Pentru $m=\sqrt{2}$ găsim $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$ și $x_3=\pi$.

2.178. Se dă expresia

$$E(x,\ m)=\cos 2x+m\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}},$$

1) Să se exprime $E(x,\ m)$ în funcție numai de $\sin x$ și apoi să se rezolve ecuația $E(x,\ 1)=0$.

2) Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuația $E(x,\ m)=0$ admite soluții.

(I. P. București, 1975)

Soluție. 1) Deoarece $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ găsim

$$E(x,\ m)=-2\,|\sin x|^2+m|\sin x|+1.$$

În particular, $-E(x,\ 1)=2\,|\sin x|^2-|\sin x|-1=0$ ne conduce la

$$|\sin x|=\frac{1+\sqrt{1+8}}{4}=1,\ \text{adică } x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$$

2) Prezentăm rezolvarea sub forma unui șir de implicații:

$$E(x,\ m)=0\Rightarrow 2\,|\sin x|^2-m\,|\sin x|-1=0\Rightarrow 2t^2-mt-1=0,$$

$t=|\sin x|\in[0,\ 1]\Rightarrow t=\frac{m+\sqrt{m^2+8}}{4}\in(0,\ 1]\Rightarrow m+\sqrt{m^2+8}\leqslant 4,\ m\leqslant 1$. Ecuația în t nu poate avea două rădăcini pe $[0,\ 1]$.

2.179. Se dă ecuația

$$\cos^2 x-2a\cos x+b=0$$

cu necunoscuta $\cos x$.

1) Ce relații trebuie să satisfacă a și b pentru ca ecuația dată să admită soluții distincte?

2) Dacă $\cos x_1$ și $\cos x_2$ sînt rădăcinile ecuației anterioare, atunci să se formeze ecuația care admite rădăcinile $\cos 2x_1$ și $\cos 2x_2$.

(I. P. București, 1972)

Soluție. 1) Mai întîi se impune condiția $\Delta'=a^2-b>0$. Deoarece necunoscuta este $\cos x$ trebuie să avem $-1\leqslant\cos x_1\leqslant 1$, $-1\leqslant\cos x_2\leqslant 1$. Facem ipoteza $\cos x_1<\cos x_2$ și observăm că ea implică

$$-1\leqslant\cos x_1<\frac{\cos x_1+\cos x_2}{2}<\cos x_2\leqslant 1.$$

Această situație este asigurată dacă impunem

$$\begin{cases}-1\leqslant a\leqslant 1\\ f(-1)\cdot f\left(\frac{\cos x_1+\cos x_2}{2}\right)=-(1+2a+b).\ \Delta'\leqslant 0\\ f(1)\cdot f\left(\frac{\cos x_1+\cos x_2}{2}\right)=-(1-2a+b).\ \Delta'\leqslant 0.\end{cases}$$

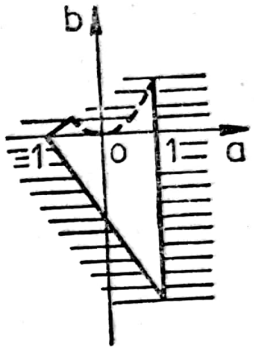


Fig. 109.

Astfel ecuația dată admite soluții distincte dacă a și b satisfac relațiile $-1\leqslant a\leqslant 1$, $a^2-b>0$, $1+2a+b\geqslant 0$, $1-2a+b\geqslant 0$, adică punctele de coordonat $(a,\ b)$ aparțin regiunii din fig. 109.

2) Avem $\cos x_1+\cos x_2=2a$, $\cos x_1\cos x_2=b$. De aceea găsim $\cos 2x_1+\cos 2x_2=2\cos^2 x_1-1+2\cos^2 x_2-1=2(\cos^2 x_1+\cos^2 x_2)-2=2[(\cos x_1+\cos x_2)^2-2\cos x_1\cos x_2]-2=2(4a^2-2b-1)$; $\cos 2x_1\cos 2x_2=(2\cos^2 x_1-1)(2\cos^2 x_2-1)=4\cos^2 x_1\cos^2 x_2-2(\cos^2 x_1+\cos^2 x_2)+1=(2b+1)^2-8a^2$. Astfel ecuația căutată este

$$\cos^2 2x-2(4a^2-2b-1)\cos 2x+(2b+1)^2-8a^2=0.$$

2.180. Să se arate că ecuația

$$m\sin 2x-\sqrt{2}(m-2)\cos 2x=\sqrt{2}\,m\sin x$$

are soluții oricare ar fi m real și să se rezolve. Să se afle mulțimea valorilor lui m astfel ca toate soluțiile dependente de m să fie arce din cadranul doi. Să se verifice rezultatul.

(Facultatea de studii economice, Timișoara, 1971)

Soluție. Succesiv putem scrie

$$2m\sin x\cos x-\sqrt{2}(m-2)(2\cos^2 x-1)-\sqrt{2}\,m\sin x=0,$$

$$(\sqrt{2}\cos x-1)[m\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}(m-2)(\sqrt{2}\cos x+1)]=0.$$

Ecuația $\sqrt{2}\cos x-1=0$ dă $x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$. Ecuația $m\sqrt{2}\sin x-2(m-2)\cos x=\sqrt{2}(m-2)$ este de forma $a\sin x+b\cos x=c$.

Dacă $m=2$, atunci ecuația se reduce la $\sin x=0$, adică $x=k\pi$, $k\in Z$. Dintre acestea numai $x=(2l+1)\pi$, $l\in Z$ sînt în cadranul doi.

Pentru $m\neq 2$ ecuația admite soluții numai dacă $c^2\leqslant a^2+b^2$, relație care în cazul nostru se verifică; exprimînd pe $\sin x$ și $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ găsim

$$(1)\qquad (m-2)(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2m\operatorname{tg}\frac{x}{2}-(m-2)(\sqrt{2}+1)=0,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{-m\pm\sqrt{2[(m-1)^2+1]}}{(m-2)(\sqrt{2}-1)}.$$

Explicitarea arcelor x este evidentă.

Să presupunem că toate soluțiile ecuației (1) dau arce în cadanul doi, adică $\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}(\text{mod. } 2\pi)$. Rezultă $1\leqslant\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\infty$, adică se impune condiția ca ambele soluții ale lui (1) să fie supraunitare. Pe de altă parte se observă că pentru $m\neq 2$ produsul rădăcinilor lui (1) este $-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=-(\sqrt{2}+1)^2<0$, adică o rădăcină este negativă și alta este pozitivă, ceea ce contrazice enunțul inițial.

2.181. Să se rezolve ecuația

$$(1)\qquad \sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$$

(Universitatea Craiova, 1971)

Soluție. Deoarece $\sin x+\sin 3x=2\sin 2x\cos x$ găsim $\sin 2x(2\cos x+1)=0$. Rezultă $\sin 2x=0$, adică $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$ sau $\cos x=-\frac{1}{2}$, adică $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2l\pi$, $l\in Z$.

Observație. Ecuația (1) poate fi considerată ca un caz particular al ecuației

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{n}\sin kx=0.$$

Pentru rezolvarea ecuației (2), împreună cu $F=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ se consideră și expresia $E=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ și se observă că $E+iF=\sum_{k=1}^{n}(\cos kx+i\sin kx)=\sum_{k=1}^{n}(\cos x+i\sin x)^k$. Dacă se pune $z=\cos x+i\sin x$, rezultă

$$E+iF=\begin{cases} z\frac{z^n-1}{z-1}, & z\neq 1,\\ n, & z=1.\end{cases}$$

Pe de altă parte $z\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{z^{\frac{n}{2}+1}}{z^{1/2}}\cdot\frac{z^{\frac{n}{2}}-z^{-\frac{n}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}=z^{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ și $z=1\Leftrightarrow\cos x+$ $+i\sin x=1\Leftrightarrow\{\cos x=1,\ \sin x=0\}\Leftrightarrow x=2m\pi,\ m\in Z$. Astfel

$$E=\begin{cases}\cos\frac{(n+1)x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, & x\neq 2m\pi,\\ n, & x=2m\pi,\end{cases}\qquad m\in Z,$$

$$F=\begin{cases}\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, & x\neq 2m\pi,\\ 0, & x=2m\pi.\end{cases}\qquad m\in Z.$$

Ecuația (2) este echivalentă cu $F(x)=0$. De aceea soluțiile ei sînt

$$\left\{\frac{2p\pi}{n+1}\,\middle|\,p\in Z\right\}\cup\left\{\frac{2q\pi}{n}\,\middle|\,q\in Z\right\}.$$

Ecuația $E=0$ este echivalentă cu $\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=0,\ x\neq 2m\pi,\ m\in Z$.

Astfel ea are soluțiile $\left\{\frac{(2p+1)\pi}{n+1}\,\middle|\,p\in Z\right\}\cup\left\{\frac{2q\pi}{n}\,\middle|\,q\in Z,\ \frac{q}{n}\notin Z\right\}$.

2.182. Se dă ecuația

$$(m-2)\cos 6x+(6-m)\sin 3x+4-m=0,\ m\in R.$$

1) Să se rezolve ecuația.
2) Să se discute ecuația.

(Inst. petrol și gaze, Ploiești, 1976)

Soluție. 1) Trecînd la $\sin 3x$, ecuația devine

$$2(m-2)t^2+(m-6)t-2=0,\ t=\sin 3x.$$

Soluțiile sînt: $t_1=-\frac{1}{2}$, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in Z$, iar pentru $t_2=\frac{2}{m-2}$, $x=\frac{(-1)^{k'}}{3}\arcsin\frac{2}{m-2}+\frac{k'\pi}{3}$, $k'\in Z$, dacă $t_2=\frac{2}{m-2}\in[-1,1]$. În caz contrar, lui t_2 nu-i corespund soluții ale ecuației trigonometrice.

Scanned with OKEN Scanner

2) Discuția după $m\in R$ rezultă din observația de mai sus; pentru $t_2\in[-1, 1]$, adică $m\in(-\infty, 0]\cup[4, \infty)$, rezultă existența soluției ecuației $\sin 3x=t_2$, iar dacă $t_2\notin[-1, 1]$, ecuația $\sin 3x=t_2$ nu are soluții.

Observație. S-a obținut o problemă de forma: să se rezolve ecuația $P(\sin \alpha x)=0$, $\alpha\in R$, unde $P(t)$ este un polinom algebric. (Analog, $P(\cos \alpha x)=0$.)

Pentru a rezolva o asemenea problemă, dintre soluțiile ecuației algebrice $P(t)=0$ se reține cele care satisfac $t_j\in S$, $S=\{t_j|P(t_j)=0, t_j\in[-1, 1], j\in J\subset N\}$, cărora le corespund ecuațiile trigonometrice $\sin \alpha x=t_j$, cu soluțiile

$$x=(-1)^k\cdot\frac{1}{\alpha}\arcsin t_j+\frac{k\pi}{\alpha},\ k\in Z.$$

2.183. Să se determine valorile lui x pentru care are loc egalitatea

$$1-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x+\ldots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x+\ldots=\frac{\sqrt{2}\cos x}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$$

(*Facultatea de matematică, Craiova*, 1972)

Soluție. Avem $1-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x+\ldots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x+\ldots=$(prin definiție),

$$\lim_{n\to\infty}[1-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x+\ldots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\begin{cases}n+1, & \operatorname{tg} x=-1\\ \dfrac{1-(-1)^n\operatorname{tg}^n x}{1+\operatorname{tg} x}, & \operatorname{tg} x\neq -1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x}, & |\operatorname{tg} x|<1\\ \pm\infty \text{ sau nu există}, & |\operatorname{tg} x|\geqslant 1.\end{cases}$$

Deoarece $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x}=\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{\sqrt{2}\cos x}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$, problema pusă se reduce la găsirea soluției inecuației $|\operatorname{tg} x|<1$. Aceasta este $x\in\bigcup\limits_{k\in Z}\left(k\pi-\frac{\pi}{4}, k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$.

2.184. Să se rezolve ecuația $\dfrac{1}{a^{\sin x+1}-1}=\dfrac{1}{1-a^{\sin x}}$, $a>0$, $a\neq 1$ și să se discute după valorile lui $a\left(x\neq k\pi,\ x\neq(4m-1)\frac{\pi}{2}\right)$.

(*Silvicultură și exploatări forestiere, Brașov*, 1974)

Soluție. Ecuația devine $a^{\sin x}=\dfrac{2}{1+a}$, sau $\sin x=\log_a\dfrac{2}{1+a}$. Se impun restricțiile $\dfrac{2}{1+a}>0$, $-1<\log_a\dfrac{2}{1+a}\leqslant 1$, $\log_a\dfrac{2}{1+a}\neq 0$, $a>0$, $a\neq 1$; $\dfrac{2}{1+a}<0$ implică $a\in(-1, \infty)$ și cu restricția $a>0$ rezultă $a\in(0, \infty)$.

Fie $a\in(0, 1)$; din $\log_a\dfrac{2}{1+a}\in(-1, 1]$ se obțin inecuațiile $a\leqslant\dfrac{2}{1+a}<\dfrac{1}{a}$, care conduc la mulțimea admisibilă $(0, 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $a\in(1,\ \infty)$; în acest caz, $\frac{1}{a}<\frac{2}{1+a}\leqslant a$ se verifică pe întreaga mulțime $(1,\ \infty)$.

Soluția ecuației este $x=(-1)^k \arcsin \log_a \frac{2}{1+a}+k\pi,\ k\in Z$.

2.185. Să se arate că nu există nici un număr $\lambda\in R-\{-1,\ 0,\ 1\}$ astfel ca ecuația $(1-\lambda^2)\sin 3x+2\lambda\cos 3x=(1+\lambda^2)^2$ să aibă soluție.

(I. P. București, 1973)

Soluție. Cu alte cuvinte trebuie arătat că $\forall\lambda\in R-\{-1,\ 0,\ 1\}$ ecuația dată este o imposibilitate. Împărțim ambii membri ai ecuației prin $1+\lambda^2$ și notînd $\lambda=\operatorname{tg}\varphi/2$, găsim $\cos\varphi\sin 3x+\sin\varphi\cos 3x=1+\lambda^2$ sau $\sin(\varphi+3x)=1+\lambda^2>1$, care este o imposibilitate.

2.186. Să se arate că dacă $x\to f(x)=\sin x+\cos\alpha x$ este o funcție periodică, atunci α este un număr rațional.

(I. P. București, 1973)

Soluție. Prin ipoteză $\exists T\neq 0$ astfel încît $f(x)=f(x+T)$, $\forall x$, adică $\sin x+\cos\alpha x=\sin(x+T)+\cos\alpha(x+T)$, $\forall x$.

Pentru $x=0$, respectiv $x=-T$, găsim $(-\sin T)+\cos\alpha T=1$, $-\sin T+\cos\alpha T=1$. De aici deducem $\sin T=0$, adică $T=k_1\pi, k_1\in Z, k_1\neq 0$ și $\cos\alpha T=1$, adică $\alpha T=2k\pi$, $k\in Z$. Astfel găsim $\alpha=\frac{2k}{k_1}$.

2.187. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3^{\cos 2x+\cos 2y}=1 \\ 4^{\cos x\cos y}=2. \end{cases}$$

(I. P. Galați, 1970)

Soluție. Mai întîi scriem sistemul în forma

$$\begin{cases} 3^{\cos 2x+\cos 2y}=3^0 \\ 2^{2\cos x\cos y}=2^1. \end{cases}$$

Avînd baze respectiv egale, exponenții trebuie să fie egali, adică

$$\begin{cases} \cos 2x+\cos 2y=0 \\ 2\cos x\cos y=1. \end{cases}$$

Deoarece $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, $\cos 2y=2\cos^2 y-1$, sistemul precedent este echivalent cu

$$\begin{cases} u^2+v^2=1 \\ 2uv=1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} u+v=\pm\sqrt{2} \\ uv=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

unde $u=\cos x$, $v=\cos y$. Se găsește $u=v=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. De accea $x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $y=\pm\frac{\pi}{4}+2l\pi$, $k, l\in Z$ sau $x=\pm\frac{3\pi}{4}+m\pi$, $y=\pm\frac{3\pi}{4}+n\pi$, $m, n\in Z$.

2.188. Se consideră expresia

$$E(x)=\sin x+\cos x+\sin^3 x+\cos^3 x+\sin^5 x+\cos^5 x.$$

1) Notînd $\sin x+\cos x=a$, se cere să se exprime $E(x)$ numai în funcție de a.

2) Să se determine valorile lui a pentru care ecuația $\sin x+\cos x=a$ admite soluții.

3) Să se rezolve ecuația $E(x)=0$.

(I. P. București, 1974)

Soluție. 1) Formularea acestei întrebări nu impune determinarea mulțimii valorilor pe care le poate lua parametrul real a pentru ca relația $\sin x+\cos x=a$ să existe. Dar evident, această mulțime nu este vidă.

Ridicînd la pătrat în ambii membri, din $\sin x+\cos x=a$ obținem $\sin x\cos x=\frac{a^2-1}{2}$. Utilizînd acest rezultat și identități cunoscute deducem succesiv $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)[(\sin x+\cos x)^2-3\sin x\cos x]=\frac{a(3-a^2)}{2}$, $\sin^5 x+\cos^5 x=(\sin x+\cos x)(\sin^4 x-\sin^3 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos^3 x+\cos^4 x)=(\sin x+\cos x)[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x]=(\sin x+\cos x)\{[(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x]^2-\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x\}=a\left[1-\frac{a^2-1}{2}-\frac{(a^2-1)^2}{4}\right]$.

Rezultă

$$E(x)=\frac{a}{4}[16-(a^2+1)^2].$$

2) Ecuația $\sin x+\cos x=a$ este echivalentă cu $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Deoarece valorile cosinusului sînt cuprinse între -1 și $+1$, ecuația dată admite soluții dacă și numai dacă $a\in[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Aceste soluții sînt

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos a+2k\pi,\ a\in[-\sqrt{2}, \sqrt{2}],\ k\in Z.$$

3) Ecuația $E(x)=\frac{a}{4}[16-(a^2+1)^2]=0$, $a\in[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, admite numai soluția $a=0$. Astfel $x=-\frac{\pi}{4}+m\pi$, $m\in Z$.

2.189. Fie $a, b, c\in R$. Să se arate că egalitatea $a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x=0$ există oricare ar fi $x\in R$ dacă și numai dacă $a=b=c=0$.

(I. P. București, 1973)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Dacă $a=b=c=0$, atunci evident $a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x=0$, $\forall x\in R$.

Pentru raționamentul reciproc este suficient ca egalitatea $a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x=0$ să aibă loc numai pentru $x=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ (liniaritate în a, b, c). Într-adevăr, acestea implică

$$\begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{b\sqrt{3}}{2}+c=0 \\ a+b=0 \\ a-c=0, \end{cases}$$

adică $a=b=c=0$.

2.190. Să se rezolve ecuația $\ln[\operatorname{tg}(x-|x|)]=0$.

(I. P. Iași, 1971)

Soluție. Existența logaritmului impune $\operatorname{tg}(x-|x|)>0$, iar existența tangentei impune $x-|x|\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$. În aceste condiții ecuația dată este echivalentă cu $\operatorname{tg}(x-|x|)=1$, adică $x-|x|=\frac{\pi}{4}+l\pi$, $l\in Z$. Explicitînd modulul ajungem la $x=l\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$, $l=$ întreg negativ, par.

2.191. Se consideră ecuația de gradul trei

$$x^3-13x\cos^2\alpha-12\cos 2\alpha=0,$$

unde α este un parametru real. Să se determine valorile lui α astfel încît una din rădăcinile ecuației să fie de trei ori mai mare decît o altă rădăcină a ecuației și în această ipoteză, să se găsească toate rădăcinile.

(Facultatea de matematică-mecanică, Cluj, 1972)

Soluție. Lîngă relațiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-13\cos^2\alpha$, $x_1x_2x_3=12\cos 2\alpha$, adăugăm $x_1=3x_2$. Acestea implică $x_2^2=\cos^2\alpha$ și $x_2^3=-\cos 2\alpha$. De aceea condiția de compatibilitate este $\pm\cos^3\alpha=-\cos 2\alpha$, adică $\cos^3\alpha+2\cos^2\alpha-1=0$ pentru $x_2=\cos\alpha$, sau $\cos^3\alpha-2\cos^2\alpha+1=0$ pentru $x_2=-\cos\alpha$. Prima ecuație admite soluțiile $\cos\alpha=-1$, $\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, adică $\alpha=\pm\pi+2k\pi$, $k\in Z$ sau $\alpha=\pm\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+2l\pi$, $l\in Z$; a doua ecuație ne conduce la $\cos\alpha=1$ sau $\cos\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, adică $\alpha=2m\pi$, $m\in Z$; $\alpha=\pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+2n\pi$, $n\in Z$.

Pentru $\alpha=k\pi$, $k\in Z$, găsim $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=+4$; pentru $\alpha=\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2l\pi$, $l\in Z$ sau pentru $\alpha=\pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+2n\pi$, $n\in Z$, avem $x_1=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x_3=-2(\sqrt{5}-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

2.192. Se consideră expresia $E(x;\ p,\ q)=p\sin 3x+q\sin 2x$.

1) Să se rezolve și să se discute ecuația $E(x;\ 1,\ 1)=n\sin x$.

2) Să se găsească valoarea expresiei $E(x;\ p,\ q)$ pentru $p=1$, $q=\dfrac{1-a^2}{2\sqrt{1+a^2}}$ și $1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{a}\operatorname{tg}x=\dfrac{2}{a}\dfrac{1}{1-\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}}$, unde $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$, $a<0$.

3) Să se determine n astfel ca ecuația

$$E\left(x;\ 1,\ \frac{1-a^2}{2\sqrt{1+a^2}}\right)=\frac{n}{\sqrt{1+a^2}}$$

să aibă în raport cu a o rădăcină mai mare decît 2 și cealaltă mai mică decît 2 (x are valoarea de la punctul 2)).

(Facultatea de studii economice, Timișoara, 1970)

Soluție. 1) Rezolvarea acestui punct este analogă cu soluția problemei 2.174 dată la *I.P. Galați* în 1970.

2) Înlocuind $\operatorname{tg}x=\dfrac{2\operatorname{tg}x/2}{1-\operatorname{tg}^2 x/2}$, $\operatorname{ctg}x/2=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x/2}$, ecuația se reduce la $a\operatorname{tg}^2 x/2+2\operatorname{tg}x/2-a=0$. Deoarece $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ aceasta are numai soluția $\operatorname{tg}x/2=\dfrac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\in(-\infty,\ 0)$. Punînd $a=\operatorname{tg}\varphi$ și ținînd seama că $\operatorname{tg}\varphi/2=\dfrac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\varphi}$, deducem $x=\varphi+2k\pi$, $k\in Z$ (adică $a=\operatorname{tg}x$). Astfel, $E\left(\varphi+2k\pi,\ 1,\ \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}\right)=\sin 3\varphi+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos^2\varphi$. (Ținem seama că în cadranul doi $\cos\varphi<0$.)

3) Ecuația dată se scrie $2\sin\varphi\cos^2\varphi=\dfrac{n}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$. Deoarece φ ia valori în cadranul doi, aceasta devine $2\sin\varphi\cos^2\varphi=-n\cos\varphi$ sau $\sin 2\varphi=-n$. Astfel se impune ca $n\in[-1,\ 1]$. Deoarece $\sin 2\varphi=\dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ ajungem la ecuația de gradul doi $na^2+2a+n=0$. Notînd cu $f(a)$ membrul stîng, condiția ca 2 să fie între rădăcini este $n\cdot f(2)<0$ sau $n(5n+4)<0$. Cu acestea găsim $n\in\left(-\dfrac{4}{5},\ 0\right)$.

2.193. Fie expresia

$$E(x,\ \lambda)=\frac{2(1-\lambda)\cos^2 2x+\cos 2x+(2\lambda-1)}{\lambda\sin^2 x+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)},$$

1) Să se arate că expresia nu depinde de parametrul λ.

2) Să se rezolve ecuația $E(x,\ \lambda)=0$ în raport cu x.

(I. P. Brașov, 1971)

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. 1) Evident, se impune ca numitorul să fie diferit de zero, adică funcţia definită de E există pe $R^2-\left\{(x,\lambda)|\lambda\sin^2 x+\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=0\right\}$.

Succesiv găsim

$$E(x,\ \lambda)=\frac{2\cos^2 2x-1+2\lambda(1-\cos^2 2x)+\cos 2x}{\lambda\sin^2 x-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x}=$$

$$=\frac{4(1+\cos 2x)[2\lambda(1-\cos 2x)+2\cos 2x-1]}{4\lambda\sin^2 x+2\cos 2x-1}=4(1+\cos 2x).$$

2) Din $1+\cos 2x=0$ deducem $\cos 2x=-1$, adică $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$.

Dar $\lambda\sin^2(2k+1)\frac{\pi}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{6}+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=0$ implică $\lambda=\frac{3}{4}$. De aceea, pentru $\lambda\neq\frac{3}{4}$ ecuaţia $E(x,\lambda)=0$ admite soluţiile $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$; pentru $\lambda=\frac{3}{4}$ expresia $E\left(x,\ \frac{3}{4}\right)=4(1+\cos 2x)$ există numai pentru $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ şi deci ecuaţia $E\left(x,\frac{3}{4}\right)=0$ nu are soluţii.

Observaţie. De fapt $E(x,\ \lambda)=4(1+\cos 2x)$ depinde de λ, dar nu în mod explicit, ci prin restricţiile care determină domeniul de definiţie al funcţiei $(x,\ \lambda)\to E(x,\ \lambda)$.

2.194. Să se arate că expresia

$$E(x,\ m)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\frac{m}{2}\cos^2 x}{[(2-m)\cos 2x-(m+1)]\cos 4x}$$

nu depinde de m.

(Universitatea Timişoara, 1975)

Soluţie. Domeniul de definiţie A al funcţiei, $f\colon A\to R$ definită de expresia precedentă, este $A=R^2-(\{(x,\ m)|(2-m)\cos 2x-(m+1)=0\}\cup\cup\{(x,\ 0)|\cos 4x=0\})$. Se ştie că (vezi probl. 35) o condiţie necesară şi suficientă ca $E(x,\ m)$ să nu depindă de m este ca raportul coeficienţilor aceloraşi puteri ale lui m de la numărător şi respectiv numitor să fie constant, deci

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{2\cos 4x\cos 2x-\cos 4x}=\frac{\frac{1}{2}\cos^2 x}{\cos 4x(\cos 2x+1)}$$

(cu convenţia că dacă un numitor este nul pe A, atunci şi numărătorul trebuie să fie nul). Făcînd transformări echivalente, găsim

$$\frac{\frac{1}{4}(2\cos 2x-1)}{2(2\cos 2x-1)}=\frac{\frac{1}{2}\cos^2 x}{\cos 2x+1}=\frac{1}{2},$$

ceea ce trebuia verificat.

Scanned with OKEN Scanner

2.195. Se consideră funcția

$$x \to f(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \; k \in Z,$$

și se cere:

1) Să se arate că există o constantă A și un unghi $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încît $f(x) = A \sin(\alpha + x)$.

2) Să se arate că există un număr natural m astfel încît

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = \operatorname{tg} mx + \sec mx.$$

3) Să se rezolve ecuația $f(x) + (2+\sqrt{3}) f(-x) = 0$.

(I. P. București, 1970)

Soluție. 1) Succesiv găsim

$$f(x) = \frac{\left[\sin\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right)\right]\left[\sin\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Deci $A = \sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2) Evident, pentru $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + l\pi$; $k, l \in Z$, avem

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \sec 2x + \operatorname{tg} 2x.$$

Astfel $m = 2$.

3) Ecuația dată se transcrie astfel

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + (2+\sqrt{3}) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

sau

$$\cos x + \sin x + (2+\sqrt{3})(\cos x - \sin x) = 0.$$

De aici găsim $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, adică $x = \frac{\pi}{3} + p\pi$, $p \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

2.196. Se consideră funcţia reală de variabilă reală

$$x \to f(x) = a_1 \sin(x + b_1) + a_2 \sin(x + b_2) + \ldots + a_n \sin(x + b_n),$$

unde $a_i,\ b_i \in R,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Să se arate că dacă $f(0) = 0$ şi dacă există o valoare $x_0 \neq k\pi,\ k \in Z$, astfel încît $f(x_0) = 0$, atunci $f(x) = 0$ pentru orice $x \in R$.

(I. P. Bucureşti, 1973)

Soluţie. Scriem pe f în forma $f(x) = A \sin x + B \cos x$, unde $A = a_1 \cos b_1 + \ldots + a_n \cos b_n$, $B = a_1 \sin b_1 + \ldots + a_n \sin b_n$. Din $f(0) = 0$, rezultă $B = 0$ şi din $f(x_0) = 0$, $x_0 \neq k\pi$ rezultă $A = 0$. De aceea $f(x) \equiv 0$.

2.197. Cum trebuie să fie numărul natural n astfel ca $y = \cos n\varphi$ să se exprime printr-o funcţie raţională de $x = \sin \varphi$?

Să se deducă apoi că nu există valori $n \in N$ astfel ca $z = \operatorname{tg} n\varphi$ să se exprime raţional în funcţie de $x = \sin \varphi$.

(I. P. Bucureşti, 1973)

Soluţie. Pornim de la formula lui Moivre, $\cos n\varphi + i \sin n\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$.

Ridicăm partea dreaptă la puterea n după formula binomului lui Newton. Prin identificarea părţilor reale găsim $\cos n\varphi = \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \ldots + (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi + \ldots$ Deoarece $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ rezultă că numai puterile pare ale lui $\cos \varphi$ se exprimă raţional în funcţie de $\sin \varphi$. De aceea $n = 2p$, $p \in N$.

Identificînd coeficienţii părţilor imaginare găsim

$$\sin n\varphi = C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \ldots$$

$$+ (-1)^k C_n^{2k-1} \cos^{n-2k-1} \varphi \sin^{2k+1} \varphi + \ldots]$$

Aceeaşi observaţie ca şi mai sus arată că $\sin n\varphi$ este raţional în $\sin \varphi$ numai dacă $n = 2p + 1$. Deoarece n nu poate fi simultan par şi impar, deducem că nu există valori $n \in N$ aşa ca $z = \operatorname{tg} n\varphi$ să se exprime raţional în funcţie de $x = \sin \varphi$.

2.198. Să se afle valorile unghiului x pentru care

$$(\sin x + i \cos x)(\sin 2x + i \cos 2x)(\sin 3x + i \cos 3x) = \frac{-i+1}{\sqrt{2}}.$$

Să se calculeze $\sin 2x$ pentru valorile lui x găsite anterior şi cuprinse în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Facultatea de chimie-fizică, Craiova, 1972)

Soluție. Avem $\sin x + i\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin 2x + i\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, $\sin 3x + i\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$. Ținînd seama de regulile de înmulțire a numerelor complexe scrise sub formă trigonometrică, ecuația se reduce la $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 6x\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6x\right) = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$ sau $-\sin 6x - i\cos 6x = \frac{-i+1}{\sqrt{2}}$.

Aceasta este echivalentă cu sistemul

$$\sin 6x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 6x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Rezultă $x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{24}$, $k \in Z$.

Dintre valorile precedente ale lui x numai $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{24} = \frac{7\pi}{24}$ este cuprinsă în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rezultă că $\sin 2x = \sin\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2.199. Să se determine modulul și argumentul numărului complex $z = 1 + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$, unde $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este un unghi dat, apoi să se rezolve ecuația

$$x^3 = 1 + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$$

(I. P. București, 1977)

Soluție. Avem $z = 2\cos^2\alpha + i\,2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Deoarece $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $|z| = 2\cos\alpha$ și $\arg z = \alpha$. Apoi din $x^3 = 2\cos\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ găsim

$$x_k = \sqrt[3]{2\cos\alpha}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

2.200. Se dau numerele complexe:

$$z_1 = \sin\alpha - \cos\alpha + i(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$z_2 = \sin\alpha + \cos\alpha + i(\sin\alpha - \cos\alpha),$$

unde α este parametru real dat. Să se găsească numerele naturale n pentru care $(z_1 z_2)^n$ este un număr real pozitiv.

(I. P. București, 1977)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Prin calcul direct obținem $(z_1z_2)^n=2^ni^n$. Puterile i^n sînt reale și pozitive numai dacă $n=4p$, $p\in N$.

2.201. Se dau numerele complexe

$$z_1=\sin\alpha+\cos\alpha+i(\sin\alpha-\cos\alpha),$$

$$z_2=1+\operatorname{tg}\alpha+i(1-\operatorname{tg}\alpha).$$

1) Să se determine α astfel încît $z_1+z_2\in R$ și să se scrie pentru acest α ecuațiile de gradul II ale căror rădăcini sînt numerele date;

2) Să se scrie z_1 și z_2 sub formă trigonometrică, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$;

3) Să se rezolve ecuația în α:

$$z_1+z_2\cos\alpha=2\sqrt{2} \text{ pe intervalul } \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

(Silvicultură și exploatări forestiere, Brașov. 1974)

Soluție. 1) $z_1+z_2\in R$, dacă $\sin\alpha-\cos\alpha+1-\operatorname{tg}\alpha=0$, sau $(\sin\alpha-\cos\alpha)\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)=0$, de unde rezultă $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\alpha=2k_1\pi$, $k,\ k_1\in Z$. În primul caz $z_1+z_2=(-1)^k\sqrt{2}+2$, $z_1z_2=2(-1)^k\sqrt{2}$ și ecuația este $z^2-(2+(-1)^k\sqrt{2})z+2(-1)^k\sqrt{2}=0$; în al doilea $z_1+z_2=2$, $z_1z_2=1$ și ecuația este $z^2-2z+1=0$.

2) Forma trigonometrică este $z_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right]$, $z_2=\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$.

3) Ecuația dată este echivalentă cu $2(\sin\alpha+\cos\alpha)=2\sqrt{2}$, sau $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$, cu soluțiile $\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{4}$; $\alpha_0=\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

2.202. Se consideră determinantul

$$D(\alpha)=\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin 2\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin 2\alpha \\ 1+\sin 2\alpha & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1) Să se dezvolte determinantul, punînd rezultatul sub forma cea mai simplă.

2) Să se găsească valorile lui α din intervalul $(0,\ 2\pi)$ pentru care $D(\alpha)=0$.

3) Se consideră $z_k=\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k$, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$, unde $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ sînt valorile lui α găsite la punctul 2). Să se arate că $z_1^n+z_2^n+z_3^n+z_4^n=0$, pentru orice n natural, impar.

(I. P. Timișoara, 1974)

Soluţie. 1) Scădem linia a II-a din prima:

$$D(\alpha)=\begin{vmatrix} 1 & \cos^2\alpha & \sin 2\alpha \\ 1 & \sin^2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cos 2\alpha & 0 \\ 1 & \sin^2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$=-\cos 2\alpha(1-\sin^2 2\alpha)$;
Deci $D(\alpha)=-\cos^3 2\alpha$.

2) Din $D(\alpha)=0$ rezultă $\cos 2\alpha=0$ şi $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$. Pentru $k=0$, 1, 2, 3, rezultă $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$, $\alpha_2=\frac{3\pi}{4}$, $\alpha_3=\frac{5\pi}{4}$, $\alpha_4=\frac{7\pi}{4}$ din intervalul $(0, 2\pi)$.

3) Deoarece $|z_k|=1$ şi $\alpha_4=2\pi-\alpha_1$, $\alpha_3=2\pi-\alpha_2$, rezultă că $z_4=\bar{z}_1$, $z_3=\bar{z}_3$ (numere complexe conjugate, cîte două); deci $S=z_1^n+\bar{z}_1^n+z_2^n+\bar{z}_2^n=\left(\cos\frac{\pi}{4}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n+\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^n+\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^n=$ $=2\cos\frac{n\pi}{4}+2\cos\frac{3n\pi}{4}=4\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}$. Pentru $n=2k+1$ rezultă $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}=$ $=0$ şi deci $S=0$.

2.203. Se consideră două numere complexe distincte $z_0=r(\cos\alpha_0+i\sin\alpha_0)$, $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, avînd acelaşi modul r.

1) Să se determine argumentul expresiei $E=\frac{z-z_0}{z+z_0}$ şi să se explice geometric rezultatul.

2) z_0 fiind dat, să se determine $\arg z$ astfel încît $|z+z_0|=r$.

3) Să se arate că există numai două valori distincte z_1 şi z_2 ale lui z pentru care are loc egalitatea din 2) şi că z_1 şi z_2 verifică ecuaţia $z^3=z_0^3$.

Să se calculeze în funcţie de z_0 valorile pe care le ia suma $S_n=z_0^n+z_1^n+$ $+z_2^n$, n fiind un număr întreg.

(I. P. Bucureşti, 1971)

Soluţie. Relaţia $z\neq z_0$ este echivalentă cu $\alpha\neq\alpha_0+2k\pi$, $k\in Z$.

1) Avem $z-z_0=r[\cos\alpha-\cos\alpha_0+i(\sin\alpha-\sin\alpha_0)]=2r\sin\frac{\alpha_0-\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha_0+\alpha}{2}-\right.$ $\left.-i\cos\frac{\alpha_0+\alpha}{2}\right)=2ri\sin\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\alpha_0}{2}+i\sin\frac{\alpha+\alpha_0}{2}\right)$; $z+z_0=2r\cos\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\alpha_0}{2}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{\alpha+\alpha_0}{2}\right)$. Astfel $E=i\operatorname{tg}\frac{\alpha-\alpha_0}{2}$ şi deci

$$\arg E=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\alpha-\alpha_0}{2}>0,\ \alpha\in(2k\pi+\alpha_0,\ (2k+1)\pi+\alpha_0),\\ \pi+\frac{\pi}{2}, & \operatorname{tg}\frac{\alpha-\alpha_0}{2}<0,\ \alpha\in((2k-1)\pi+\alpha_0,\ 2k\pi+\alpha_0).\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Geometric: vectorii $z-z_0$ și $z+z_0$ sînt diagonalele unui romb avînd un vîrf în origine și z, z_0, $z+z_0$ fiind celelalte vîrfuri.

2) Egalitatea $|z+z_0|=r$ este echivalentă cu $\left|\cos\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\right|=\frac{1}{2}$. Ecuația $\cos\frac{\alpha-\alpha_0}{2}=\frac{1}{2}$ ne dă $\alpha=\alpha_0\pm\frac{2\pi}{3}+4k\pi$, $k\in Z$; ecuația $\cos\frac{\alpha-\alpha_0}{2}=-\frac{1}{2}$ conduce la $\alpha=\alpha_0\pm\frac{2\pi}{3}+4l\pi\mp 2\pi$, $l\in Z$.

3) Abstracție făcînd de multiplii lui 2π, avem $\alpha=\alpha_0\pm\frac{2\pi}{3}$. De aceea $z_1=r\left[\cos\left(\alpha_0+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\alpha_0+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$, $z_2=r\left[\cos\left(\alpha_0-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\alpha_0-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$,

Avem $z_k^3=r^3\left[\cos\left(\alpha_0\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\alpha_0\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3=r^3[\cos(3\alpha_0\pm 2\pi)+i\sin(3\alpha\pm 2\pi)]=r^3(\cos 3\alpha_0+i\sin 3\alpha_0)=z_0^3$.

Cu acestea găsim

$$S_n=z_0^n+z_1^n+z_2^n=\begin{cases}3z_0^n, & n=3k,\\ 0, & n=3k+1,\ 3k+2.\end{cases}$$

2.204. Se consideră sumele

$$S_1(x)=\cos x+C_n^1\cos 2x+\ldots+C_n^n\cos(n+1)x,$$

$$S_2(x)=\sin x+C_n^1\sin 2x+\ldots+C_n^n\sin(n+1)x,$$

unde $x\in R$, $n\in N$.

1) Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $S_1(x)+iS_2(x)$.

2) Să se rezolve ecuațiile $S_1(x)=0$ și $S_2(x)=0$.

(Facultatea de matematică, Cluj, 1976)

Soluție. 1) Succesiv găsim

$S_1(x)+iS_2(x)=(\cos x+i\sin x)+C_n^1(\cos 2x+i\sin 2x)+\ldots+C_n^n(\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x)=(\cos x+i\sin x)^1+C_n^1(\cos x+i\sin x)^2+\ldots+C_n^n(\cos x+i\sin x)^{n+1}=(\cos x+i\sin x)(\cos x+i\sin x+1)^n=(\cos x+i\sin x)2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)^n=2^n\cos^n\frac{x}{2}(\cos x+i\sin x)\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right)=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)x+i\sin\left(\frac{n}{2}+1\right)x\right)=\rho^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

unde

$$\rho=|S_1(x)+iS_2(x)|=2^n\left|\cos\frac{x}{2}\right|^n.$$

$$\varphi=\arg(S_1(x)+iS_2(x))=\begin{cases}\left(\frac{n}{2}+1\right)x, & (n=\text{par și } x\in R \text{ sau}\\ & n=\text{impar și } x\in[(4k-1)\pi,\ (4k+1)\pi],\\ \pi+\left(\frac{n}{2}+1\right)x, & n=\text{impar și } x\in((4k+1)\pi,\ (4k+\\ & +3)\pi),\ k\in Z.\end{cases}$$

2) Se observă că $S_1(x)=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)x$ și $S_2(x)=2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\left(\frac{n}{2}+1\right)x$. De aceea soluțiile ecuației $S_1(x)=0$ sînt $x=(2l+1)\pi$, $l\in Z$, $x=\frac{2p+1}{n+2}\pi$, $p\in Z$, iar soluțiile ecuației $S_2(x)=0$ sînt $x=(2l+1)\pi$, $l\in Z$, $x=\frac{2q\pi}{n+2}$, $q\in Z$.

2.205. Să se facă calculabilă prin logaritmi* expresia

$$E=\frac{a\cos A+b\cos B-c\cos C}{a\cos A-b\cos B+c\cos C},$$

unde a, b, c, A, B, C sînt elementele unui triunghi oarecare.

(I. P. Galați, 1970)

Soluție. Se știe că $a=b\cos C+c\cos B$, $b=c\cos A+a\cos C$, $c=a\cos B+b\cos A$. De aceea $a\cos A+b\cos B-c\cos C=2c\cos A\cos B$ și $a\cos A-b\cos B+c\cos C=2b\cos A\cos C$. Astfel pentru $A\neq\frac{\pi}{2}$, $C\neq\frac{\pi}{2}$ găsim $E=\frac{c}{b}\frac{\cos B}{\cos C}=\operatorname{tg}C\cdot\operatorname{ctg}B$.

2.206. Într-un triunghi ABC laturile a, b, c sînt în progresie aritmetică, a fiind termenul din mijloc.

1) Să se demonstreze relația

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3},$$

2) Fiind dată valoarea unghiului A, să se determine unghiurile B și C. Discuție.

(Universitatea Brașov, 1972)

Soluție. 1) Fie a, b, c laturile triunghiului ABC. Prin ipoteză $a=b+r=c-r$. De aceea

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}=\frac{p-a}{p}=\frac{\frac{3a}{2}-a}{\frac{3a}{2}}=\frac{1}{3}.$$

2) Relația $A+B+C=\pi$ implică $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$. Deoarece $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ găsim $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=\frac{2}{3}$. Sistemul $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$,

---

* "Calculabilă prin logaritimi" este echivalent cu reducerea la produs".

$\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{2}{3}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$ conduce la ecuaţia $3\operatorname{tg}\frac{A}{2}x^2-2x+\operatorname{tg}\frac{A}{2}=0$. Aceasta are soluţii reale dacă şi numai dacă $3\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\leqslant 1$, adică $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Rezultă $0<A\leqslant\frac{\pi}{3}$. Cu acestea deducem

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}}{3\operatorname{tg}\frac{A}{2}},$$

2.207. Să se arate că un triunghi este isoscel sau dreptunghic, dacă

$$\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}C}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C},$$

(I. P. Iaşi, 1972)

Soluţie. Se presupun satisfăcute condiţiile $A+B+C=\pi$, $A,\ B,\ C\in(0,\pi)$; de asemenea, $B,\ C\neq\frac{\pi}{2}$. Relaţia se transcrie $\cos C\sin C=\cos B\sin B$, sau $2C=(-1)^k 2B+k\pi$; soluţii admisibile rezultă pentru $k=0$, $C=$şi B pentru $k=1$, $B+C=\frac{\pi}{2}$.

Observaţie. Problema de mai sus este un caz particular al problemei:
Să se arate că dacă într-un triunghi ABC se satisface $F(A,\ B,\ C)=0$, atunci triunghiul are o anumită formă particulară (isoscel, dreptunghic etc.).
Pentru rezolvarea problemei, în sistemul $F(A,\ B,\ C)=0$, $A+B+C=\pi$ se consideră una din necunoscute parametru, fie C; rezultă ecuaţia $F(A,\ \pi-A-C,\ C)=0$ din care se determină familia de soluţii $A=f(C,\ k)$, $k\in Z$.
Se păstrează acele soluţii A, care satisfac condiţia: pentru $C\in(0,\pi)$ există $k\in Z$, încît $A\in(0,\pi)$, pe mulţimea de definiţie a lui F.

Scanned with OKEN Scanner

II. PROBLEME DE SINTEZĂ ŞI OBSERVAŢII METODOLOGICE

Scanned with OKEN Scanner

§ 1. ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Să se determine soluţiile ecuaţiei

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2,$$

în mulţimea numerelor întregi.

(Olimpiadă, S.U.A., 1976)

Soluţie. Evident, ecuaţia admite soluţia banală $a=b=c=0$. Să arătăm că aceasta este unica soluţie. Pentru aceasta ne servim de faptul că pătratul oricărui număr întreg poate fi scris în forma $\mathcal{M}4$ sau $\mathcal{M}4+1$.

Fie $(a_1, b_1, c_1)\neq(0, 0, 0)$ o soluţie a ecuaţiei date.

Presupunem $a_1^2b_1^2=\mathcal{M}4+1$. Rezultă $a_1^2=\mathcal{M}4+1$ şi $b_1^2=\mathcal{M}4+1$ care contrazice $a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_1^2b_1^2$.

Presupunem $a_1^2b_1^2=\mathcal{M}4$. Relaţia $a_1^2+b_1^2+c_1^2=\mathcal{M}4$ este posibilă numai dacă $a_1^2=\mathcal{M}4=4a_2^2$, $b_1^2=\mathcal{M}4=4b_2^2$, $c_1^2=\mathcal{M}4=4c_2^2$ şi deci $a_2^2+b_2^2+c_2^2=4a_2^2b_2^2$. Prin inducţie obţinem şirurile de numere naturale $\{a_n^2\}$, $\{b_n^2\}$, $\{c_n^2\}$ cu proprietăţile

$$a_n^2=4a_{n+1}^2,\quad b_n^2=4b_{n+1}^2,\quad c_n^2=4c_{n+1}^2,$$

$$a_n^2+b_n^2+c_n^2=4^{n-1}a_n^2b_n^2.$$

Primele trei dintre aceste relaţii arată că şirurile precedente sînt descrescătoare, ceea ce este o contradicţie întrucît este vorba de şiruri de numere naturale.

Rămîne că ecuaţia dată nu admite, în numere întregi, decît soluţia banală.

2. Fie $a, b, x, y\in Z$. Presupunînd că n este suma a două numere triunghiulare, adică $n=\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}$, să se scrie $4n+1$ ca sumă de două pătrate.

Invers, să se arate că dacă $4n+1=x^2+y^2$, atunci n este suma a două numere triunghiulare.

(Competiția William Lowell Putnam, S.U.A., 1975)

Soluție. Succesiv avem

$$n=\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}\Rightarrow 4n+1=2a^2+2a+2b^2+2b+1=(a+b+1)^2+(a-b)^2.$$

Invers, dacă $4n+1=x^2+y^2$, atunci unul și numai unul dintre numerele x și y este impar. De aceea numerele $a=\frac{x+y-1}{2}$, $b=\frac{x-y-1}{2}$ sînt întregi. Mai mult

$$\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}=\frac{x^2+y^2-1}{4}=n.$$

3. Să se rezolve în R^2 sistemul

$$\begin{cases} m\,|x-1|+y=1 \\ 2\,|x-1|+(m+1)y=m-1, \quad m\in R. \end{cases}$$

Soluție. Notînd $|x-1|=t$ sistemul dat se reduce la

$$\begin{cases} mt+y=1 \\ 2t+(m+1)y=m-1 \\ m\in R,\ t\in[0,\infty). \end{cases}$$

Determinantul sistemului format de primele două relații este

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix}=(m-1)(m+2).$$

Se observă că $\Delta>0$ pentru $m\in(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$, $\Delta=0$ pentru $m=-2$ sau $m=1$ și $\Delta<0$ pentru $m\in(-2,1)$. De asemenea

$$\Delta_t=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m-1 & m+1 \end{vmatrix}=2 \text{ și } \Delta_y=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & m-1 \end{vmatrix}=(m-2)(m+1).$$

Pentru $m=-2$ sau $m=1$, adică $\Delta=0$, sistemul este incompatibil deoarece $\Delta_t=2\neq 0$. Pentru $m\in(-2,1)$ avem $\Delta<0$ și $t=\frac{\Delta_t}{\Delta}=\frac{2}{(m-1)(m+2)}<0$ contrazice $t\in[0,\infty)$. Pentru $m\in(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$ avem $\Delta>0$ și deci $t=\frac{2}{(m-1)(m+2)}<0$, $y=\frac{(m-2)(m+1)}{(m-1)(m+2)}$; apoi găsim $x=1-\frac{2}{(m-1)(m+2)}$ sau $x=1+\frac{2}{(m-1)(m+2)}$.

4. Să se discute natura rădăcinilor ecuației $(x^2+x)\sin\alpha+m=0$ după parametrii $m\in R$, $\alpha\in[0,2\pi)$. Pentru ce valori ale lui m este posibilă egalitatea între suma și produsul rădăcinilor ecuației date?

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Dacă $\sin\alpha=0$, $m=0$ avem o identitate în raport cu x; pentru $\sin\alpha=0$, $m\neq 0$ rezultă o imposibilitate, iar dacă $\sin\alpha\neq 0$, $m=0$ ecuația are soluțiile $x_1=0$, $x_2=-1$.

Fie $\sin\alpha\neq 0$, $m\neq 0$; în acest caz se găsește $\Delta=\sin\alpha(\sin\alpha-4m)$. Se observă că $\Delta=0$ numai pentru $\sin\alpha=4m$ (din ipoteză $\sin\alpha\neq 0$), iar $m\in\left[-\frac{1}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{4}\right]$, ecuația în x având rădăcina reală dublă $x=-\frac{1}{2}$. Se determină mulțimile de semn constant pentru Δ, raportate la un sistem ortogonal (α, m). În figura 110 sînt precizate mulțimile $A=\left\{(\alpha,\ m)/\alpha\in(0,\ \pi),\ \frac{1}{4}\sin\alpha-m>0\right\}$, $B=\left\{(\alpha,\ m)/\alpha\in(\pi,2\pi),\ \frac{1}{4}\sin\alpha-m>0\right\}$, $C=\left\{(\alpha,\ m)/\alpha\in(0,\ \pi),\ \frac{1}{4}\sin\alpha-m<0\right\}$, $D=\left\{(\alpha,\ m)/\alpha\in(\pi,2\pi),\ \frac{1}{4}\sin\alpha-m<0\right\}$; rezultă că $\Delta>0$ pentru $(\alpha,m)\in A\cup D$, cînd ecuația are două rădăcini reale distincte, iar pentru $(\alpha,\ m)\in B\cup C$ se satisface $\Delta<0$ și ecuația are rădăcini complexe. Pentru partea a doua a problemei se presupun $\sin\alpha\neq 0$, $m\neq 0$ și se determină $m\in R$ încît să se satisfacă $\sin\alpha=-m$; rezultă $m\in[-1,0)\cup(0,+1]$ (fig. 111).

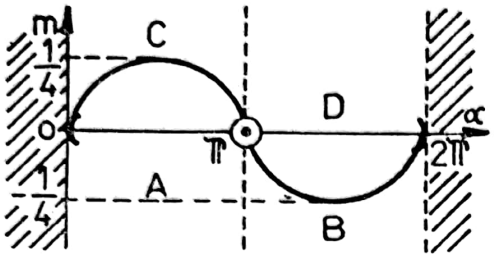


Fig. 110.

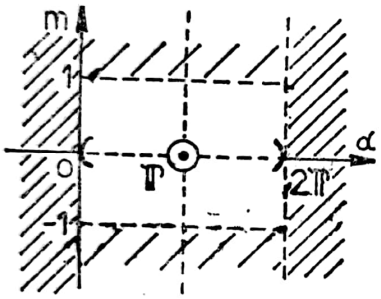


Fig. 111.

5. Poziția rădăcinilor ecuației de gradul doi cu coeficienți reali

Fie a, b, c trei numere reale și (1) $ax^2+bx+c=0$ o ecuație de gradul doi ($a\neq 0$) pe mulțimea numerelor complexe C. Ecuației (1) îi atașăm trinomul real $x\to P(x)=ax^2+bx+c$, $x\in R$, al cărui grafic este parabola de axă $x=-\frac{b}{2a}$. De asemenea, așa cum se obișnuiește, suprapunem mulțimea numerelor complexe C cu planul R^2 și notăm cu $\Delta=b^2-4ac$ discriminantul ecuației (1).

Dacă ecuația (1) are rădăcinile reale $x_{1,\,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, adică $\Delta\geqslant 0$, atunci punctele $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ aparțin graficului trinomului real P (fig. 112, pentru $x_1\neq x_2$).

Să presupunem că ecuația (1) are rădăcinile complexe (conjugate) $x_{1,\,2}=-\frac{b}{2a}\pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, adică $\Delta<0$. Aceste rădăcini sînt afixele unor puncte simetrice în raport cu axa Ox, situate pe dreapta $x=-\frac{b}{2a}$, adică pe axa de simetrie a graficului trinomului real P. Deoarece $P\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$, afixul vîrfului para-

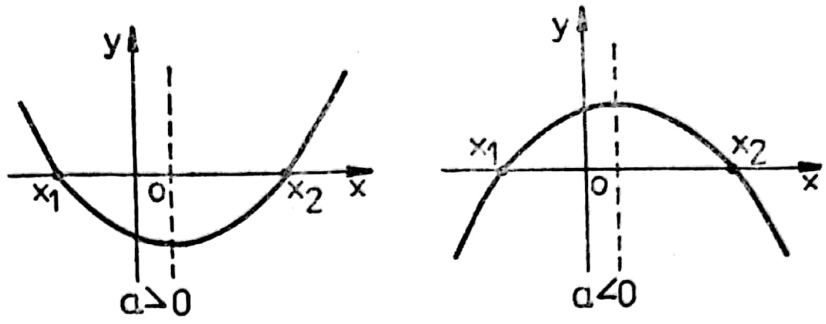


Fig. 112.

bolei este $v=-\frac{b}{2a}-i\frac{\Delta}{4a}$. În plus, observăm că $\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ aparține intervalului $\left[-\left|\frac{\Delta}{4a}\right|,\left|\frac{\Delta}{4a}\right|\right]$. Astfel, rădăcinile complexe ale ecuației (1) sînt situate pe un segment din axa parabolei atașate și anume (fig. 113):

— pe segmentul $x=-\frac{b}{2a}$, $\frac{\Delta}{4a}\leqslant y\leqslant-\frac{\Delta}{4a}$ dacă $a>0$,

— pe segmentul $x=-\frac{b}{2a}$, $-\frac{\Delta}{4a}\leqslant y\leqslant\frac{\Delta}{4a}$ dacă $a<0$.

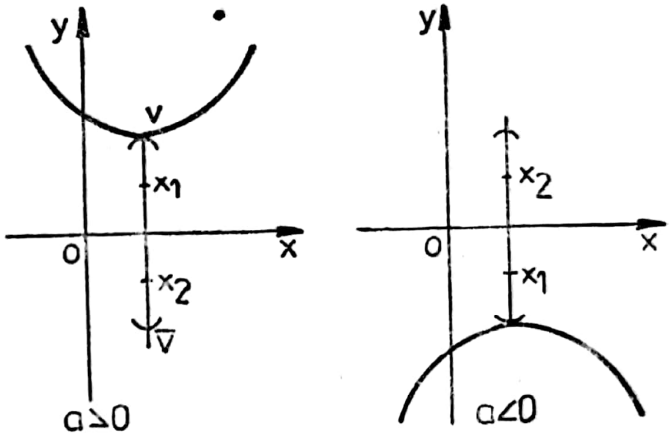


Fig. 113.

Să presupunem că numerele reale a, b, c depind de unul sau mai mulți parametri. În acest caz apar și probleme de determinare a parametrilor, astfel încît rădăcinile ecuației (1) să aibă o anumită poziție în plan. Uneori se impune poziția pe axa Ox în raport cu unul sau două numere reale — implicit fiind vorba de rădăcini reale —, alteori se impune poziția în raport cu o porțiune plană bidimensională — în special fiind vorba de rădăcini complexe. În acest sens, în pag. 178 și 179, prezentăm sub formă de tabele cîteva cazuri posibile pentru rădăcinile reale distincte și cîteva cazuri posibile pentru rădăcinile complexe, pe figuri fiind trasat și graficul trinomului real atașat.

Exemplu. Se dă ecuația

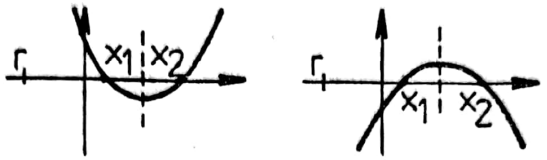
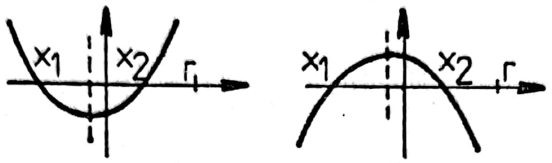
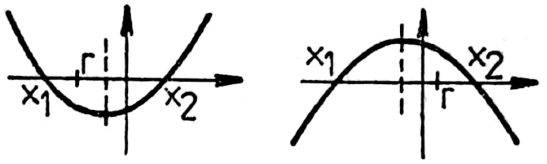
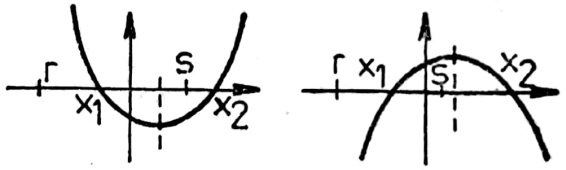
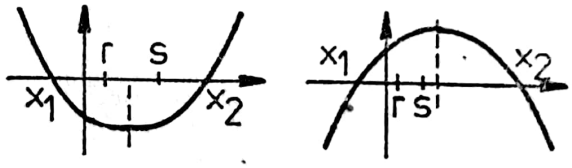
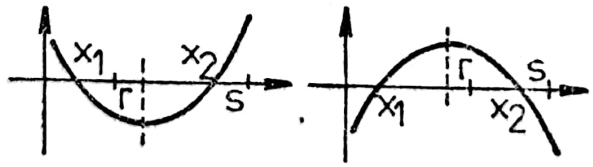
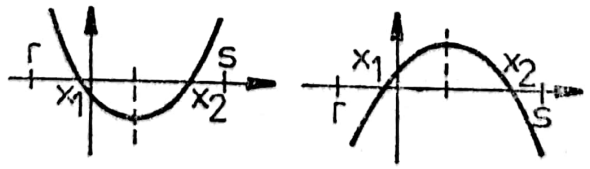
$$(m^2+1)x^2-(2m+1)x+1=0,$$

unde m este un parametru real.

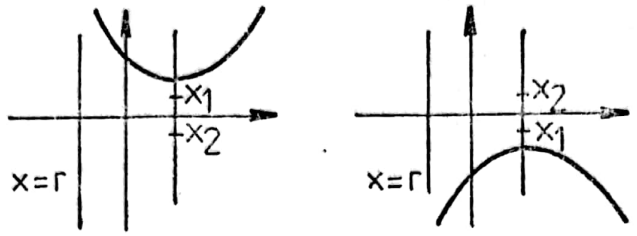
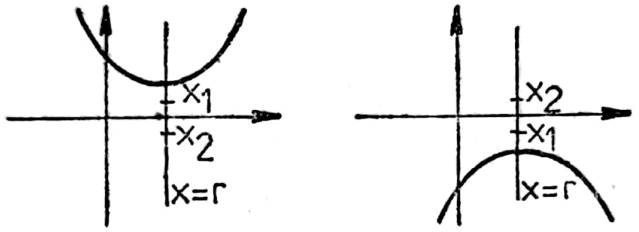
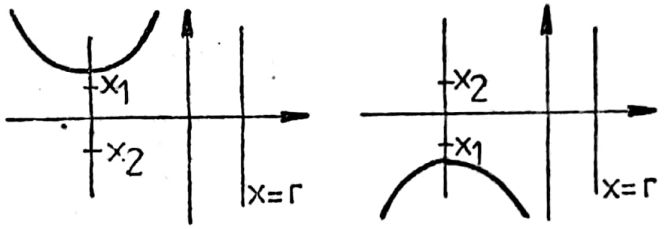
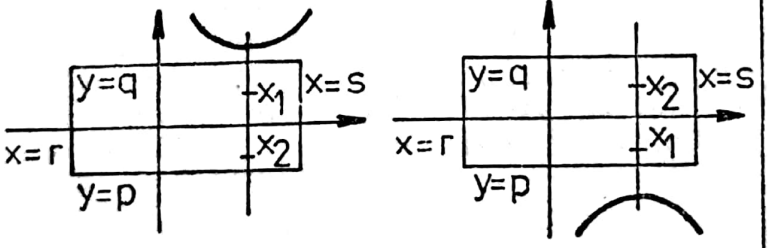
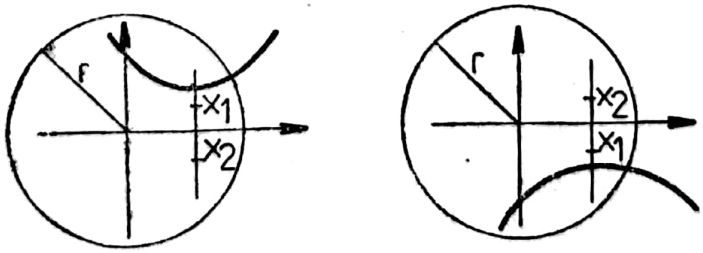
1) Să se discute natura rădăcinilor în funcție de m.
2) Să se determine m astfel încît rădăcinile să fie opuse.
3) Să se determine m astfel încît rădăcinile să fie inverse una alteia.
4) Să se arate că rădăcinile reale sînt cuprinse în intervalul $(-1, 1]$.
5) Să se determine m astfel încît rădăcinile complexe să fie situate în interiorul cercului cu centrul în origine și de rază $1/\sqrt{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rădăcini reale distincte: $\Delta > 0$

Poziția rădăcinilor	Condiții
	$aP(r) > 0$ $-\frac{b}{2a} > r$
	$aP(r) > 0$ $-\frac{b}{2a} < r$
	$aP(r) < 0$
	$aP(r) > 0$ $aP(s) < 0$ $-\frac{b}{2a} > r$
	$aP(r) < 0$ $aP(s) < 0$
	$aP(r) < 0$ $aP(s) > 0$ $-\frac{b}{2a} < s$
	$aP(r) > 0$ $aP(s) > 0$ $r < -\frac{b}{2a} < s$

Rădăcini complexe conjugate: $\Delta<0$

Poziția rădăcinilor ($R^2 \equiv C$)	Condiții
	$-\frac{b}{2a}>r$
	$-\frac{b}{2a}=r$
	$-\frac{b}{2a}<r$
	$r<-\frac{b}{2a}<s$ $\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\in\left[-\left\lvert\frac{\Delta}{4a}\right\rvert,\left\lvert\frac{\Delta}{4a}\right\rvert\right]\cap[p,q]$
	$0\leq\frac{c}{a}<r^2$ sau $\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2<r^2$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1) Avem $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+1)=4m-3$. Astfel pentru $m<\frac{3}{4}$ ecuația are rădăcini complexe; pentru $m=\frac{3}{4}$ ecuația are o rădăcină reală dublă, iar pentru $m>\frac{3}{4}$ ecuația are rădăcini reale distincte.

2) Se impune condiția $x_1+x_2=0$, adică $2m+1=0$ sau $m=-\frac{1}{2}$. Rădăcinile sînt pur imaginare, $x_{1,2}=\pm\frac{2i}{\sqrt{5}}$.

3) Se impune $x_1x_2=1$. Rezultă $\frac{1}{m^2+1}=1$ și deci $m=0$. În acest caz ecuația se reduce la $x^2-x+1=0$ și cele două rădăcini sînt $x_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

4) Notăm membrul stîng cu $P(x)$. Deoarece $P(-1)>0$, $P(1)\geqslant 0$ și $-1<\frac{2m+1}{2(m^2+1)}<1$, afirmația făcută mai sus este adevărată.

5) $\Delta<0$, $0\leqslant\frac{c}{a}<\frac{1}{2}$; din $4m-3<0$, $\frac{1}{m^2+1}<\frac{1}{2}$ deducem $m\in(-\infty,-1)$.

6. Să se determine perechile de numere reale b, c astfel încît rădăcinile ecuației $z^2+bz+c=0$ să se afle în interiorul cercului unitate, $\{z\,/|z|<1\}$, din planul complex.

Soluție. Rădăcinile ecuației date sînt complexe dacă $b^2-4c<0$. Pentru ca ele să fie în interiorul cercului $|z|=1$ se impune și $0\leqslant c<1$. Astfel dacă punctul (b, c) aparține porțiunii plane haşurată orizontal în fig. 114, atunci rădăcinile complexe aparțin interiorului cercului unitate cu centrul în origine, din planul xOy.

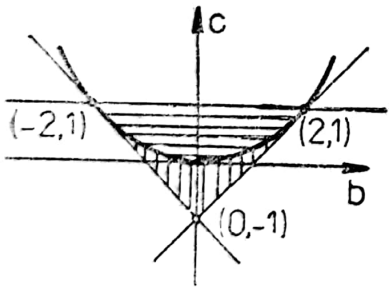


Fig. 114.

Rădăcinile ecuației date sînt reale dacă $b^2-4c\geqslant 0$. Pentru ca ele să fie cuprinse în $\{z\,|\,|z|<1\}$ este suficient să aparțină lui $(-1, 1)$; se impun și condițiile

$$f(-1)f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant 0,\ f(1)\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant 0,\ \left|\frac{x_1+x_2}{2}\right|<1.$$

Deoarece $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{4c-b^2}{4}\leqslant 0$, aceste condiții se reduc la

$$f(-1)=1-b+c>0,\ f(1)=1+b+c>0.$$

De aceea, dacă punctul (b, c) aparține porțiunii plane haşurată vertical în fig. 114, atunci rădăcinile reale aparțin mulțimii $\{z\,|\,|z|<1\}$.

În concluzie, punctul (b, c) trebuie să aparțină interiorului triunghiului de vîrfuri $(0, -1)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

7. Ecuaţii bipătrate

Fie $P_4(x)=x^4+px^2+q$, $p, q\in R$; $x^4+px^2+q=0$ este ecuaţia bipătrată cu coeficienţi reali.

Pentru determinarea poziţiei în planul complex C a rădăcinilor ecuaţiei bipătrate este utilă propoziţia

(I) Un polinom cu coeficienţi din C conţine numai puteri pare, dacă şi numai dacă rădăcinile sale sînt simetrice două cîte două, faţă de originea planului complex C.

Dacă $z_1=\sqrt{r}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z_2=-\sqrt{r}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ sînt două dintre rădăcinile simetrice faţă de origine ale unei ecuaţii $P_n(x)=0$, atunci factorii corespunzători acestor rădăcini conduc la $(z-z_1)(z-z_2)=z^2-r(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)$. Dacă polinomul are toate rădăcinile de această formă, atunci $P_n(x)$ rezultă din $\prod_{k=1}^{n/2}(z^2-r_k(\cos 2\alpha_k+i\sin 2\alpha_k))$ şi deci conţine numai puteri pare.

Reciproc, dacă $P_{2m}(z)$ conţine numai puteri pare, atunci cu schimbarea variabilei $t=z^2$ rezultă un polinom de gradul m în t, care are rădăcinile $\{t_k\}_{k\in\overline{1,m}}\subset C$. Revenind la variabila z, rezultă $z^2=t_k$, sau $z=\pm\sqrt{t_k}$, $k\in\overline{1,m}$ Observăm că pentru fiecare k, $\pm\sqrt{t_k}$ sînt simetrice faţă de originea planului C.

(II) Determinarea rădăcinilor ecuaţiei bipătrate apare ca un caz particular al problemei determinării soluţiilor unei funcţii compuse, $x\to(P_n\circ t)(x)=P_n(t(x))$; după determinarea rădăcinilor $\{t_k/k\in\overline{1,n}\}$ urmează rezolvarea ecuaţiilor $t(x)=t_k$ (vezi problemele 29).

1°. Se consideră ecuaţia $x^4+x^2+3m+1=0$, $m\in R$ şi se cere:

1) să se rezolve pentru $m=0$;

2) valorile lui m pentru care admite două rădăcini duble şi să se determine aceste rădăcini;

3) valorile lui m pentru care imaginile rădăcinilor în planul C se situează pe o dreaptă ce trece prin origine şi să se afle rădăcinile.

Soluţie. 1) Cu schimbarea variabilei $t=x^2$ rezultă $t^2+t+1=0$, $t_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $x_{1,2}=\sqrt{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}=$

$=\pm\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $x_{3,4}=\sqrt{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pm\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

2) Cu $t=x^2$, ecuaţia devine $t^2+t+1+3m=0$ şi $t_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3-12m}}{2}$;

pentru $m=-\frac{1}{4}$ rezultă $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2=0$ şi $x_{1,2}=\sqrt{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+\right.$

$\left.+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ sînt cele două rădăcini duble.

3) Ecuaţia $t^2+t+1+3m=0$ are soluţiile $t_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3-12m}}{2}$, reale dacă $m\leqslant-\frac{1}{4}$. Deoarece $x^2=t_j$, condiţia ca imaginile tuturor rădă-

cinilor să se situeze pe o dreaptă se satisface pentru cazul cînd ambele rădăcini $t_{1,2}$ sînt negative; $t_{1,2}<0$, dacă $\sqrt{-3-12m}<1$, adică $m<-\frac{1}{3}$.

Rezultă că $x_{1,2}=r_1\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)=\pm r_1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $x_{3,4}=\pm r_2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ pentru $m\in\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right]$.

Observație. Condiția ca cele patru rădăcini x_j să se situeze pe aceeași dreaptă ce trece prin origine este ca $\arg t_1=\arg t_2$ ($t_{1,2}$ — rădăcinile ecuației obținute prin $x^2=t$). Aceasta este posibil pentru $t_{1,2}<0$, cînd $\arg t_1=\arg t_2=\pi$ și x_j sînt rădăcini pur imaginare, sau pentru $t_{1,2}>0$, cînd $\arg t_1=\arg t_2=0$ și x_j sînt rădăcini reale.

2°. Fie polinomul $P_4(x)=mx^4-2(m+1)x^2+m+2$, $m\in R$; să se determine valorile lui m pentru care una din rădăcinile ecuației $P_4(x)=0$ este mai mică decît -3, iar celelalte sînt mai mari ca -2.

Soluție. Din simetria față de origine, condiția $-\infty<x_1<-3$ implică $3<x_2<\infty$, iar $x_{3,4}>-2$ implică $-2<x_3<0$, $0<x_4<2$; $|x_1|=x_2$, $|x_3|=x_4$.

Cu substituția $t=x^2$, ecuația devine $mt^2-2(m+1)t+m+2=0$ și trebuie satisfăcute condițiile $t_1\in(9,\infty)$, $t_2\in(0,4)$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{t_2}$, sau $m\cdot f(9)<0$, $f(0)\cdot f(4)<0$. Sistemul de inecuații devine $m(4m-1)<0$, $(3m-2)(m+2)<0$ și admite soluția $m\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$; condiția $\Delta>0$ se satisface pentru orice $m\in R$.

3°. Se consideră ecuația $x^{2n}+px^n+q=0$, $p, q\in R$.

1) Să se rezolve ecuația.

2) Fie M_k, respectiv M_k^* imaginile rădăcinilor x_k, x_k^* ale ecuațiilor binome ce se obțin din ecuația dată; este posibil ca aceste puncte să fie vîrfurile unui poligon regulat?

Soluție. 1) După schimbarea variabilei, $t=x^n$, rezultă ecuația $t^2+pt+q=0$ cu rădăcinile $t_{1,2}=r(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)$.

Ecuațiile $x^n-t_j=0$, $j=1,2$, dau soluțiile ecuației în x:

$$x_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),$$

$$x_{k'}^*=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{-\alpha+2k'\pi}{n}+i\sin\frac{-\alpha+2k'\pi}{n}\right),\ k, k'\in\overline{0, n-1}.$$

2) Deoarece $p, q\in R$, rezultă $|t_1|=|t_2|=r$ și deci $|x_k|=|x_{k'}^*|=\sqrt[n]{r}$, adică M_k, $M_{k'}^*$ se situează pe un cerc cu centrul în origine și de rază $\sqrt[n]{r}$. Se consideră

$$x_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right),\quad x_1=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right),$$

$$x_0^*=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{-\alpha}{n}+i\sin\frac{-\alpha}{n}\right),\quad x_1^*=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{-\alpha+2\pi}{n}+i\sin\frac{-\alpha+2\pi}{n}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Poligonul $\{M_k, M_{k'}^*\}$ poate deveni poligon regulat cu n laturi, dacă rădăcinile $\{x_k\}$, $\{x_{k'}^*\}$ se confundă două cîte două, adică $\frac{2\alpha}{n}=\frac{2\pi}{n}$, $\alpha=\pi$; în acest caz $t_{1,2}=-r$, adică rădăcinile ecuației în t sînt egale și negative. Poligonul $\{M_k, M_{k'}^*\}$ devine poligon regulat cu $2n$ laturi, dacă $M_0^*M_0=M_0M_1^*$ (fig. 115), adică

$$\frac{2\alpha}{n}=\frac{2\pi}{n}-\frac{2\alpha}{n}, \text{ sau } \alpha=\frac{\pi}{2}.$$

În acest caz rădăcinile ecuației în t sînt $t_{1,2}=\pm ir$.

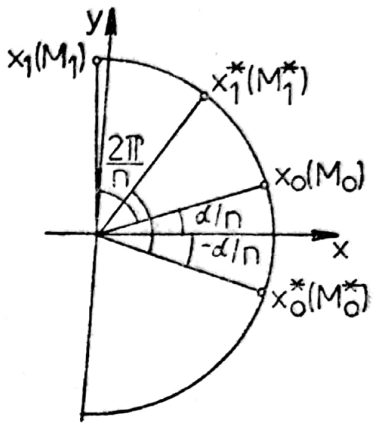


Fig. 115.

8. 1) Să se arate că dacă cel puțin două dintre numerele reale a, b, $-c$ sînt diferite, atunci egalitatea $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$ este echivalentă cu $(a+b-c)^3+27abc=0$.

Ce se întîmplă cu cele două egalități dacă $a=b=-c$?

2) Urmînd afirmațiile de la punctul precedent să se expliciteze o metodă posibilă de rezolvare a ecuațiilor iraționale de tipul $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)}$, pe mulțimea numerelor reale.

3) Să se găsească soluțiile ecuației

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}.$$

(G.M.B., Dumitru Acu)

Soluție. 1) Fie $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$. Ridicînd ambii membri la cub găsim $a+b+3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=c$. Apoi înlocuim pe $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ cu $\sqrt[3]{c}$ și deci $a+b-c=-3\sqrt[3]{abc}$. O nouă ridicare la cub implică $(a+b-c)^3+27abc=0$.

Fie $(a+b-c)^3+27abc=0$, adică $(a+b-c)^3=-27abc$. Extrăgînd rădăcina de ordinul trei din ambii membrii obținem $a+b-c=-3\sqrt[3]{abc}$. Observăm însă că aceasta se mai poate scrie $(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{-c})^3-3\sqrt[3]{ab(-c)}=0$ și că, utilizînd identitatea $u^3+v^3+w^3-3uvw=(u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-uw-vw)$, avem descompunerea $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c})((\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{c})^2-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{bc})=0$. Pe de altă parte, ipoteza că cel puțin două dintre numerele reale a, b, $-c$ sînt diferite implică $(\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{c})^2-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{bc}=\frac{1}{2}\{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{c})^2+(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^2\neq 0$.

De aceea rămîne numai $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}=0$.

Dacă $a=b=-c$, atunci prima egalitate se reduce la $c=0$, iar a doua este identic verificată.

2) Urmînd raționamentele de mai sus, de la ecuația $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)}$ se trece la ecuația $[f(x)+g(x)-h(x)]^3+27f(x)g(x)h(x)=0$, care se rezolvă pe mulțimea numerelor reale. Rădăcinile găsite se înlocuiesc pe rînd în sistemul $f(x)=g(x)=-h(x)$. Cele care nu satisfac acest sistem ca și cele care satisfac $f(x)=g(x)=-h(x)=0$ sînt soluții ale ecuației $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=$

$=\sqrt[3]{h(x)}$; cele care satisfac $f(x)=g(x)=-h(x)\neq 0$ nu sînt soluții ale ecuației $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)}$.

3) Ecuației date i se atașează ecuația rațională $x(4x^2-5)=0$ cu soluțiile $x_1=0$, $x_2=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{-\sqrt{5}}{2}$. Deoarece sistemul $x+1=x-1=-5x$ este incompatibil, toate soluțiile găsite sînt soluții ale ecuației iraționale.

9. Să se rezolve ecuația $C_{x+1}^4-3C_x^3+aC_{x-1}^2-x+2=0$, știind că rădăcinile sînt în progresie aritmetică; prin C_n^m s-au notat combinările de n obiecte luate cîte m, iar $a\in R$.

Soluție. Restricțiile pentru soluții sînt $x\geqslant 3$, $x\in N$. Ecuația $\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{24}-\frac{3x(x-1)(x-2)}{6}+\frac{a(x-1)(x-2)}{2}-(x-2)=0$ devine $x^3-12x^2+(11+12a)x-12(a+2)=0$. Prin ipoteză rădăcinile sînt în progresie aritmetică, $x_1=u-r$, $x_2=u$, $x_3=u+r$; din relațiile lui Viète $x_1+x_2+x_3=12$, $(x_1+x_3)x_2+x_1x_3=11+12a$, $x_1x_2x_3=12(a+2)$ rezultă $u=4$ și $r=\pm 1$. În final se obțin rădăcinile $(x_1, x_2, x_3)=(3, 4, 5)$, sau $(x_1, x_2, x_3)=(5, 4, 3)$, care satisfac restricțiile impuse.

10. Se dă polinomul $x\to P(x)=x^3-x^2-x-1$ și se cere:

1) Să se arate că ecuația $P(x)=0$ are o singură rădăcină reală x_1; să se determine aproximarea lui x_1 cu două cifre exacte.

2) Să se delimiteze un domeniu din planul complex, în care să fie cuprinse celelalte două rădăcini x_2, x_3 ale polinomului.

3) Să se arate că șirul $n\to S_n=x_2^n+x_3^n$ este real, convergent și să i se calculeze limita.

(Admitere I. P. București, text modificat)

Soluție. 1) $P'(x)=3x^2-2x-1$ se anulează pentru $x=-\frac{1}{3}$, $x=1$. Din șirul lui Rolle

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

rezultă că unica rădăcină reală a ecuației $P(x)=0$ este $x_1\in(1, 2)$.

$P'(x)>0$, $P''(x)>0$ pentru $x\in(1, 2)$, deci metoda coardei dă aproximarea prin lipsă, iar metoda tangentei — aproximarea prin adaos. Deoarece $x_1\in(1, 2)$, prima cifră exactă a lui x_1 este 1; se consideră șirul de iterare $v_n=v_{n-1}-\frac{P(v_{n-1})(b-v_{n-1})}{P(b)-P(v_{n-1})}$, $v_0=1$ și se calculează $v_1=1{,}666$, $v_2=1{,}816$. Șirul aproximărilor prin adaos este $t_n=t_{n-1}-\frac{P(t_{n-1})}{P'(t_{n-1})}$, $t_0=2$ și se calculează $t_1=1{,}857$; $t_2=1{,}842$. Relația $1{,}816<x_1<1{,}842$ permite scrierea lui x_1 cu două cifre exacte, $x\approx 1{,}8$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Fie $x_{2,3}=a\pm ib$, $|x_2|=|x_3|=r$; din relațiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=1$, $x_1x_2x_3=1$ rezultă $a=\frac{1-x_1}{2}\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ și $r^2=\frac{1}{x_1}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, sau $\frac{1}{\sqrt{2}}<r<1$.

În figura 116 s-au haşurat zonele în care sînt cuprinse rădăcinile x_2, x_3.

3) Dacă $x_{2,3}=r(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)$, atunci $S_n=2r^n\cos n\alpha\in R$.

Deoarece $|S_n|\leqslant 2r^n$ și $r^n\to 0$, rezultă că $S_n\underset{n\to\infty}{\to}0$, adică șirul $(S_n)_{n\in N}$ are limita nulă.

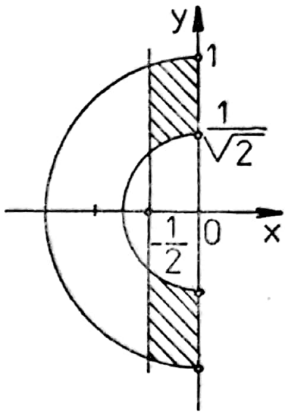


Fig. 116.

11. Fie ecuația $2x^4-x^3+2x^2+(2m-1)x-m=0$, $m\in R$.

Se cere:

1) Să se determine rădăcinile independente de m.

2) Să se discute numărul rădăcinilor reale după valorile parametrului m.

3) Să se determine m, astfel ca ecuația dată să aibă toate rădăcinile reale situate pe $(-1, 1)$.

4) Să se determine m pentru care rădăcinile reale sînt inverse între ele; aceeași întrebare pentru rădăcinile complexe.

Soluție. 1) Printre factorii raționali ai lui $\frac{a_n}{a_0}$ se găsește rădăcina $x_1=\frac{1}{2}$.

2) Eliminînd factorul $2x-1$, rămîne factorul $f(x)=x^3+x+m$. Deoarece $f'(x)=3x^2+1>0$, $\forall x, m\in R$, rezultă că f este strict crescătoare pe R (independent de m) și deci are o singură rădăcină reală. Se satisface: $x_2\in(-\infty, 0)$ pentru $m>0$, $x_2=0$ pentru $m=0$, $x_2\in(0, \infty)$ pentru $m<0$.

3) Se observă că $x_1=\frac{1}{2}\in(-1, 1)$. Apoi satisfacerea condiției $f(1)\cdot f(-1)<0$ conduce la inecuația $m^2-4<0$ cu soluția $m\in(-2, 2)$ și implică $x_2\in(-1, 1)$.

4) Condiția $x_1x_2=1$ se satisface pentru $x_2=2$, de unde rezultă $f(2)=0$, sau $m=-10$.

În cazul rădăcinilor complexe se pune condiția $x_3x_4=1$ pentru ecuația $f(x)=0$. Din relațiile lui Viete $x_2+x_3+x_4=0$, $(x_3+x_4)x_2+x_3x_4=1$, $x_2x_3x_4=-m$ rezultă $x_2=-m$, $x_3+x_4=m$ și $m\cdot(-m)+1=1$. Ultima egalitate, $m=0$, dă condiția ca rădăcinile complexe să fie inverse între ele.

12. Fie

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{vmatrix},$$ unde x_j sînt rădăcinile ecuației $x^3+px+q=0$, $p, q\in R$, $p, q\neq 0$.

Să se determine:

1) Valoarea lui Δ^2 în funcție de p și q.

2) Ecuația cu rădăcinile $y_1=\frac{x_2x_3}{x_1^2}$, $y_2=\frac{x_1x_3}{x_2^2}$, $y_3=\frac{x_1x_2}{x_3^2}$; să se arate că pentru $p>0$ ecuația în y nu are rădăcini întregi.

3) Ecuația cu rădăcinile $z_1=x_2^2+x_3^2$, $z_2=x_1^2+x_3^2$, $z_3=x_1^2+x_2^2$; să se arate că pentru $p<0$ ecuația în z are o singură rădăcină reală negativă.

Soluție. 1) Prin calcul rezultă $\Delta^2=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$. Se notează $P(x)=x^3+px+q$ și observăm că $\frac{P(x)}{x-x_1}=\frac{P(x)-P(x_1)}{x-x_1}=(x-x_2)(x-x_3)$; la limită, cînd $x\to x_1$, rezultă că $P'(x_1)=(x_1-x_2)(x_1-x_3)$. Procedînd analog pentru x_2, x_3 se obține $\Delta^2=-P'(x_1)\cdot P(x_2)P'(x_3)$; deci $-\Delta^2=(3x_1^2+p)(3x_2^2+p)(3x_3^2+p)=$ $=p^3+3p^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+9p(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)+27x_1^2x_2^2x_3^2=4p^3+27q^2$.

2) Ecuația în y este $y^3-S_1y^2+S_2y-S_3=0$;

$$S_1=y_1+y_2+y_3=\frac{1}{x_1^2x_2^2x_3^2}(x_2^3x_3^3+x_1^3x_3^3+x_1^3x_2^3)=\frac{1}{q^2}(p^2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+$$

$$+2pq(x_1+x_2+x_3)+3q^2=\frac{1}{q^2}(p^3+3q^2),$$ (se pot utiliza egalitățile $x_j^3=-px_j-q$, $j=1, 2, 3$);

$$S_2=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\frac{1}{x_1x_2x_3}(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=-\frac{1}{q}(-3q)=3;\ S_3=1.$$

Rezultă $Q(y)\equiv y^3-\left(\frac{p^3}{q^2}+3\right)y^2+3y-1=0$. Ecuația $Q(y)=0$ poate avea rădăcini întregi numai $y=\pm1$; pe de altă parte $Q(1)=-\frac{p^3}{q^2}\neq0$, $Q(-1)=-8-$ $-\frac{p^3}{q^2}\neq0$.

3) Ecuația în z este $z^3-\sigma_1z^2+\sigma_2z-\sigma_3=0$;

$$\sigma_1=z_1+z_2+z_3=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=-4p;$$

$$\sigma_2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=3(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)+x_1^4+x_2^4+x_3^4=5p^2.$$

(se pot utiliza și $x_j^4=-px_j^2-qx$, $j=1, 2, 3$);

$$\sigma_3=z_1z_2z_3=-(2p+x_1^2)(2p+x_2^2)(2p+x_3^2)=-2p^3-q^2.$$

Rezultă $T(z)\equiv z^3+4pz^2+5p^2z+2p^3+q^2=0$.

Folosim șirul lui Rolle pentru determinarea intervalelor în care sînt cuprinse rădăcinile; $T'(z)=3z^2+8pz+5p^2$ se anulează pentru $z'=-p$, $z''=-\frac{5p}{3}$; deoarece $p>0$ rezultă că $z''<z'$;

$$T(z')=q^2,\ T(z'')=\frac{4}{27}p^3+q^2.$$

z	$-\infty$	$-\frac{5p}{3}$	$-p$	(0)	$+\infty$
$T(z)$	$-\infty$	$T(z'')$	q^2		$+\infty$

Se observă că oricare ar fi semnul lui $T(z'')$ ecuația $T(z)=0$ are o singură rădăcină reală; dacă $T(z'')>0$, atunci rădăcina $z_0\in\left(-\infty, -\frac{5p}{3}\right)$, dacă $T(z'')<$ <0, atunci rădăcina $z_0\in\left(-\frac{5p}{3}, -p\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

13. 1) Fie $P_n(x)$ un polinom cu coeficienți reali și mulțimea rădăcinilor sale $\{x_j \mid P(x_j)=0,\ x_j=a_j+ib_j,\ j\in\overline{1,n}\}$.

Să se arate că rezultanta vectorilor de poziție ai punctelor $(a_j,\ b_j)$ din $R\equiv C(R^2$ suprapus cu $C)$ este situată pe axa reală.

2) Să se verifice proprietatea de la 1), determinîndu-se și rezultanta vectorilor de poziție, pentru ecuația cu coeficienți raționali $x^5-2x^4-2x^3+ax^2+bx+c=0$, dacă se cunosc rădăcinile $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{3}$.

Soluție. 1) Polinomul P_n are coeficienți reali și deci dacă admite o rădăcină complexă $x_0=a+ib$, admite și conjugata $\overline{x_0}=a-ib$; vectorii de poziție corespunzători fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate, $\vec{v_0}=\vec{ai}+\vec{bj}$, $\vec{w_0}=\vec{ai}-\vec{bj}$ sînt simetrici față de axa reală, suma lor fiind situată pe axa reală, $\vec{v_0}+\vec{w_0}=2\vec{ai}$. Pentru rădăcinile reale vectorii de poziție se situează pe axa reală; în concluzie, rezultanta vectorilor de poziție corespunzători rădăcinilor polinomului P_n este situată pe axa reală.

2) Avînd coeficienți raționali, ecuația admite și rădăcina $x_3=1-\sqrt{3}$; polinomul dat este deci divizibil prin x^2-2x-2 și se impune ca restul împărțirii să fie identic nul: $(2a+b)x+2a+c\equiv 0$. Se obține $(x^3+a)(x^2-2x-2)=0$; deoarece $x_1=1$ este rădăcină, rezultă $a=-1$ și deci $b=2$, $c=2$. Soluțiile sînt $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$, $x_{4,5}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. $\vec{v_1}=\vec{i}$, $v_{2,3}=(1\pm\sqrt{3})i$, $v_{4,5}=-\frac{1}{2}\vec{i}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ sînt vectorii de poziție corespunzători. Rezultanta este $\vec{r}=2\vec{i}$.

14. Se dau polinoamele

$$P(x)=x^5-3x^4-3x^3+9x^2-4x+a,\quad Q(x)=x^4+x^3-5x^2+x+b.$$

1) Să se determine a, b astfel ca polinoamele să aibă trei rădăcini comune $\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ și să se determine aceste rădăcini.

2) Se consideră triunghiul $\{M_1,\ M_2,\ M_3\}$, avînd ca vîrfuri imaginile rădăcinilor $x_1,\ x_2,\ x_3$ în planul $C\equiv R^2$; să se exprime vectorii medianelor triunghiului și unghiul determinat de o latură și mediană.

Soluție. 1) Una din variantele de rezolvare este metoda împărțirilor succesive (*algoritmul lui Euclid*);

$$P(x):Q(x)\ \text{dă restul}\ R_1(x)=6x^3-12x^2-bx+a+4b;$$

$$6Q(x):R_1(x)\ \text{dă restul}\ R_2(x)=(b+6)x^2+(6-b-a)x-3a-6b.$$

Deoarece rădăcinile comune sînt determinate de divizorul comun al polinoamelor P, Q, care trebuie să fie de gradul trei, se impune condiția ca $R_2(x)\equiv 0$, de unde rezultă $b=-6$, $a=12$. Divizorul comun este $R_1(x)=x^3-2x^2+x-2$, avînd rădăcinile $x_1=2$, $x_{2,3}=\pm i$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Exprimate analitic, în funcție de versorii ortogonali $\vec{i}$, $\vec{j}$, laturile sînt $\overrightarrow{M_3M_2}=2\vec{j}$, $\overrightarrow{M_3M_1}=2\vec{i}+\vec{j}$, iar mediana $\overrightarrow{M_3D}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{M_3M_2}+\overrightarrow{M_3M_1})=\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}$ (fig. 117). Analog, celelalte mediane. Deoarece

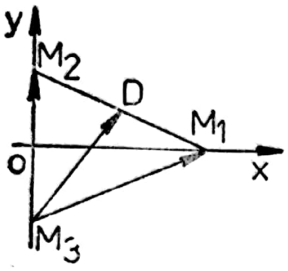


Fig. 117.

$$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{M_3M_2}, \overrightarrow{M_3D})=\frac{2\vec{j}\cdot\left(\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}\right)}{2\sqrt{1+\frac{9}{4}}}=\frac{3}{\sqrt{13}},$$

rezultă $\sphericalangle(\overrightarrow{M_3M_2}, \overrightarrow{M_3D})=\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$; analog se calculează celelalte.

15. Fie $x^6-x^5+2x^4+ax^3+2x^2-x+1=0$, $a\in R$; se cere:

1) Să se determine valorile lui a pentru care ecuația admite o rădăcină pe $(1, 2)$.

2) Să se arate că pentru $a=-3$ ecuația nu admite soluții reale.

Soluție. 1) Ecuația dată este simetrică și cu substituția $t=x+\frac{1}{x}$ rezultă $f(t)\equiv t^3-t^2-t+2+a=0$; deoarece funcția $x\to t=x+\frac{1}{x}$ este strict crescătoare pe $(1, 2)$, rezultă că realizează o bijecție: $\forall x\in(1, 2)\to \exists t\in\left(2, \frac{5}{2}\right)$, unic (și reciproc).

Observăm că $f'(t)=3t^2-2t-1$ se anulează pentru $t'=-\frac{1}{3}$, $t''=1$, și $f'(t)>0$ pe $\left(2, \frac{5}{2}\right)$; deoarece f este strict crescătoare pe $\left(2, \frac{5}{2}\right)$, condiția ca ecuația $f(t)=0$ să aibă o rădăcină pe acest interval este $f(2)\cdot f\left(\frac{5}{2}\right)<0$ sau $(a+1)\left(a+\frac{71}{8}\right)<0$ cu soluția $a\in\left(-\frac{71}{8}, -1\right)$.

2) Deoarece ecuația care rezultă, $f(t)\equiv t^3-t^2-t-1=0$ are o singură rădăcină reală $t_1\in(1, 2)$, ecuația în x satisface $x_1+\frac{1}{x_1}\in(1, 2)$. Inecuațiile $1<\frac{x^2+1}{x}<2$ devin: $\frac{x^2-2x+1}{x}<0$ cu soluția $x\in(-\infty, 0)$ și $\frac{x^2-x+1}{x}>0$ cu soluția $x\in(0, \infty)$; intersecția celor două mulțimi fiind mulțimea vidă, rezultă că nu există valori ale lui x care să satisfacă inecuațiile.

16. Știind că a_1, a_2, a_3, a_4 sînt termenii unei progresii aritmetice, să se rezolve ecuația

$$\frac{a_1a_4}{x^2-a_1x+1}+\frac{-a_2a_3}{x^2-a_2x+1}+\frac{-a_2a_3}{x^2-a_3x+1}+\frac{a_1a_4}{x^2-a_4x+1}=0,$$

exprimîndu-se rădăcinile în funcție de a_1 și a_4.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. Se impune $x^2-a_jx+1\neq 0$, $j=1, 2, 3, 4$. Apoi se observă că $x=0$ nu este o soluţie. De aceea înmulţind ecuaţia cu x şi notînd $x+\frac{1}{x}=t$, găsim

$$a_1a_4\left(\frac{1}{t-a_1}+\frac{1}{t-a_4}\right)=a_2a_3\left(\frac{1}{t-a_2}+\frac{1}{t-a_3}\right).$$

Dar $a_1+a_4=a_2+a_3$ implică scrierea

$$(2t-(a_1+a_4))\left(\frac{a_1a_4}{t^2-(a_1+a_4)t+a_1a_4}-\frac{a_2a_3}{t^2-(a_1+a_4)t+a_2a_3}\right)=0.$$

Primul factor din membrul stîng se anulează pentru $t_1=\frac{a_1+a_4}{2}$. Al doilea factor se anulează pentru $t_2=0$ sau $t_3=a_1+a_4$. Revenind la x găsim $x+\frac{1}{x}=t_k$, $k=1, 2, 3$, şi deci $x=\frac{t_k\pm\sqrt{t_k^2-4}}{2}$, $k=1, 2, 3$.

17. Fie numerele reale distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se arate că funcţia reală

$$x\to R(x)=\begin{vmatrix} \frac{1}{x-x_1} & \frac{1}{x-x_2} & \ldots & \frac{1}{x-x_n} \\ \frac{1}{x-x_2} & \frac{1}{x-x_3} & \ldots & \frac{1}{x-x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{x-x_n} & \frac{1}{x-x_1} & \ldots & \frac{1}{x-x_{n-1}} \end{vmatrix}$$

are cel puţin $n-1$ zerouri reale distincte.

Soluţie. Evident se impune $x\neq x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Apoi, adunînd toate liniile la prima linie, găsim

$$R(x)=\left(\frac{1}{x-x_1}+\ldots+\frac{1}{x-x_n}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{x-x_2} & \frac{1}{x-x_3} & \ldots & \frac{1}{1-x_1} \\ \frac{1}{x-x_n} & \frac{1}{x-x_1} & \ldots & \frac{1}{x-x_{n-1}} \end{vmatrix}=\frac{Q'(x)}{Q(x)}\Delta(x),$$

unde $Q(x)$ este polinomul real cu rădăcinile distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Deoarece teorema lui Rolle afirmă că polinomul $Q'(x)$ are $n-1$ rădăcini reale distincte, rezultă că $R(x)=0$ are cel puţin $n-1$ rădăcini reale distincte.

18. 1) Să se arate că

$$(x+2a)^{2n}+x^{2n}\equiv 2\prod_{j=1}^{n}(x^2+2ax+b_j),$$

unde $a\in R-\{0\}$ şi $b_j>a^2$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Considerăm ecuația $(x+2a)^{2n}+x^{2n}=0$ pe care o transcriem în forma echivalentă $\left(\frac{x+2a}{x}\right)^{2n}=-1$. Se poate considera $\left(\frac{x+2a}{x}\right)^{n}=\pm i$ și deci $\frac{x+2a}{x}=\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{n}\pm i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{n}$, $k=0, 1, 2, \ldots n-1$. Rezultă că rădăcinile ecuației sînt de forma

$$x_1=\frac{2a}{-1+\cos\varphi+i\sin\varphi},\quad \bar{x}_1=\frac{2a}{-1+\cos\varphi-i\sin\varphi}.$$

De aceea $x_1+\bar{x}_1=-2a$ și $x_1\bar{x}_1=\frac{2a^2}{1-\cos\varphi}=b>a^2$ c.c.t.d.

2) Se consideră $P(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1$. Să se calculeze:

(1) $S_{n-1}(a)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x_k-a}$, $S_{n-2}(a)=\sum_{\substack{k,\,j=1\\ k\neq j}}^{n-1}\frac{1}{(x_k-a)(x_j-a)}$,

unde $a\in R$, $a\neq x_k$, $a\neq x_j$, $P(x_k)=0$, $P(x_j)=0$, $k\neq j$;

(2) $\lim_{a\to\infty}(a^2S_{n-2}(a)+aS_{n-1}(a))$.

(3) $S=\sum\frac{1}{x_1x_2\ldots x_m}$, unde produsele se fac după toate combinările de m rădăcini din cele $n-1$.

Soluție. (1) $S_{n-1}(a)=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a-x_k}=-\frac{P'(a)}{P(a)}$; $S_{n-2}(a)=\sum_{i\neq j}\frac{1}{(a-x_j)(a-x_k)}=$
$=\frac{P''(a)}{P(a)}$: Deoarece $P(x)=\frac{x^n-1}{x-1}$, rezultă $P'(x)=\frac{(n-1)x^n-nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}$, $P''(x)=$
$=\frac{(n-1)(n-2)x^n+2n(n-2)x^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}}{(x-1)^3}$.

Deci $S_{n-1}(a)=\frac{(n-1)a^n-na^{n-1}+1}{(1-a^n)(a-1)}$, $S_{n-2}(a)=\frac{(n-1)(n-2)a^n-2n(n-2)a^{n-1}+n(n-1)a^{n-2}}{(a-1)(a^n-1)}$:

(2) $\lim_{a\to\infty}(a^2S_{n-2}(a)+aS_{n-1}(a))=\lim_{a\to\infty}\frac{a^2P''(a)-aP'(a)}{P(a)}=$
$=\lim_{a\to\infty}\frac{(n-1)(n-2)a^{n-1}-(n-1)a^{n-1}+A_1a^{n-2}+\ldots+A_{n-1}}{a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1}=(n-1)(n-2)-(n-1)=$
$=(n-1)(n-3)$.

(3) Se ia suma după toate combinările posibile de m factori din $n-1$:

$$S_{n-1-m}(a)=(-1)^m\sum\frac{1}{(a-x_1)(a-x_2)\ldots(a-x_m)}=(-1)^m\frac{P^{(m)}(a)}{P(a)};$$

$$S_{n-1-m}(0)=\sum\frac{1}{x_1x_2\ldots x_m}=(-1)^m\frac{P^{(m)}(0)}{P(0)}.$$

Deoarece $P^{m}(x)=(n-1)(n-2)\ldots(n-m)x^{n-1-m}+\ldots+m!$, $P^{m}(0)=m!$ și $S_{n-1-m}(0)=(-1)^m m!$.

19. Fie $P(x)=a_kx^k+\ldots+a_1x+a_0$ un polinom cu coeficienți întregi. Să presupunem că există patru întregi distincți x_1, x_2, x_3, x_4 astfel încît $P(x_i)=$

Scanned with OKEN Scanner

$=2$, $i=1, 2, 3, 4$. Să se demonstreze că $P(x)$ nu ia valorile 1, 3, 5, 7, 9 pentru nici o valoare întreagă a lui x.

(Olimpiadă, R. P. Chineză, 1963)

Soluție Fie $Q(x)=P(x)-2$. Deoarece $Q(x_i)=0$, $i=1, 2, 3, 4$, avem $Q(x)=$ $=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)R(x)$, unde $R(x)$ este un polinom cu coeficienți întregi. Astfel dacă $x\in Z$, atunci $Q(x)$ este un întreg care se descompune în cinci factori întregi dintre care cel puțin patru sînt diferiți. Dacă ar exista $x\in R$ încît $P(x)=1, 3, 5, 7, 9$, ar implica $Q(x)=-1, 1, 3, 5, 7$. Ținînd însă seama că nici unul dintre aceste numere nu se poate scrie ca produsul a cinci întregi, dintre care cel puțin patru să fie diferiți, rămîne că $P(x)\neq 1, 3, 5, 7, 9$, $\forall x\in Z$.

20. Fie $p>1$ un număr întreg cu proprietatea că polinomul x^2-x+p ia valori numere prime pentru toți întregii x care satisfac $0\leqslant x<p$. (De exemplu: $p=5$ sau $p=41$.) Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} b^2-4ac=1-4p \\ 0<a\leqslant c \\ -a\leqslant b<a \\ a,\ b,\ c\in Z \end{cases}$$

are o soluție unică (a, b, c).

(Competiția William Lowell Putnam, S.U.A., 1973)

Soluție. Evident, o soluție a sistemului dat este $a=1$, $b=-1$, $c=p$. Să arătăm că aceasta este singura soluție.

Deoarece $b^2=1+4(ac-p)$, adică $b^2\equiv 1 \pmod 4$, rezultă că b trebuie să fie impar. Punem $|b|=2x-1$.

Din $b^2\leqslant a^2$, $-4ac\leqslant -4a^2$, $b^2-4ac=1-4p$ rezultă $1-4p\leqslant -3a^2$, adică $a\leqslant \sqrt{\frac{4p-1}{3}}$. Astfel $0\leqslant x=\frac{1+|b|}{2}<\frac{1+a}{2}\leqslant \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{4p-1}{3}}\right)<p$.

Înlocuind pe $b^2=(2x-1)^2$ în $b^2=1+4(ac-p)$ găsim $x^2-x+p=ac$. De aceea produsul ac trebuie să fie un număr prim. Deoarece $0<a\leqslant c$ rezultă $a=1$, iar din $-1\leqslant b<1$ și din imparitatea lui b găsim $b=-1$. Acestea implică $c=p$.

21. Fie a, b și c trei întregi distincți și P un polinom avînd toți coeficienții întregi. Să se arate că este imposibil ca $P(a)=b$, $P(b)=c$ și $P(c)=a$.

(Olimpiadă, S.U.A., 1974)

Soluție. Fie $P(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$, unde $p_i\in Z$. Presupunem că

$$\begin{cases} P(a)=p_0a^n+p_1a^{n-1}+\ldots+p_{n-1}a+p_n=b \\ P(b)=p_0b^n+p_1b^{n-1}+\ldots+p_{n-1}b+p_n=c \\ P(c)=p_0c^n+p_1c^{n-1}+\ldots+p_{n-1}c+p_n=a. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scăzînd aceste egalităţi, două cîte două, şi factorizînd deducem

(*) $\alpha(a-b)=b-c,\ \beta(b-c)=c-a,\ \gamma(c-a)=a-b,$

unde expresiile lui α, β, γ sînt evidente. Acestea implică $\alpha\beta\gamma=1$ (în numere întregi), adică

(1) $\alpha=1, \quad \beta=1, \quad \gamma=1$

(2) $\alpha=1, \quad \beta=-1, \quad \gamma=-1$

(3) $\alpha=-1, \quad \beta=1, \quad \gamma=-1$

(4) $\alpha=-1, \quad \beta=-1, \quad \gamma=1.$

Ţinînd seama de expresiile lui α, β şi γ din (*), rezultă că (1) este imposibilă. Analog (*) şi (2), (*) şi (3), (*) şi (4) sînt respectiv contradictorii.

22. Fie $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ şi $S(x)$ patru polinoame pentru care avem

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x).$$

Să se arate că $x-1$ este un factor al lui $P(x)$.

(Olimpiadă, S.U.A., 1976)

Soluţie. Este suficient să verificăm că $P(1)=0$. Pentru aceasta fie 1, ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 rădăcinile ecuaţiei $x^5=1$. Evident $\varepsilon_i^4+\varepsilon_i^3+\varepsilon_i^2+\varepsilon_i+1=0$, $i=1, 2, 3, 4$, De aceea $P(1)+\varepsilon_iQ(1)+\varepsilon_i^2R(1)=0$, $i=1, 2, 3, 4$.

Deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \\ 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3^2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{(determinant Vandermonde)}$$

sistemul precedent (liniar şi omogen, 4 ecuaţii cu 3 necunoscute) admite numai soluţia banală $P(1)=Q(1)=R(1)=0$.

Observaţie. O variantă a acestei probleme a fost prezentată de *Sorin Rubinstein* în *G.M.B.* (nr. 12 (1977), 493—495) în felul următor: să se arate că dacă $P_1, \ldots, P_k$ sînt k polinoame astfel încît $P_1(x^{k+1})+xP_2(x^{k+1})+\ldots+x^{k-2}P_{k-1}(x^{k+1})=(x^k+x^{k-1}+\ldots+1)P_k(x)$, atunci $P_1(1)=\ldots=P_k(1)=0$.

O altă variantă a problemei este următoarea: să se arate că dacă $P_1, \ldots, P_{k+1}$ sînt $k+1$ polinoame astfel încît

$$P_1(x^{k+1})+xP_2(x^{k+1})+\ldots+x^{k-1}P_k(x^{k+1})=(x^k+x^{k-1}+\ldots+1)P_{k+1}(x),$$

atunci $P_1(1)=\ldots=P_{k+1}(1)=0$.

23. Să se rezolve inecuaţia

$$(x-1)^{\log_4(x+2)-\log_2 x}<1.$$

Soluţie. Existenţa membrului stîng impune: $0<x<1$ şi $\log_4(x+2)-\log_2 x=n\in Z$, sau $x=1$ şi $\log_4(x+2)-\log_2 x>0$, sau $x>1$.

(1) Fie $0<x<1$ și $\log_4(x+2)-\log_2 x=n\in Z$. Deoarece ecuația $\log_4(x+2)-\log_2 x=n$ este echivalentă cu $2^{2n}x^2-x-2=0$, ne interesează acele valori ale lui n pentru care $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\cdot 2^{2n}}}{2^{2n+1}}$ sînt cuprinse în $(0, 1)$. Rezultă

$$x\in\left\{\frac{1+\sqrt{1+8\cdot 2^{2n}}}{2^{2n+1}}\,\middle|\,n=1, 3\ 2,,\ldots\right\}\subset(0,\ 1)$$

(2) Se observă că $x=1$ este o soluție.

(3) Pentru $x\in(1,\ 2)$ rezultă $\log_4(x+2)-\log_2 x>0$, sau $\frac{x+2}{x^2}>1$, care are soluția $x\in(-1,\ 2)\cap(1,\ 2)=(1,\ 2)$.

(4) Evident, $x=2$ nu convine.

(5) Pentru $x\in(2,\ \infty)$ rezultă $\log_4(x+2)-\log_2 x<0$, sau $0<\frac{x+2}{x^2}<1$ cu soluția $x\in\{(-2,\ -1)\cup(2,\ \infty)\}\cap(2,\ \infty)=(2,\ \infty)$.

În concluzie, soluția problemei puse este

$$x\in\left\{\frac{1+\sqrt{1+8\cdot 2^{2n}}}{2^{2n+1}}\,\middle|\,n=1,\ 2,\ 3,\ldots\right\}\cup(1,\ 2)\cup(2,\ \infty).$$

Precizare (*vezi* [1]). Pentru stabilirea domeniului de definiție al funcției definită de expresia din membrul stîng se ține seama de faptul că în mulțimea numerelor reale puterile naturale se definesc pentru orice bază; puterile întregi x^m, $m=0,\ -1,\ -2,\ldots$ se definesc numai pentru $x\neq 0$; puterile raționale x^r, $r>0$, se definesc pentru $x\geqslant 0$, iar puterile raționale x^r, $r\leqslant 0$, se definesc numai pentru $x>0$; puterile reale x^y, $y>0$ se definesc pentru $x\geqslant 0$, iar puterile reale x^y, $y\leqslant 0$ se definesc numai pentru $x>0$.

Pe de altă parte, dacă n, $m\in N$ și $n=$impar sau $m=$par, atunci $\sqrt[n]{x^m}$ există pentru orice x real; dacă $n=$impar $\in N$ și $m=0,\ -1,\ -2,\ldots$, atunci $\sqrt[n]{x^m}$ există numai pentru $x\neq 0$; etc.

24. Să se rezolve sistemul

$$(\cos\pi x)^{\log_a x+\log_x a}\geqslant(1+\operatorname{tg}^2\pi x)^{\cos y}$$

$$\pi\sin^2 y+\cos^2 y\cdot\operatorname{arctg} x\leqslant\operatorname{arctg} x,$$ presupunînd că $0<\cos\pi x<1$.

Soluție. Mulțimea posibilă este determinată de condițiile $0<\cos\pi x<1$, $x>0$ și rezultă $A_n=\left(2n\pi-\frac{\pi}{2},\ 2n\pi\right)\cup\left(2n\pi,\ 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $\forall n\in N$, iar $A=\bigcup_{n\in N}A_n$. Deoarece $(\cos\pi x)^{\log_a x+\log_x a}\geqslant(\cos\pi x)^{-2\cos y}$, iar $\sin^2 y(\pi-\operatorname{arctg} x)\leqslant 0$, prima inecuație devine $\log_a x+\log_x a\leqslant -2\cos y$; deoarece $\pi-\operatorname{arctg} x>0$, a doua inecuație admite soluția $y=k\pi$. Înlocuind, rezultă $\log_a x+\log_x a\leqslant 2\cdot(-1)^{k+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $y=2m\pi$, inecuația devine succesiv $\log_a x+\log_x a\leqslant -2$, $\frac{(\log_a x+1)^2}{\log_a x}\leqslant 0$; dacă $a\in(0,\ 1)$ se obține $x\in\left\{(1,\ \infty)\cup\left\{\frac{1}{a}\right\}\right\}\cap A=(1,\ \infty)\cap A$, iar dacă $a\in(1,\ \infty)$ rezultă $x\in\left\{(0,\ 1)\cup\left\{\frac{1}{a}\right\}\right\}\cap A=(0,1\ )\cap A$.

Pentru $y=(2m+1)\pi$, se transcrie succesiv $\log_a x+\log_x a\leqslant 2$, $\frac{(\log_a x-1)^2}{\log_a x}\leqslant 0$; pentru $a\in(0,\ 1)$ rezultă $x\in\{(1,\ \infty)\cup\{a\}\}\cap A$, iar cînd $a\in(1,\ \infty)$, se obține $x\in\{(0,\ 1)\cup\{a\}\}\cap A$.

Mulțimea soluțiilor sistemului este de forma $\{(x,\ y)\}$.

25. Fie sistemul

$$\begin{cases} x^{2x+y}=y^{\alpha} \\ y^{2x+y}=x^{\beta} \\ x,\ y\in(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)=E, \end{cases}$$

unde α și β sînt parametri reali nenuli.

1) Să se arate că dacă α și β sînt de semne contrare, atunci sistemul nu admite nici o soluție.

2) Să se arate că dacă α și β sînt pozitive, atunci sistemul poate să admită soluție unică.

3) Cîte soluții admite sistemul dacă α și β sînt negative?

Soluție. 1) Sistemul dat este echivalent cu

$$(1)\quad \begin{cases} (2x+y)\ln x=\alpha\ln y \\ (2x+y)\ln y=\beta\ln x, \quad x,y\in E. \end{cases}$$

Deoarece nici unul dintre membrii ecuațiilor acestui sistem nu se poate anula, sistemul (1) este echivalent cu

$$(2)\quad \begin{cases} (2x+y)\ln x=\alpha\ln y \\ (2x+y)^2\ln x\ln y=\alpha\beta\ln x\ln y, \quad x,y\in E \end{cases}$$

sau cu

$$(3)\quad \begin{cases} (2x+y)\ln x=\alpha\ln y \\ (2x+y)^2=\alpha\beta, \quad x,\ y\in E. \end{cases}$$

Dacă $\alpha\beta<0$, atunci sistemul (3) este o imposibilitate. Dacă $\alpha\beta>0$, atunci sistemul (3) este echivalent cu

$$(4)\quad \begin{cases} 2x+y=\sqrt{\alpha\beta} \\ \ln y=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha}\ln x=\frac{|\alpha|}{\alpha}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\ln x, \quad x,y\in E. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Fie $\alpha>0$ și deci $\beta>0$. Punem $\sqrt{\alpha\beta}=p$ și $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=q$. Sistemul (4) se scrie

$$\begin{cases} y=x^q \\ 2x+y=p \\ x,\ y\in E. \end{cases}$$

Funcția $f:(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)\to(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ definită prin $y=x^q$, $q>0$, este strict crescătoare (fig. 118).

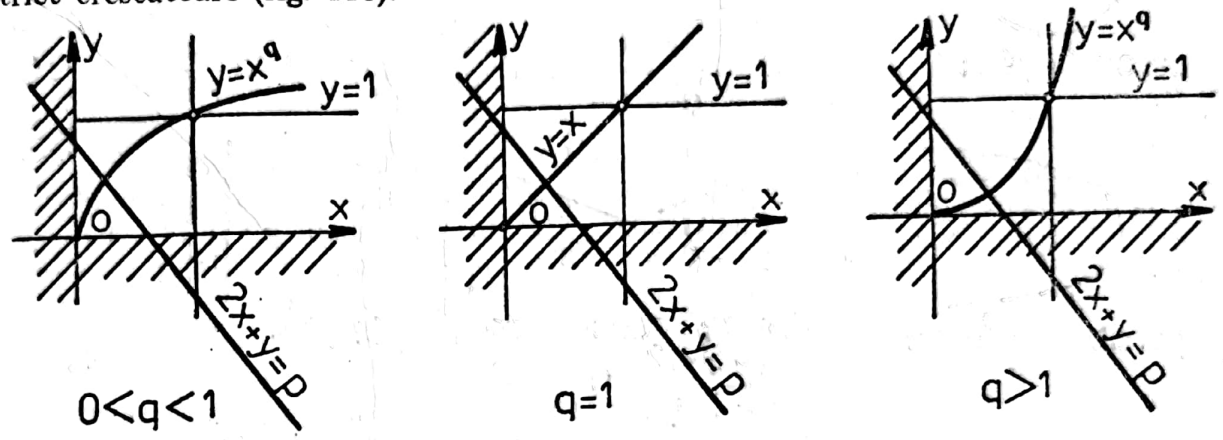


Fig. 118.

Se observă că dacă $p\in(0,\ 3)\cup(3,\ \infty)$, atunci $G(f)$ taie segmentul de dreaptă $2x+y=p$, $x,\ y\in E$ într-un singur punct și deci sistemul admite o soluție unică $(x,\ y)$. Dacă $p=3$, atunci sistemul este o imposibilitate.

3) Fie $\alpha<0$ și deci $\beta<0$. Sistemul (4) se scrie

$$\begin{cases} y=x^{-q} \\ 2x+y=p \\ x,\ y\in E. \end{cases}$$

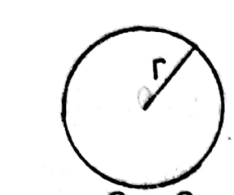
Funcția $f:(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)\to(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ definită prin $y=x^{-q}$ este strict descrescătoare deoarece $y'=-qx^{-q-1}$. Segmentul $2x+y=p$, $(x,\ y)\in E$, este tangent la graficul $G(f)$ în punctul a cărui abscisă satisface $qx^{-q-1}=2$, $x\neq 1$, adică $x=\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{1+q}}$ pentru $q\neq 2$. Ordonata acestui punct este $y=\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{q}{1+q}}\neq 1$.

Astfel pentru $q\neq 2$ avem: pentru $p=p_0=2\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{1+q}}+\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{-q}{1+q}}$, soluție dublă; pentru $p>p_0$ două soluții; pentru $p<p_0$, nici o soluție. Dacă $q=2$ sistemul nu poate avea soluție dublă.

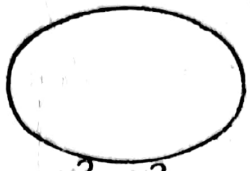
26. Inegalități pătratice

Fie $P(x,\ y)$ un polinom real de gradul doi în variabilele reale x și y, adică $P(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}$, cu ajutorul căruia construim

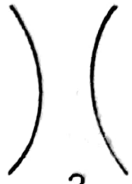
mulțimea $\Gamma=\{(x, y) \mid (x, y)\in R^2, P(x, y)=0\}$. Utilizînd rotații și (sau) translații se poate arăta că Γ este echivalentă cu una dintre următoarele mulțimi:



cerc: $x^2+y^2=r^2$



elipsă: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$



hiperbolă: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

parabolă: $y^2=2px$

drepte concurente $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

drepte paralele. $x^2-a^2=0$

drepte confundate $x^2=0$

mulțime cu un singur element $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$

$\varnothing$

mulțimea vidă: $x^2+a^2=0$ sau $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$

Mulțimea Γ a punctelor $M(x, y)$ din plan ale căror coordonate satisfac ecuația $P(x, y)=0$ se numește *curbă algebrică de ordinul al doilea sau conică*. Dacă Γ este o conică care nu se reduce la cel mult drepte confundate, atunci ea împarte planul xOy în două submulțimi.

$I=\{(x, y \mid (x, y)\in R^2, P(x, y)<0\}$, $II=\{(x, y) \mid (x, y)\in R^2, P(x, y)>0\}$, adică $P(x, y)$ păstrează semnul pentru toate punctele situate în aceeași submulțime și ia valori de semne diferite pentru puncte situate în submulțimi diferite. În locul demonstrației pe cazul general preferăm dovedirea afirmației pe unele cazuri particulare.

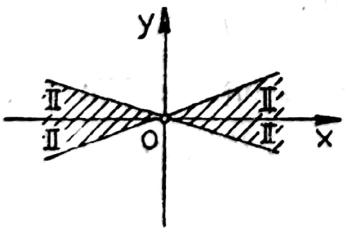


Fig. 119.

Fie $P(x, y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, $a\geqslant b$. Se observă că în acest caz avem situația din fig. 119.

Să considerăm cazul hiperbolei $P(x, y)\equiv\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $a\geqslant b$ (fig. 120). Fie $D: x=lt$, $y=mt$ o dreaptă care trece prin origine. Ea taie hiperbola în punctele $M_1(x, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ corespunzătoare soluțiilor reale t_1, t_2 ale ecuației $t^2\left(\frac{l^2}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)-1=0$. Se obser

vă că această ecuație are rădăcini reale numai pentru $\frac{l^2}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}>0$, adică dreapta D trebuie să se afle în mulțimea II determinată de asimptotele hiperbolei. Pe de altă parte dreapta D se împarte în două submulțimi: una corespunzătoare lui $t\in(-\infty, t_1)\cup(t_2, \infty)$, alta corespunzătoare lui $t\in(t_1, t_2)$. Se observă că $P(x, y)=t^2\left(\frac{l^2}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)-1$ este strict pozitiv pentru $t_1\in(t_1, t_2)$ și strict negativ pentru $t\in(-\infty, t_1)\cup(t_2, \infty)$, adică dacă dreapta D are direcția variabilă, atunci regiunea „măturată" de reuniunea semidreptelor $t\in(-\infty, t_1)\cup(t_2, \infty)$ este II, iar regiunea „măturată" de segmentul M_1M_2 este I.

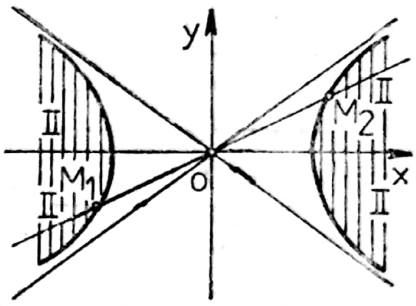


Fig. 120.

Fie $P(x, y)$ un polinom real de gradul doi. O inegalitate de forma $P(x, y)\geqslant 0$ se numește *inegalitate pătratică*. Avînd în vedere considerațiile precedente rezultă că pentru a rezolva o inegalitate pătratică este suficient să trasăm curba $P(x, y)=0$ și apoi să stabilim submulțimea din plan pe care $P(x, y)$ are semnul plus sau submulțimea pe care are semnul minus. Deoarece $P(x, y)$ păstrează semn constant pe o asemenea submulțime, pentru stabilirea acestui semn este suficient să alegem un punct particular (x_0, y_0) și să vedem ce semn are numărul $P(x_0, y_0)$.

Problemă. Utilizînd teorema lui Rolle să se discute natura rădăcinilor ecuației în x,

$$P(x; a, b)=2x^3-3(a+b)x^2+6abx+a^2b^2=0,$$

unde a și b sînt parametri reali.

Soluție. Derivata $P'(x)=6x^2-6(a+b)x+6ab$ are rădăcinile $x=a$, $x=b$. Formăm șirul lui Rolle

$P(-\infty)$	$P(a; a, b)=f(a, b)$	$P(b; a, b)=g(a, b)$	$P(\infty)$
$-\infty$	$a^2(-a+3b+b^2)$	$b^2(-b+3a+a^2)$	$+\infty$

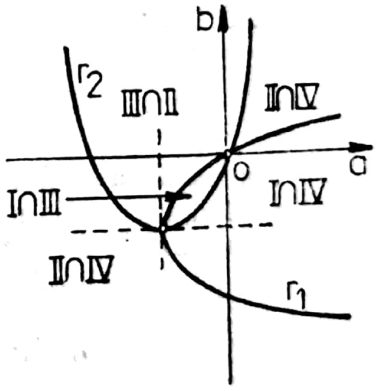


Fig. 121.

Dacă a și b sînt privite ca fiind coordonatele unui punct din planul Oab, atunci Γ_1: $a=b^2+3b$, Γ_2: $b=a^2+3a$ sînt parabole în acest plan (fig. 121). Aceste parabole împart planul în regiuni; fie zona I — interioară parabolei Γ_1, zona II — exterioară parabolei Γ_1, zona III — interioară parabolei Γ_2, zona IV — exterioară parabolei Γ_2. Dacă $a=0$, $b=0$, atunci ecuația are rădăcina triplă $x=0$; dacă $a=0$, $b\neq 0$

(sau $a\neq 0$, $b=0$), ecuația are rădăcinile $x_{1,2}=0$, $x_3=\frac{3b}{2}$ $\left(\text{sau } x_{1,2}=0,\ x_3=\frac{3a}{2}\right)$. Pentru $a\neq 0$, $b\neq 0$ (fie $a<b$) rezultă tabelul

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
P / (a, b)	$a^2(b^2+3b-a)$	$b^2(a^2+3a-b)$			
I$\cap$III	$-$	$-$	$-$	$-$	$x_1\in(b, \infty)$, $x_{2,3}\in C$
I$\cap$IV	$-$	$-$	$+$	$+$	$x_1\in(a, b)$, $x_{2,3}\in C$
II$\cap$IV	$-$	$+$	$+$	$+$	$x_1\in(-\infty, a)$, $x_{2,3}\in C$
II$\cap$III	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1\in(-\infty, a)$, $x_2\in(a, b)$, $x_3\in(b, \infty)$
IV$\cap\{\Gamma_1\}$	$-$	0	$+$	$+$	$x_1=x_2=a$, $x_3\in(-\infty, b)$
III$\cap\{\Gamma_1\}$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1=x_2=a$, $x_3\in(b, \infty)$
II$\cap\{\Gamma_2\}$	$-$	$+$	0	$+$	$x_1\in(-\infty, a)$, $x_2=x_3=b$
I$\cap\{\Gamma_2\}$	$-$	$-$	0	$+$	$x_1\in(a, \infty)$, $x_2=x_3=b$

Analog, pentru $a>b$.

27. Inegalitatea geometrică

Fie $a_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$. Să arătăm că între media aritmetică $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ și media geometrică $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ există relația

$$(1)\qquad \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=\ldots=a_n$. Pentru aceasta notăm cu s_n membrul stîng și evident, fără a scădea generalitatea, putem presupune că $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ și $a_1<a_n$. Rezultă $a_1<s_n<a_n$ și deci

(2) $s_n(a_1+a_n-s_n)-a_1a_n=(a_1-s_n)(s_n-a_n)>0$.

Relația (1) este adevărată pentru $n=2$. Presupunem că ea este adevărată pentru $n-1$; deoarece media aritmetică a numerelor $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ și $a_1+a_n-s_n$ este s_n, avem $s_n^{n-1}\geqslant a_2a_3\ldots a_{n-1}(a_1+a_n-s_n)$. Înmulțind cu s_n și ținînd seama de (2) găsim

$$s_n^n\geqslant a_2a_3\ldots a_{n-1}[s_n(a_1+a_n-s_n)]>a_1a_2\ldots a_n.$$

Astfel (1) este adevărată, $\forall n\in N$.

Scanned with OKEN Scanner

Inegalitatea (1) se generalizează astfel

$$\delta_1 a_1+\delta_2 a_2+\ldots+\delta_n a_n \geqslant a_1^{\delta_1} a_2^{\delta_2}\ldots a_n^{\delta_n} \tag{3}$$

$$a_i \geqslant 0,\ \delta_i>0,\ \delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n=1,$$

egalitatea avînd loc dacă şi numai dacă $a_1=a_2=\ldots=a_n$. Făcînd schimbarea de variabile $u_i=\delta_i a_i$ găsim forma echivalentă

$$u_1+u_2+\ldots+u_n \geqslant \left(\frac{u_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{u_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\ldots\left(\frac{u_n}{\delta_n}\right)^{\delta_n}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $\frac{u_1}{\delta_1}=\frac{u_2}{\delta_2}=\ldots=\frac{u_n}{\delta_n}$.

În cărţile ce conţin probleme de optimizări inegalitatea (3) este numită *inegalitate geometrică.*

O consecinţă directă a relaţiei (1) este inegalitatea dintre media geometrică şi media armonică $\sqrt[n]{a_1 a_2\ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$; mai general, pentru $a_i>0$, $\delta_i>0$, $\sum_{i=1}^{n}\delta_i=1$, relaţia (3) implică

$$a_1^{\delta_1} a_2^{\delta_2}\ldots a_n^{\delta_n} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i a_i^{-1}\right)^{-1},$$

egalitatea avînd loc dacă şi numai dacă toate a_i-urile sînt egale.

Aplicaţie. Se dă ecuaţia

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=m.$$

1) Să se arate că pentru m întreg şi $m<n$ ecuaţia nu admite soluţii în numere întregi şi pozitive.

2) Pentru $m=n$ să se găsească toate soluţiile întregi şi pozitive.

Rezolvare. Avem $\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3}\ldots\frac{x_{n-1}}{x_n}\frac{x_n}{x_1}}=1$, egalitatea avînd loc numai pentru

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n}{x_1}=1.$$

Rezultă că pentru $m<n$, ecuaţia nu are soluţii, iar pentru $m=n$ avem $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$, cu x arbitrar din N.

28. Ştiind că x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, variază în intervalul $[0, \pi/2)$ şi utilizînd inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică, să se găsească valoarea maximă a sumei inverselor celor C_n^j sume formate luînd cîte j numere odată dintre numerele $\sec x_1$, $\sec x_2, \ldots, \sec x_n$.

Soluţie. Mai întîi observăm că

$$\frac{1}{\sec x_1}+\frac{1}{\sec x_2}+\ldots+\frac{1}{\sec x_n}=\cos x_1+\cos x_2+\ldots+\cos x_n\leqslant n.$$

Apoi, din inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică,

$$\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\sec x_i\geqslant\frac{j}{\sum\limits_{i=1}^{j}\frac{1}{\sec x_i}},$$

deducem

$$\frac{1}{\sec x_1+\sec x_2+\ldots+\sec x_j}\leqslant\frac{1}{j^2}\sum_{i=1}^{j}\cos x_i,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $\cos x_1=\cos x_2=\ldots=\cos x_j$, adică dacă şi numai dacă $x_1=x_2=\ldots=x_j$.

Inegalităţi analoge au loc pentru oricare j dintre numerele date. Sumînd cele C_n^j inegalităţi deducem

$$\sum\frac{1}{\sec x_{i_1}+\sec x_{i_2}+\ldots+\sec x_{i_j}}\leqslant\frac{1}{j^2}C_{n-1}^{j-1}\sum_{i=1}^{n}\cos x_i=\frac{n}{j^2}C_{n-1}^{j-1},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x_i=\ldots=x_n=0$.

29. Asupra zerourilor unor funcţii

I. Zerourile funcţiilor reale. Fie $f:A\to R$ o funcţie reală de variabilă reală. Un punct $x_0\in A$ cu proprietatea $f(x_0)=0$ se numeşte *zero* sau *rădăcină* pentru funcţia f. Mulţimea zerourilor lui f va fi notată prin $N(f)=\{x\,|\,x\in A,\ f(x)=0\}$.

Se observă că expresia „funcţie identic nulă pe o mulţime" se suprapune cu noţiunea de funcţie definită pe $N(f)$.

(1) Dacă A este o mulţime închisă în R şi $f:A\to R$ este o funcţie continuă, atunci mulţimea $N(f)$ este închisă în R.

Demonstraţie. Fie x_n un şir de elemente din $N(f)$ convergent către x_0. Deoarece A este închisă, $x_0\in A$. Să arătăm că $x_0\in N(f)$. Pentru aceasta ne folosim de faptul că x_n sînt zerouri şi de faptul că f este continuă în x_0; deci $f(x_n)=0$ şi $0=\lim f(x_n)=f(\lim x_n)=f(x_0)$, adică $x_0\in N(f)$.

Variantă: mulţimea $N(f)$ este închisă în R deoarece mulţimea $\{0\}$ este închisă în R şi $N(f)=f^{-1}(\{0\})$.

(2). Fie A un interval, $f:A\to R$ o funcţie continuă şi $x_1<x_2$ două puncte din A. Dacă $f(x_1)f(x_2)<0$, atunci funcţia are cel puţin un zero cuprins între x_1 şi x_2 (consecinţă a proprietăţii Darboux).

(3) Fie A un interval şi $f:A\to R$ o funcţie derivabilă. Teorema lui Rolle arată că între două zerouri ale funcţiei există cel puţin un zero al derivatei. O proprietate duală este următoarea: între două zerouri consecutive ale derivatei se află cel mult un zero al funcţiei (consecinţă a teoremei lui Rolle).

Scanned with OKEN Scanner

(4) Fie A un interval şi $f: A \to R$ o funcţie strict crescătoare şi derivabilă pe A. Se poate arăta uşor că zerourile lui f' nu pot forma un subinterval din A.

(5). **Formula lui Taylor.** Dacă f este o funcţie continuă împreună cu primele sale n derivate pe un interval deschis A ce conţine pe $[a, b]$, iar pe (a, b) există şi derivata lui f de ordinul $n+1$, atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(b-a)}{n}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)}f^{(n+1)}(c).$$

Observaţii. (a) Dacă înlocuim pe a cu x_0 şi pe b cu x formula lui Taylor ia forma

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n}f^{(n)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),$$

$$\theta \in (0, 1).$$

(b) Formula lui Lagrange corespunde cazului $n=0$.

(c) Dacă f este un polinom de gradul n, atunci $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ şi formula lui Taylor ne dă o reordonare a termenilor polinomului după puterile lui $x-x_0$.

Fie $f: A \to R$ o funcţie care admite derivate pînă la ordinul $n \geqslant 1$ pe A. Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *zero de ordinul n sau rădăcină multiplă de ordinul n* pentru f dacă

$$f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0 \text{ şi } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(6) Fie $f: A \to R$ o funcţie care admite derivate pînă la ordinul $n \geqslant 1$ pe A. Punctul $x_0 \in A$ este un zero de ordinul n al lui f dacă şi numai dacă există o funcţie $f_n: A \to R$ astfel încît $f(x)=(x-x_0)^n f_n(x)$, $f_n(x_0) \neq 0$. Această afirmaţie poate fi demonstrată uşor folosind formula lui Taylor; evident $f_n(x)=\frac{1}{n}f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))$, $\theta \in (0, 1)$.

(7) Fie $f: A \to R$ o funcţie care admite derivate continue cel puţin pînă la ordinul $n \geqslant 1$. Dacă f posedă zerouri cel mult de ordinul n, atunci aceste zerouri sînt puncte izolate.

Demonstraţie. Presupunem că x_0 este un zero de ordinul n al lui f. Atunci $f(x)=(x-x_0)^n f_n(x)$, unde $f_n(x_0) \neq 0$. Deoarece prin ipoteză f_n este continuă există o vecinătate V_{x_0} a lui x_0 aşa ca $f_n(x) \neq 0$, $\forall x \in V_{x_0}$. De aceea f nu se mai anulează în nici un punct din V_{x_0} cu excepţia lui x_0, ceea ce înseamnă că zeroul $x=x_0$ este izolat.

(8) Există funcţii, neidentic nule, $f: A \to R$ astfel încît $0=f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=\ldots$ Un exemplu este dat în problema 76.

(9) Fie f o funcţie derivabilă de $n \geqslant 2$ ori pe (a, b), iar $x_0 \in (a, b)$ un zero de ordinul n al lui f.

a) Dacă n este par, atunci x_0 este un punct de extrem al lui f şi anume: dacă $f^{(n)}(x_0)<0$, atunci x_0 este un punct de maxim, dacă $f^{(n)}(x_0)>0$, atunci x_0 este un punct de minim.

b) Dacă n este impar, atunci x_0 nu este punct de extrem; pentru n impar $\geqslant 3$, x_0 este punct de inflexiune.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Se consideră funcţia $x \to f(x) = \ln(1+x^2) - x^2$.

1) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4}$ şi din rezultat să se deducă ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x=0$ a lui f.

2) Să se studieze variaţia lui f într-o vecinătate a lui $x=0$.

Soluţie. 1) Utilizînd regula lui l'Hospital, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = -\frac{1}{2}$. Deoarece limita este finită, nenulă, rezultă că f are în $x=0$ rădăcină multiplă de acelaşi ordin ca şi $g(x)=x^4$. În plus, pe o vecinătate a lui $x=0$ se poate scrie $\frac{f(x)}{x^4} = -\frac{1}{2} + \alpha(x)$, unde α este o funcţie continuă, şi nulă în $x=0$.

2) Din 1) rezultă $f(x) = x^4\left(-\frac{1}{2} + \alpha(x)\right)$. Deoarece α este continuă şi nulă în $x=0$, există o vecinătate a lui $x=0$, astfel încît $f(x) - f(0) = f(x) < 0$, adică $x=0$ este un punct de maxim local al funcţiei f.

Zerourile unei funcţii compuse. Fie A şi B două submulţimi de numere reale şi funcţiile $g : A \to B$, $h : B \to R$ şi $f = h \circ g : A \to R$. Deoarece $N(f) = \{x/\, x \in A,\ f(x)=0\} = \{x/\, x \in A,\ h(g(x))=0\} = N(h \circ g)$, existenţa ca şi determinarea zerourilor lui f se reduce la următoarele:

a) se precizează $N(h) = \{y/\, y \in B,\ h(y)=0\}$,

b) se găseşte $N(h) \cap g(A)$,

c) se rezolvă ecuaţiile $g(x) = y^*$, $x \in A$, $y^* \in N(h) \cap g(A)$. Cu alte cuvinte $N(f) = \{x/\, x \in A,\ g(x) = y^*,\ y^* \in N(h) \cap g(A)\}$.

Exemplu. Să se determine valorile lui m astfel ca ecuaţia $f(x, m) \equiv m \cos 2x + \cos x \cos 3x + \frac{m^2}{2} = 0$ să aibă soluţii.

Rezolvare. Ecuaţia dată se transcrie în forma $f(x, m) \equiv 2\cos^2 2x + (2m+1)\cos 2x + m^2 - 1 = 0$ sau $h(y, m) \equiv 2y^2 + (2m+1)y + m^2 - 1$, unde $y = g(x) = \cos 2x$. Evident $g : R \to R$, $g(R) = [-1, 1]$. De aceea, pentru ca ecuaţia dată să aibă soluţii, trebuie ca trinomul $h : R \to R$ să aibă cel puţin o soluţie pe $[-1, 1]$, adică se impune restricţia pentru parametru $m \in M_1 \cup M_2$, unde $M_1 = \{m | \Delta(m) > 0,\ h(-1, m) \cdot h(1, m) < 0\}$, $M_2 = \{m | \Delta(m) \geqslant 0,\ -1 \leqslant -\frac{2m+1}{4} \leqslant 1,\ h(-1, m) > 0,\ h(1, m) > 0\}$. Rezultă $M_1 = (0, 2)$, $M_2 = \left(\frac{1-\sqrt[3]{10}}{2}, 0\right)$.

II. Zerourile aplicaţiilor de la R^n la R^m

Fie S o submulţime din R^n şi o funcţie $f : S \to R^m$. Un punct $x_0 \in S$ cu proprietatea $f(x_0) = 0 \in R^m$ se numeşte *zero* pentru funcţia f. De asemenea, mulţimea zerourilor lui f se notează cu $N(f) = \{x | x \in S,\ f(x) = 0\}$.

Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reprezentarea punctului x prin coordonatele sale şi $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ reprezentarea funcţiei f prin funcţiile coordonate. Se observă că ecuaţia $f(x) = 0$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S,$$

Scanned with OKEN Scanner

de m ecuații cu n necunoscute. Soluțiile acestui sistem sînt zerourile funcției f. Unele proprietăți ale acestor soluții se pot stabili utilizînd noțiuni din teoria funcțiilor de mai multe variabile reale.

În particular, fie f o funcție reală definită pe o mulțime S din R^2. Zerourile sale sînt soluțiile $(x, y)\in S$ ale ecuației

$$f(x, y)=0. \tag{1}$$

Dacă privim pe x ca parametru (arbitrar dar fixat), atunci ecuația (1) apare ca o ecuație în y. Discuția în raport cu x a existenței soluțiilor reale ale ecuației în y se poate face uneori grafic, uneori cu șirul lui Rolle sau alteori prin criterii particulare (*vezi* problemele 11, 12, 15 etc.).

Fie S_1 proiecția lui S pe axa Ox și E o submulțime a lui S_1. O aplicație $g: E\to R$ se numește soluție (în raport cu y) a ecuației (1) pe mulțimea E dacă $f(x, g(x))=0$, $\forall x\in E$. O ecuație de tipul (1) poate să aibă (în raport cu y) una sau mai multe soluții pe E sau poate să nu aibă nici o soluție. Dacă pentru fiecare $x\in E$ există o soluție unică $x\to g(x)$ care să verifice ecuația (1) și eventual alte condiții suplimentare, spunem că g este o funcție definită de ecuația (1). Se spune de asemenea că rezolvînd ecuația (1) în raport cu y se obține funcția $x\to y=g(x)$, $x\in E$.

Funcțiile definite cu ajutorul ecuațiilor se numesc *funcții definite implicit* sau *funcții implicite*.

Condiții suficiente pentru existența funcțiilor implicite sînt date prin teorema funcțiilor implicite (*vezi* [1], [2]). Din punct de vedere geometric aceste condiții ne asigură că mulțimea $\{(x, y)|(x, y)\in S, f(x, y)=0\}$ este reuniunea graficelor unor funcții de tipul $g: I\to R$, $I\subset R$, adică este o curbă din plan.

III. Zerourile funcțiilor complexe

Fie D un domeniu plan identificat cu o submulțime de numere complexe și $f: D\to C$ o funcție complexă de variabilă complexă. Valoarea ei într-un punct $z=x+iy$ din D este un punct $u+iv=f(x+iy)$ din C. Astfel se pune în evidență că o funcție complexă de o variabilă complexă este echivalentă cu două funcții reale u și v de două variabile reale x și y sau cu o funcție $(u, v): D\to R^2$.

Unele noțiuni din analiza reală se extind firesc în analiza complexă. Funcția f se zice *monogenă* sau *derivabilă* într-un punct $z\in D$, dacă în acel punct u și v sînt funcții diferențiabile și îndeplinesc condițiile lui Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Formal, regulile de derivare ale funcțiilor complexe sînt aceleași cu regulile din analiza reală. Dacă f este monogenă în toate punctele lui D (pentru aceasta fiind suficientă îndeplinirea condițiilor Cauchy-Riemann pe D), atunci f se numește *olomorfă* în D. O funcție olomorfă are derivate de orice ordin.

Un punct $z_0\in D$ cu proprietatea $f(z_0)=0$ se numește *zero* pentru funcția f. Mulțimea zerourilor lui f se notează cu $N(f)=\{z|\in D, f(z)=0\}$ și după cum se vede găsirea sa este echivalentă cu studiul soluțiilor ecuației $f(z)=0$ pe $D\subset C$ sau cu studiul soluțiilor sistemului $u(x, y)=0$, $v(x, y)=0$ pe $D\subset R^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $f: D \to C$ o funcție olomorfă. Un punct $z_0 \in D$ se numește *zero de ordinul* n pentru f dacă

$$f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(n-1)}(z_0)=0 \text{ și } f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

(1) Fie $f: D \to C$ o funcție olomorfă (neidentic nulă). Punctul $z_0 \in D$ este un zero de ordinul n al lui f dacă și numai dacă există o funcție olomorfă $f_n: D \to C$ astfel încît $f(z)=(z-z_0)^n f_n(z)$, $f_n(z_0)\neq 0$.

(2) Fie $f: D \to C$ o funcție olomorfă. Dacă există un punct $z_0 \in D$ astfel încît $0=f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(n)}(z_0)=\ldots$, atunci f este identic nulă.

(3) Zerourile unei funcții olomorfe, neidentic nulă, sînt izolate.

(4) Două funcții olomorfe $f, g: D \to C$ sînt identice dacă valorile lor coincid pe o mulțime $A \subset D$, care are cel puțin un punct de acumulare în D.

Precizări. 1) Funcțiile complexe elementare cunoscute la nivelul materiei de liceu sînt polinomul, funcția rațională și „radicalul".

2) Analogul real al funcțiilor olomorfe sînt funcțiile analitice.

Exemplul 1. Se dă polinomul $P_5(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2ax-b$, $a, b \in R$.

1) Să se determine a, b încît ecuația în C, $P_5(x)=0$, să admită o rădăcină triplă și în acest caz să se rezolve.

2) Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile distincte determinate la punctul 1), să se scrie polinomul care admite rădăcinile $z_j=x_j\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $j=1, 2, 3$.

3) Să se scrie ecuația care admite rădăcinile z_j și $\bar{z}_j$, $j=1, 2, 3$.

Soluție. 1) $P'(x)=5x^4-8x^3+3x^2-2x+2a$, $P''(x)=20x^3-24x^2+6x-2$; rădăcinile triple se determină dintre rădăcinile ecuației $P''(x)=0$; deoarece $a, b \in R$ și gradul lui $P_5(x)$ este 5, rădăcina triplă poate fi numai o rădăcină reală. $P''(x)=0$ are rădăcina reală $x_1=1$ și rădăcinile complexe $x=\frac{1\pm 3i}{10}$. Deoarece $P'''(1)\neq 0$, $x_1=1$ poate fi rădăcina triplă; din condițiile $P(1)=0$, $P'(1)=0$ rezultă sistemul $2a-b-1=0$, $2a-2=0$ cu soluția $a=1$, $b=1$.

Ecuația $P(x)=0$ are deci soluțiile $x_1=1$ — rădăcină triplă și $x_{2,3}=\frac{-1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Rădăcinile distincte $x_1=1$, $x_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sînt rădăcinile cubice ale unității; deoarece ecuația care are rădăcinile x_j este $x^3-1=0$, prin multiplicarea cu factorul $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ coeficienții nuli își păstrează valoarea. Termenul liber al ecuației care are rădăcinile z_j este $(-1)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^3=$ $=(-1)\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ și rezultă ecuația $z^3+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=0$.

3) Deoarece schimbînd factorii unui produs cu conjugatele, produsul trece în conjugatul său și analog pentru schimbarea termenilor unei sume

Scanned with OKEN Scanner

în conjugații lor, rezultă că ecuația care are rădăcinile $\bar{z}$, este $z^3+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=0$.

În concluzie, ecuația care are rădăcinile $z_j, \bar{z}_j$, $j=1, 2, 3$, este $z^6+z^3\sqrt{2}+1=0$.

Exemplul 2. Să se rezolve în R^2 sistemul

$$\begin{cases} x^2+2xy-y^2=1 \\ -x^2+2xy+y^2=1. \end{cases}$$

Soluție. Funcțiile $u, v: R^2\to R$, definite respectiv prin $u(x, y)=x^2+2xy-y^2$ și $v(x, y)=-x^2+2xy+y^2$, îndeplinesc peste tot condițiile lui Cauchy-Riemann. Deci ele sînt partea reală și partea imaginară ale unei funcții complexe olomorfe. Înmulțim a doua ecuație cu i și apoi adunăm cu prima, membru cu membru. Găsim $x^2+2xy-y^2+i(-x^2+2xy+y^2)=1+i$ sau $(1-i)z^2=1+i$, unde $z=x+iy$. Rezultă $z^2=i$ și deci $z_{0,1}=\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=$ $=\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{2}$, $k=0, 1$. Apoi $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ și deci soluțiile în R^2 sînt $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

30. Se dă numărul complex $z(t)=e^{2t}+2it$, $t\in R$.

1) Să se determine în planul complex mulțimea imaginilor lui $z(t)$.

2) Să se rezolve ecuația

$$e^{6t}-(1+e+e^2)e^{4t}+(e+e^2+e^3)e^{2t}-e^3=0.$$

3) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuației $\operatorname{tg}(\arg z(t))=\operatorname{tg}\alpha$, unde $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

4) Să se calculeze limita șirului cu termen general

$$A_n=\int_0^n \operatorname{tg}(\arg z(t))\,dt$$

(Bacalaureat Maroc, 1976. Text modificat)

Soluție. 1) Imaginea $\{z(t)|t\in R\}$ este curba cu parametrizarea $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=2t, \end{cases}$ $t\in R$. Prin eliminarea parametrului se obține $y=\ln x$, $x>0$.

2) Cu substituția $e^{2t}=v$ rezultă ecuația algebrică $v^3-(1+e+e^2)v^2+$ $+(e+e^2+e^3)v-e^3=0$ cu soluțiile $v_1=1$, $v_2=e$, $v_3=e^2$ sau $t_1=0$, $t_2=\frac{1}{2}$, $t_3=1$.

3) $\arg z(t)=\operatorname{arctg}\frac{Im z(t)}{Re\, z(t)}=\operatorname{arctg} 2te^{-2t}$; ecuația devine $2te^{-2t}=m$, unde $m\in R$, cînd $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Se reprezintă graficul funcției $t\to f(t)=2te^{-2t}$; $f'(t)=2(1-2t)e^{-2t}$; $f''(t)=-8(1-t)e^{-2t}$.

t	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$		$\searrow$	0
$f''(t)$		$-$		$-$		0	$+$		

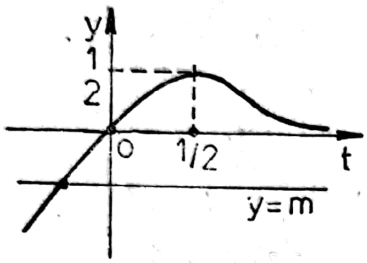


Fig. 122.

Concluzii (fig. 122): pentru $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\Rightarrow t_1\in(-\infty,0)$;

pentru $\alpha\in[0, \operatorname{arctg} e^{-1})\Rightarrow t_1\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $t_2\in\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$;

pentru $\alpha=\operatorname{arctg} e^{-1}\Rightarrow t_1=t_2=\frac{1}{2}$; pentru $\alpha\in\in\left(\operatorname{arctg} e^{-1}, \frac{\pi}{2}\right)$, ecuaţia nu admite rădăcini reale.

4) $A_n=\int_0^n 2te^{-2t}dt=2\left(-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\right)\Big|_0^n=-\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-2n}+\frac{1}{2}$;

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\frac{1}{2}.$$

31. Identităţi

Fie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ două expresii elementare şi o problemă de tipul „să se verifice identitatea $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$". Se observă că $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie $F: A\to R$, $A\subset R^n$, iar $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\to G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie $G: B\to R$, $B\subset R^n$, egalitatea $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avînd loc, $\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\in A\cap B$. De aceea problemele de stabilire a unor identităţi sînt în fond probleme de egalitate a două funcţii.

Exemple. 1) Să se verifice identitatea

$$\frac{x^2y^2z^2}{u^2v^2}+\frac{(x^2-u^2)(y^2-u^2)(z^2-u^2)}{u^2(u^2-v^2)}+\frac{(x^2-v^2)(y^2-v^2)(z^2-v^2)}{v^2(v^2-u^2)}=x^2+y^2+z^2-u^2-v^2.$$

Se observă că domeniul maxim de definiţie al funcţiei

$$(x, y, z, u, v)\to\frac{x^2y^2z^2}{u^2v^2}+\frac{(x^2-u^2)(y^2-u^2)(z^2-u^2)}{u^2(u^2-v^2)}+\frac{(x^2-v^2)(y^2-v^2)(z^2-v^2)}{v^2(v^2-u^2)}$$

este $A=R^3\times(R^2-\{(u, v)|u^2v^2(u^2-v^2)=0\})$. Pe de altă parte, pentru funcţia $(x, y, z, u, v)\to x^2+y^2+z^2-u^2-v^2$ avem $B=R^5$. De aceea identitatea propusă are sens pe $A\cap B=A$. Verificarea ei se face prin calcule directe.

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se determine toate polinoamele $P(x, y)$ cu coeficienți reali pentru care există $r \in R$ astfel încît $P(x, y)=P(x+r, y+r)$, $\forall x, y \in R$.

Soluție. Evident, polinoamele de forma $P(x, y)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x-y)^i$, $a_i \in R$, satisfac problemei puse.

Reciproc, să presupunem că $P(x, y)$ satisface condiția din problemă. Făcînd schimbarea de variabile $x=u+v$, $y=u-v$, polinomul $P(x, y)$ trece în polinomul $Q(u, v)$, unde $u=\frac{1}{2}(x+y)$, $v=\frac{1}{2}(x-y)$, iar relația $P(x, y)=P(x+r, y+r)$ este echivalentă cu $Q(u, v)=Q(u+r, v)$. De aici deducem $Q(u+nr, v)=Q(u, v)$, $\forall n \in Z$. Aceasta înseamnă că $\forall v$, polinomul $f(u)=Q(u, v)-Q(0, v)$ are o infinitate de zerouri, adică $Q(u, v)=Q(0, v)$, $\forall u, v$. Astfel $P(x, y)=P\left(0, \frac{1}{2}(x-y)\right)$, $\forall x, y$ și deci $P(x, y)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x-y)^i$.

32. Să se determine x, y, z astfel încît

1) egalitatea $(a^2+a-1)x+(a^2-a+1)y+(-a^2+a+1)z=2a+4$ să aibă loc oricare ar fi $a \in R$;

2) egalitatea $(-a+b+c)x+(a-b+c)y+(a+b-c)z=4a+2b+c$ să fie verificată pentru orice numere reale a, b, c.

(Admitere, I. P. București, 1972)

Soluție. 1) Ordonăm după puterile lui a:

$$a^2(x+y-z)+a(x-y+z)+(-x+y+z)=2a+4.$$

Identificînd coeficienții aceloraşi puteri ale lui a obținem sistemul $x+y-z=0$, $x-y+z=2$, $-x+y+z=4$ care are soluția unică $x=1$, $y=2$, $z=3$.

2) Ordonăm după a, b, c:

$$a(-x+y+z)+b(x-y+z)+c(x+y-z)=4a+2b+c.$$

Identificînd coeficienții, găsim sistemul $-x+y+z=4$, $x-y+z=2$, $x+y-z=1$ cu soluția unică $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$, $z=3$.

33. 1) Să se arate că dacă polinoamele reale $P_0, P_1, \ldots, P_n$ satisfac

$$P_n(x)e^{nx}+\ldots+P_1(x)e^x+P_0(x)=0,$$

pentru orice x din $[a, \infty)$, atunci ele sînt identic nule.

Indicație. Se divide cu e^{nx} și se trece la limită pentru $x \to \infty$.

2) Fie polinoamele reale $P_0, P_1, \ldots, P_n$ astfel încît

$$P_n(x)(\ln x)^n+\ldots+P_1(x)\ln x+P_0(x)=0, \quad \forall x>0.$$

Să se arate că $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sînt identic nule.

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Punînd $x=e^y$, identitatea ia forma $\sum_{i,j} a_{ij}e^{iy}y^j=0$, $\forall y$, unde a_{ij} sînt numere reale. Ea se retranscrie $\sum_i(\sum_j a_{ij}y^j)e^{iy}=0$, $\forall y$, adică problema pusă se reduce la problema precedentă.

34. Fracții simple

Expresiile

$$\frac{A_i^s}{(x-a)^s}, \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

unde A, B, C, a, p, $q\in R$; s, $m\in N$, iar trinomul x^2+px+q are rădăcini complexe, se numesc *fracții simple.*

Fie $\frac{P(x)}{Q(x)}$ o expresie rațională reală definită pe $R-N(Q)$. Presupunem grad $P<$grad Q.

I. Dacă $Q(x)=0$ admite pe $x=a$ drept rădăcină multiplă de ordinul s, adică $Q(x)\equiv(x-a)^s Q_1(x)$, $Q_1(a)\neq 0$, atunci are loc descompunerea (identitate după x)

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv\frac{A}{(x-a)^s}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{s-1}Q_1(x)}.$$

Într-adevăr, există numărul real A și polinomul $P_1(x)$, unic determinate, astfel încît se satisface identitatea $P(x)-AQ_1(x)\equiv(x-a)P_1(x)$, prelungită prin continuitate pe toată axa reală. Rezultă $P(a)-AQ_1(a)=0$ și deci $A=\frac{P(a)}{Q_1(a)}$ (valoare finită nenulă pentru gradul maxim s). Existența și unicitatea polinomului $P_1(x)$ decurg din definiția împărțirii pe mulțimea polinoamelor, $P_1(x)=\frac{P(x)-AQ_1(x)}{x-a}$.

II. Dacă $Q(z_0)=0$, $Q(\bar{z}_0)=0$, z_0, $\bar{z}_0$ — rădăcini complexe conjugate m — multiple, corespunzătoare factorului real $(x^2+px+q)^m$, adică $Q(x)\equiv(x^2+px+q)^m Q_2(x)$, $Q_2(z_0)\neq 0$, $Q_2(\bar{z}_0)\neq 0$, atunci are loc identitatea

$$\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]\equiv\left[\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\right]+\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_2(x)}.$$

Observații. (1) Iterînd descompunerile precedente, rezultă

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv\sum_{j=1}^{s}\frac{A_j}{(x-a)^j}+\frac{P_1^*(x)}{Q_1(x)},$$

respectiv

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv\sum_{k=1}^{m}\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{P_2^*(x)}{Q_2(x)}.$$

(2) Deoarece descompunerea în factori reali a polinomului real $Q(x)$ este

$$Q(x)\equiv\prod_{i=1}^{l}(x-a_i)^{s_i}\prod_{i=1}^{l}(x^2+p_ix+q_i)^{m_i},\ \sum_{i=1}^{l}s_i+2\sum_{i=1}^{l}m_i=\text{grad } Q,$$

rezultă descompunerea lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în fracții simple

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{A_j^{(i)}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{B_k^{(i)} x + C_k^{(i)}}{(x^2+p_i x+q_i)^k}.$$

(3) Dacă $Q(x)=(x-a)^s\ Q_1(x)$, $Q_1(a)\neq 0$, atunci rădăcinii $x=a\in R$ îi corespunde descompunerea în fracții simple

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_s}{(x-a)^s} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Pentru determinarea coeficienților $A_1, \ldots, A_s$ putem folosi următoarea identitate pe R

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}(x-a)^s \equiv A_s + A_{s-1}(x-a) + \ldots + A_{s-k}(x-a)^k + \ldots + A_1(x-a)^{s-1} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}(x-a)^s.$$

Funcția $x \to \varphi(x)$ admite derivate de orice ordin într-o vecinătate a lui $x=a$, deoarece Q_1 are zerouri izolate, diferite de $x=a$. Se obțin

$$A_s = \varphi(a),\ A_{s-1} = \varphi'(a), \ldots,\ A_{s-k} = \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(a), \ldots,\ A_1 = \frac{\varphi^{(s-1)}(a)}{(s-1)!},$$

adică

$$A_{s-k} = \frac{1}{k!}\left[(x-a)^s \frac{P(x)}{Q(x)}\right]^{(k)}_{x=a},\quad k\in\{0, 1, \ldots, s-1\}.$$

Exemplu. Să se descompună în fracții simple

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4-x^3-4x^2+11x+5}{(x+1)^2(x-1)^3}.$$

Soluție. (i) Coeficienții descompunerii se determină din identitatea

$$(*)\quad \frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

sau $$\frac{P(x)}{Q(x)}(x-1)^3(x+1)^2 \equiv A_1(x-1)^2(x+1)^2 + A_2(x-1)(x+1)^2 + A_3(x+1)^2 + B_1(x-1)^3(x+1) + B_2(x-1)^3.$$

Prin identificare rezultă sistemul liniar $A_1+B_1=1$, $A_2+B_2-2B_1=-1$, $-2A_1+A_2+A_3-3B_2=-4$, $-A_2+2A_3+2B_1+3B_2=11$, $A_1-A_2+A_3-B_1-B_2=5$ care admite soluția $A_1=1$, $A_2=-2$, $A_3=3$, $B_1=0$, $B_2=1$; s-a obținut

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

(ii) *Altă soluție.* Folosind descompunerea (*), rezultă

$$\varphi(x)=\frac{x^4-x^3-4x^2+11x+5}{(x+1)^2}\equiv A_1(x-1)^2+A_2(x-1)+A_3+\frac{P_1(x)}{(x+1)^2}(x-1)^3.$$

Se obține $A_3=\varphi(1)=3$; utilizînd pe $\varphi'(x)=\frac{2x^4+3x^3-3x^2-19x+1}{(x+1)^3}$ se găsește $A_2=\frac{1}{1!}\varphi'(1)=-2$. Apoi se calculează $\varphi''(x)$ și $A_1=\frac{1}{2!}\varphi''(1)=1$. Din (*) se scrie

$$\psi(x)=\frac{x^4-x^3-4x^2+11x+5}{(x-1)^3}\equiv B_1(x+1)+B_2+\frac{P_2(x)}{(x-1)^3}$$

și rezultă $B_2=\psi(-1)=1$, $B_1=\frac{1}{1!}\psi'(-1)=0$. Astfel se regăsește descompunerea anterioară.

(iii) *Altă soluție.* Se amplifică identitatea (*) cu $(x-1)^3$ și în identitatea obținută, prelungită pe R, se face $x=1$; rezultă $A_3=\left(\frac{P(x)}{Q(x)}(x-1)^3\right)_{x=1}=3$; analog, (*) se amplifică cu $(x+1)^2$, apoi se face $x=-1$ și se obține $B_2=\left(\frac{P(x)}{Q(x)}(x+1)^2\right)_{x=-1}=1$. Se determină

$$R_1(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{3}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Pentru identitatea $R_1(x)=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x+1}$ se procedează analog. Se găsesc $A_2=(R_1(x)(x-1)^2)_{x=1}=-2$, $B_1=(R_1(x)(x+1))_{x=-1}=0$. Rezultă $R_2(x)=R_1(x)+\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}$ și deci $A_1=1$.

(4) Printre altele, descompunerea în fracții simple este utilizată pentru a dovedi că funcțiile raționale reale admit primitive în mulțimea funcțiilor elementare.

35. Independența unor expresii elementare în raport cu unele variabile

Fie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o expresie reală elementară. O problemă de tipul (1) „să se arate că $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este independentă de $x_{p+1}, \ldots, x_n$" se poate reduce la găsirea unei alte expresii elementare $G(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, încît $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\equiv G(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. În fond noțiunea de bază este egalitatea a două funcții. Anume $F: A\to R$, $A\subset R^n$, dată prin $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $G: B\to R$, $B\subset R^n$, dată prin $(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)\to G(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sînt egale pe $A\cap B$, adică $F(x_1, x_2, \ldots x_n)=G(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in A\cap B$.

Se observă că $B=C\times R^{n-p}$, unde $C\subset R^p$. De aceea ne va interesa să identificăm funcția G cu restricția ei la $A\cap(C\times\{(x^\circ_{p+1}, \ldots, x^\circ_n)\})$, unde $(x^\circ_{p+1}, \ldots, x^\circ_n)$ este un punct fix din R^{n-p} așa ca $(x_1, \ldots, x_p, x^\circ_{p+1}, \ldots, x^\circ_n)\in A\cap B$, sau cu funcția parțială definită pe proiecția lui $A\cap(C\times\{(x^\circ_{p+1}, \ldots, x^\circ_n)\})$ pe R^p.

Scanned with OKEN Scanner

Precizăm însă că rezolvarea problemei (2) „să se arate că funcţiile F şi G sînt egale" nu este totuna cu rezolvarea problemei (1). În general, în problema (1) domeniul de definiţie al lui F nu se dă (trebuie aflat!), iar explicitarea funcţiei G nu este necesară. Dacă este nevoie, funcţia G trebuie aleasă de rezolvitor din mulţimea funcţiilor egale cu F astfel încît expresia $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să fie cea mai simplă posibilă.

Rezolvarea efectivă a problemei (1) poate fi făcută astfel:

(1) se determină domeniul de definiţie al lui F, adică mulţimea punctelor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pentru care are sens $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

(2) se fac calcule elementare pînă se găseşte $G(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sau, în unele situaţii particulare, se aplică raţionamente care ne asigură că $F(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ este independentă de $x_{p+1}, \ldots, x_n$, fără a fi obligatorie explicitarea lui $G(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

Precizare. Discuţia precedentă arată că formularea „să se arate că $F(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ este independentă de $x_p, \ldots, x_n$ trebuie luată în sensul că de fapt $F(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ depinde de $x_{p+1}, \ldots, x_n$ numai prin restricţiile care determină domeniul de definiţie al funcţiei $(x_1, \ldots, x_p, x_p^+{}_1, \ldots, x_n) \to F(x_1, \ldots, x_p, x_p^+{}_1, \ldots, x_n)$.

Exemplul 1. Să se arate că expresia raţională

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$$

nu depinde de x dacă şi numai dacă $\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Soluţie. Existenţa lui $f(x)$, fie pe mulţimea numerelor reale, fie pe mulţimea numerelor complexe, impune ca numitorul să fie diferit de zero pe mulţimea respectivă. Să presupunem că $f(x)$ există pe E.

Fie $f(x) = k$, $\forall x \in E$, adică $(a_0 - kb_0)x^n + (a_1 - kb_1)x^{n-1} + \ldots + (a_n - kb_n) \equiv 0$ Rezultă $a_0 = kb_0$, $a_1 = kb_1, \ldots, a_n = kb_n$, sau $\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$, cu convenţia că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv este nul. Reciproc, dacă coeficienţii sînt proporţionali pentru $x \in E$, atunci $a_0 = kb_0$, $a_1 = kb_1, \ldots, a_n = kb_n$ şi $f(x) = k$, $\forall x \in E$.

Exemplul 2. Fie I un interval deschis din R şi $f : I \to R$ o funcţie derivabilă ($\Leftrightarrow$diferenţiabilă). Funcţia f este o constantă dacă şi numai dacă derivata sa este nulă pe I. Într-adevăr, dacă $f(x) = \text{const.}$ pe I, atunci $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$. Reciproc, din ipoteza $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$ şi din formula lui Lagrange $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$, $\forall x$, $x_0 \in I$, x_0 fixat, rezultă $f(x) = f(x_0)$, $\forall x \in I$, adică $f(x) = \text{const.}$

Dacă I este o reuniune de intervale deschise şi $f' = 0$, atunci este posibil ca f să nu fie constantă pe I, dar restricţiile lui f la subintervalele din I sînt (respectiv) sigur constante (aceste constante se determină ca valori ale lui f în puncte particulare x_0 din intervalele respective, adică se calculează $f(x_0)$).

Generalizare. Fie D un domeniu (mulţime deschisă şi conexă din R^n), iar $f : D \to R$ o funcţie diferenţiabilă. Funcţia f este o constantă dacă şi numai dacă diferenţiala sa df este nulă pe D.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 3. Să se arate că

$$E(x,\ y)=\frac{\sin^2(x+y)-\sin^2(x-y)}{\sin 2y}$$

nu depinde de y.

Soluţie. Se impune $\sin 2y\neq 0$, adică $y\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$. Apoi se observă că $\sin^2(x+y)-\sin^2(x-y)=[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\cdot[\sin(x+y)-\sin(x-y)]=$ $=2\sin x\cos y\cdot 2\sin y\cos x=\sin 2x\sin 2y$. Astfel $E(x,\ y)=\sin 2x$, dar numai pentru $y\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

36. Se consideră ecuaţia matriceală

$$A^2+A=aI,\ a\in R,\ I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}x & y\\ -y & x\end{bmatrix}.$$

Să se rezolve ecuaţia în cazul cînd toate soluţiile sînt reale.

Soluţie. Ecuaţia devine

$$\begin{bmatrix}x^2-y^2 & 2xy\\ -2xy & x^2-y^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x & y\\ -y & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix},\ \text{sau}\ \begin{cases}x^2-y^2+x-a=0\\ y(2x+1)=0.\end{cases}$$

(i) Sistemul $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y^2=-a-\frac{1}{4}\end{cases}$ admite soluţii reale dacă $a\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{4}\right]$.

(ii) Sistemul $\begin{cases}y=0\\ x^2+x-a=0\end{cases}$ admite soluţii reale dacă $a\in\left[-\frac{1}{4},\ \infty\right)$.

Observăm că ambele sisteme admit soluţii reale numai pentru $a=-\frac{1}{4}$; în acest caz însă ambele sisteme se reduc la $\left\{x=-\frac{1}{2},\ y=0\right\}$ şi deci

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

37. Fie $v_1,v_2,\ldots,v_n>0$; $\delta_1,\ \delta_2,\ldots,\ \delta_n>0$, $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n=1$ şi determinanţii

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}\frac{\delta_1(\delta_1-1)}{v_1^2} & \frac{\delta_1\delta_2}{v_1v_2} & \ldots & \frac{\delta_1\delta_i}{v_1v_i}\\ \frac{\delta_2\delta_1}{v_2v_1} & \frac{\delta_2(\delta_2-1)}{v_2^2} & \ldots & \frac{\delta_2\delta_i}{v_2v_i}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\delta_i\delta_1}{v_iv_1} & \frac{\delta_i\delta_2}{v_iv_2} & \ldots & \frac{\delta_i(\delta_i-1)}{v_i^2}\end{vmatrix},\ i=1,2,\ldots,n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că

$$\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \ldots,\ \Delta_{2p-1}<0,\ \Delta_{2p}>0,\ \ldots,\ \text{și}\ \Delta_n=0.$$

Indicație. Se constată că $\Delta_i=\left(1-\sum_{j=1}^{i}\delta_j\right)\prod_{j=1}^{i}\left(\frac{-\delta_j}{p_j^2}\right)$.

38. Inversa unei matrice

Două matrice pătrate, de același ordin, A și B se numesc *inverse* una alteia dacă $AB=BA=I$. În acest caz notăm $B=A^{-1}$ sau $A=B^{-1}$ și spunem că B este inversa lui A sau reciproc. Prin reducere la absurd se arată că dacă A posedă o inversă B, atunci inversa este unică.

Fie $A=[a_{ij}]$ o matrice pătrată, iar ${}^tA$ transpusa sa. Matricea pătrată formată cu cofactorii lui ${}^tA$ se numește *matricea adjunctă* și se notează cu $A^*=[A_{ij}]$. În baza proprietăților determinanților avem

$$A^*A=AA^*=\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}A_{21}\ldots A_{n1}\\ A_{12}A_{22}\ldots A_{n2}\\ \ldots\ldots\ldots\\ A_{1n}A_{2n}\ldots A_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D & 0\ldots 0\\ 0 & D\ldots 0\\ \ldots\ldots\\ 0 & 0\ldots D\end{bmatrix}=D\cdot I,$$

unde $D=det\ A$, iar I este matricea unitate. De aici se observă că o matrice pătrată posedă o inversă dacă și numai dacă $det\ A\neq 0$. Această inversă se poate explicita astfel:

1) se calculează $det\ A$; dacă $det\ A\neq 0$, atunci A se numește nesingulară și are o inversă; dacă $det\ A=0$, atunci A se numește singulară și nu are inversă;

2) se face ${}^tA$ și A^*;

3) $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$.

Aplicații. 1) Fie ξ_a, $a=1, 2, 3$, trei matrice de tipul 3×1 (vectori coloană) cu ajutorul cărora formăm matricea pătrată de ordinul trei $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$. Fie $\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}$ inversa acestei matrice, unde η_a, $a=1, 2, 3$, sînt vectori linie. Dacă $\Phi_a=\xi_c\eta_b-\xi_b\eta_c$, unde $\{a, b, c\}$ este o permutare ciclică a lui $\{1, 2, 3\}$ și $g=\sum_a {}^t\eta_a\eta_a$, atunci să se arate că: $\Phi_a^2=-I+\xi_a\eta_a$, $\Phi_a\xi_a=0$, $\eta_a\Phi_a=0$, ${}^t\eta_a=g\xi_a$, ${}^t\Phi_a g\Phi_a=g-{}^t\eta_a\eta_a$, $a=1, 2, 3$ și $\Phi_a\Phi_b-\xi_a\eta_b=-\Phi_b\Phi_a+\xi_b\eta_a=\Phi_c$, $\Phi_a\xi_b=-\Phi_b\xi_a=\xi_c$, $\eta_a\Phi_b=-\eta_b\Phi_a=\eta_c$.

Indicație. Calcule directe, ținînd seama că $\eta_a\xi_b\equiv I$ și $\sum_a\xi_a\eta_a=I$, unde I este matricea unitate de ordinul trei.

2) Să se găsească toate matricele $[a_{ij}]$ așa ca $[a_{ij}]$ și $[b_{ij}]=[a_{ij}]^{-1}$ să aibă simultan toate elementele nenegative.

(The Amer. Math. Monthly, 1973)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Sistemul

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \\ a_{ij}\geqslant 0,\ b_{ij}\geqslant 0,\ \forall_{i,j} \end{cases}$$

arată că fiecare linie și fiecare coloană a lui $[a_{ij}]$ are numai cîte un element pozitiv, restul fiind nule.

Invers, dacă presupunem că $[a_{ij}]$ are numai un element pozitiv pe fiecare linie și pe fiecare coloană, iar restul sînt zerouri, atunci definim

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & a_{ji}=0 \\ \dfrac{1}{a_{ji}} & a_{ji}\neq 0. \end{cases}$$

Se verifică ușor că $[b_{ij}]$ este inversa lui $[a_{ij}]$ și evident $b_{ij}\geqslant 0$.

În concluzie, $[a_{ij}]$ și $[a_{ij}]^{-1}$ au toate elementele nenegative dacă și numai dacă fiecare linie și fiecare coloană a lui $[a_{ij}]$ au exact un element pozitiv, restul elementelor fiind nule.

39. Fie matricea $[a_{ij}]$, $i, j=1, 2, \ldots, n$, unde

$$0\neq a_{ij} = \begin{cases} \alpha+\beta, & i=j \\ \beta, & i\neq j. \end{cases}$$

Fie I matricea unitate de ordinul n și E matricea pătrată de ordinul n care are toate elementele egale cu 1.

1) Să se exprime $[a_{ij}]$, $[a_{ij}^{-1}]$ respectiv în raport cu matricele I și E.

2) În cazurile în care există, să se găsească $[a_{ij}]^{-1}$ și $[a_{ij}^{-1}]^{-1}$.

3) Presupunem $\alpha\neq 0$. Matricele $[a_{ij}]^{-1}$ și $[a_{ij}^{-1}]^{-1}$ există simultan sau nu?

Soluție. 1) Observăm că $[a_{ij}]=\alpha I+\beta E$, $[a_{ij}^{-1}] = -\dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)\beta} I + \dfrac{1}{\beta} E$.

2) În ipoteza că există, căutăm pe $[a_{ij}]^{-1}$ de forma $[a_{ij}]^{-1}=xI+yE$. Avem $I\equiv[a_{ij}][a_{ij}]^{-1}=(\alpha I+\beta E)(xI+yE)=\alpha xI+(\alpha y+\beta x+\beta yn)E \Leftrightarrow \alpha x=1$ și $\beta x+(\alpha+\beta n)y=0$.

De aici se vede că dacă $\alpha\neq 0$, atunci $[a_{ij}]$ este nesingulară dacă și numai dacă $\alpha+\beta n\neq 0$ și în aceste ipoteze

$$[a_{ij}]^{-1} = \frac{1}{\alpha} I - \frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta n)} E.$$

Un raționament analog ne dă

$$[a_{ij}^{-1}]^{-1} = -\frac{(\alpha+\beta)\beta}{\alpha} I + \frac{(\alpha+\beta)^2\beta}{\alpha((\alpha+\beta)n-\alpha)} E$$

dacă și numai dacă $\alpha\neq 0$ și $(\alpha+\beta)n-\alpha\neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Presupunem $\alpha \neq 0$. Deoarece sistemul

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)n-\alpha=0 \\ \alpha+\beta n=0 \end{cases}, \quad \alpha \neq 0$$

admite numai soluţia $n=2$, rezultă că pentru $n \geqslant 3$ cele două inverse pot să nu existe simultan.

40. O matrice $P=[p_{ij}]$, $i, j=1, 2, \ldots, n$, care are proprietăţile $p_{ij} \geqslant 0$, $\sum_j p_{ij}=1$ se numeşte *matrice stochastică.*

Să se arate că dacă $[p_{ij}]$ este o matrice stochastică, atunci

1) $det\,[p_{ij}-\delta_{ij}]=0$, unde $\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ este *simbolul lui Kronecker.*

2) $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} p_{ij} \leqslant \frac{1}{n^{n-1}}$.

Soluţie. 1) Din $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$ rezultă $\sum_{=1}^{n} (p_{ij}-\delta_{ij})=0, \quad \forall i.$

De aceea avem

$$\begin{vmatrix} p_{11}-1 & p_{12} \ldots p_{1n-1} & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-1 \ldots & p_{2n-1} & p_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p_{n1} & p_{n2} \ldots p_{nn-1} & p_{nn}-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11}-1 & p_{12} \ldots p_{1n-1} & \sum_{j=1}^{n} (p_{1j}-\delta_{1j}) \\ p_{21} & p_{22}-1 \ldots & p_{2n-1} & \sum_{j=1}^{n} (p_{2j}-\delta_{2j}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p_{n1} & p_{n2} \ldots p_{nn-1} & \sum_{j=1}^{n} (p_{nj}-\delta_{nj}) \end{vmatrix} = 0.$$

2) Aplicînd inegalitatea geometrică găsim

$$p_{i1} \; p_{i2} \ldots p_{in} \leqslant \frac{(p_{i1}+\ldots+p_{in})^n}{n^n} = \frac{1}{n^n}.$$

De aceea

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i1} p_{i2} \ldots p_{in} \leqslant \frac{n}{n^n} = \frac{1}{n^{n-1}}.$$

41. O matrice $P=[p_{ij}]$ $i, j=1, 2, \ldots, n$, care are proprietăţile $p_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_{ij}=1$, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$ se numeşte *matrice dublu stochastică.*

1) Să se arate că produsul a două matrice dublu stochastice este o matrice dublu stochastică.

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se probeze că orice matrice dublu stochastică, care nu are toate elementele egale, conține o submatrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

astfel încît $\min(a, d) > \max(b, c)$ sau $\max(a, d) < \min(b, c)$.

3) Să se găsească forma unei matrice dublu stochastice care comută cu toate matricele dublu stochastice.

4) Să se arate că produsul tuturor elementelor dintr-o matrice dublu stochastică de tipul $n \times n$ este cel mult $\frac{1}{n^{n^2}}$. Cînd este atinsă această valoare?

Soluție. 1) Fie matricele dublu stochastice $P=[p_{ij}]$ și $Q=[q_{jk}]$ de tipul $n \times n$. Produsul lor este $PQ=[\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, q_{jk}]$. Observăm că

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, q_{jk}\right)=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right)}_{=1} q_{jk}=\sum_{j=1}^{n} q_{jk}=1,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, q_{jk}\right)=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} q_{jk}\right)}_{=1}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1,$$

adică PQ este o matrice dublu stochastică.

2) Fie $[p_{ij}]$ o matrice dublu stochastică care nu are toate elementele egale. Fie $p_{st}=\max_{i,\,j} p_{ij}$.

Deoarece matricea nu are toate elementele egale avem $p_{st} > \frac{1}{n}$. Fie x minimul elementelor din linia s sau din coloana t. Presupunem $x=p_{sm}$ (analog pentru $x=p_{jt}$). Deoarece $p_{st} > \frac{1}{n}$ rezultă $p_{sm} < \frac{1}{n}$, adică $p_{st} > p_{sm}$. Această observație împreună cu faptul că suma elementelor de pe coloanele t, respectiv m este unu, ne permite să afirmăm că pentru un anumit i avem $p_{it} < p_{im}$. Rezultă $p_{st} \geqslant p_{im} > p_{it} \geqslant p_{sm}$. Submatricea formată cu elementele precedente are proprietatea dorită.

3) Să arătăm că o matrice $A=[a_{ij}]$ de tipul $n \times n$, dublu stochastică sau nu, comută cu toate matricele dublu stochastice de tipul $n \times n$ dacă și numai dacă (1) $a_{ii}=\alpha$, $i=1, 2, \ldots, n$, (2) $a_{ij}=\beta$, $i \neq j$. Dacă lui A îi punem condiția să fie dublu stochastică, atunci (3) $\alpha, \beta \geqslant 0$ și $\alpha+(n-1)\beta=1$. Condițiile (1), (2), (3) sînt echivalente cu $A=(1-\gamma)I+\gamma J$, unde $\gamma \in [0, 1]$, I este matricea identitate și J are toate elementele egale cu $\frac{1}{n}$.

Fie $A=[a_{ij}]$ o matrice care are proprietățile (1) și (2). Prin înmulțire directă se poate verifica că A comută cu toate matricele dublu stochastice. Invers, dacă A comută cu toate matricele dublu stochastice de tipul $n \times n$, atunci ea comută și cu toate *matricele permutări* (Matricea $P=[p_{ij}]$ se numește *matrice permutare* dacă există o permutare π a lui $\{1, 2, \ldots, n\}$ așa ca $p_{ij}=1$

Scanned with OKEN Scanner

dacă $j=i\pi$ şi zero în celelalte cazuri). Fie P o matrice permutare. Avem $(AP)_{ij}=a(i, j\pi^{-1})$ şi $(PA)_{ij}=a(i\pi, j)$, unde $a(i, j)\equiv a_{ij}$. Dacă $AP=PA$, $\forall\pi$ atunci $a(i, j)=a(i\pi, j\pi)$, $\forall i, j, \pi$. Observăm însă că $\forall i, k$ există o permutare π aşa ca $i\pi=k$ şi astfel $a_{ii}=a_{kk}$, adică are loc proprietatea (1). Asemănător, dacă $i\neq j$ şi $r\neq s$, atunci există o permutare π aşa ca $i\pi=r$ şi $j\pi=s$. Astfel $a_{ij}=a_{rs}$ şi deci (2) este adevărată.

4) Aplicînd inegalitatea geometrică găsim

$$p_{i1}\dots p_{in}\leqslant\frac{(p_{i1}+\dots+p_{in})^n}{n^n}=\frac{1}{n^n},\quad i=1, 2, \dots, n,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $p_{i1}=\dots=p_{in}=\frac{1}{n}$.

Înmulţind inegalităţile precedente găsim

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}p_{ij}\leqslant\frac{1}{n^{n^2}},$$

cu egalitate $\Leftrightarrow p_{ij}=\frac{1}{n}$, $\forall i, j$.

42. Valori şi vectori proprii

Fie A o matrice pătrată de ordinul n cu elemente complexe şi X o matrice nenulă de tipul $n\times 1$ (vector coloană) cu elemente complexe. Dacă există $r\in C$ astfel încît $AX=rX$, atunci X se numeşte *vector propriu* pentru matricea A, iar r se numeşte *valoare proprie* a lui A.

Se observă că ecuaţia matriceală $(A-rI)X=0$ este echivalentă cu un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute, care are şi soluţii nebanale dacă şi numai dacă determinantul ataşat este nul. De aceea vectorii proprii există dacă şi numai dacă *det* $(A-rI)=0$. Această ecuaţie (în complex) poartă numele de *ecuaţia caracteristică* a matricei A. Evident, valorile proprii ale lui A sînt soluţiile ecuaţiei caracteristice.

Problemă. 1) Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

2) Să se rezolve ecuaţia matriceală $AX=-\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 4\end{bmatrix}$.

Soluţie. 1) Ecuaţia caracteristică ataşată lui A este

$$\begin{vmatrix}2-r & 1 & 1\\ 1 & -2-r & -1\\ 1 & 1 & 2-r\end{vmatrix}=-(r^3-2r^2-5r+6)=0.$$ Ea are soluţiile reale $r_1=-2$, $r_2=1$, $r_3=3$.

Fie $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $x,\ y,\ z\in R$. Pentru $r_1=-2$ ecuaţia matriceală $AX=-2X$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 4x+y+z=0 \\ x-z=0 \\ x+y+4z=0. \end{cases}$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$, găsim vectorul propriu $X_1={}^t(z,\ -5z,\ z)$, $z\in R$. Analog, pentru $r_2=1$ găsim vectorul propriu $X_2={}^t\left(-\frac{z}{2},\ -\frac{z}{2},\ z\right)$, $z\in R$, iar pentru $r_3=3$ găsim $X_3={}^t(z,\ 0,\ z)$, $z\in R$.

2) Deoarece $det\ A\neq 0$, există A^{-1}. Soluţia lui $AX=B$ se determină prin înmulţirea la stînga cu A^{-1} şi ţinînd seama că $A^{-1}A=I$, avem $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$, $(A^{-1}A)X=A^{-1}B$ şi deci $X=A^{-1}B$.

Pe de altă parte $det\ A=-6$ şi

$${}^tA=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},\quad A^*=\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix},\quad A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & -1/6 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 5/6 \end{bmatrix},$$

Rezultă

$$X=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

43. Fie A o matrice pătratică de ordinul m, ξ o matrice de tipul $m\times 1$ (vector coloană) şi η o matrice de tipul $1\times m$ (vector linie). Presupunem verificate relaţiile

$$A^2=-I+\xi\eta,\quad \eta\xi=1,$$

(I este matricea unitate de ordinul m).

1) Să se arate că $A\xi=0$, $\eta A=0$ şi că matricea $A+\xi\eta$ este nesingulară, avînd ca inversă matricea $-A+\xi\eta$.

2) Să se demonstreze că rangul lui A este egal cu $m-1$.

3) Să se afle valorile proprii ale matricei reale A şi să se arate că m este impar.

Soluţie. 1) Înmulţim pe $A^2=-I+\xi\eta$, la dreapta, cu ξ şi apoi cu $A\xi$. Găsim

$$A^2\xi=-\xi+\xi(\eta\xi)=0;\quad A(A^2\xi)=A^2(A\xi)=-A\xi+\xi(\eta A\xi)$$

$$\text{şi deci}\begin{cases} A^2\xi=0 \\ A\xi=\xi(\eta A\xi). \end{cases}$$

De aici deducem $0=A^2\xi=A(A\xi)=(A\xi)(\eta A\xi)=\xi(\eta A\xi)^2$; $A\xi=\xi(\eta A\xi)$. Aceste relaţii implică $A\xi=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Din $A^2A=AA^2$ rezultă $(-I+\xi\eta)A=A(-I+\xi\eta)$ sau $\xi(\eta A)=(A\xi)\eta$. Astfel avem și $\eta A=0$.

Prin calcul direct putem verifica relația $(A+\xi\eta)(-A+\xi\eta)=I$. Astfel matricea $A+\xi\eta$ este nesingulară și are inversa $-A+\xi\eta$.

2) Deoarece $A\xi=0$, rezultă rang $A<m$. Fie $\overline{\xi}$ un alt vector pentru care $A\overline{\xi}=0$. Din $A^2=-I+\xi\eta$, găsim $\overline{\xi}=\xi(\eta\overline{\xi})$ și deci ξ și $\overline{\xi}$ sînt coliniari, adică rang $A=m-1$.

3) Vectorul ξ este un vector propriu al lui A în raport cu valoarea proprie zero. Fie v un vector propriu al lui A în raport cu valoarea proprie $\rho\neq0$, adică $Av=\rho v$. Din $\eta A=0$ rezultă $\eta v=0$. Apoi avem $A^2v=\rho Av=\rho^2v$ și ținînd seama că $A=-I+\xi\eta$, deducem

$$-v+\xi(\eta v)=\rho^2v,$$

adică $\rho^2=-1$ sau $\rho=\pm i$. Deoarece A este o matrice cu elemente reale, fiecare dintre rădăcinile caracteristice $-i$, $+i$ este multiplă de ordinul n. Deci $m=2n+1$.

44. Fie S o mulțime și $\otimes$ o operație binară pe S pentru care $x\otimes x=x$, $\forall x\in S$. Să se arate că $\otimes$ este asociativă și comutativă dacă și numai dacă $(x\otimes y)\otimes z=(y\otimes z)\otimes x$, $\forall x, y, z\in S$.

Soluție. Presupunem că $x\otimes x=x$, $\forall x\in S$ și $(x\otimes y)\otimes z=(y\otimes z)\otimes x$, $\forall x, y, z\in S$. Rezultă

$$x\otimes y=(x\otimes y)\otimes(x\otimes y)=[(x\otimes y)\otimes x]\otimes y=[(y\otimes x)\otimes x]\otimes y=[(x\otimes x)\otimes y]\otimes y=$$

$$=(x\otimes y)\otimes y=(y\otimes y)\otimes x=y\otimes x$$

și

$$(x\otimes y)\otimes z=(y\otimes z)\otimes x=x\otimes(y\otimes z).$$

Raționamentul reciproc este evident.

45. Fie M mulțimea matricelor de forma $\begin{bmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{bmatrix}$, $x\in R$, (vezi problema 96).

Să se arate că M împreună cu înmulțirea matricelor este un grup abelian, izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

Soluție. 1) Fie

$$X=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}y & \operatorname{sh}y\\ \operatorname{sh}y & \operatorname{ch}y\end{bmatrix}$$

două elemente oarecare din M. Avem

$$XY=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\operatorname{ch}y & \operatorname{sh}y\\ \operatorname{sh}y & \operatorname{ch}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y & \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\\ \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y & \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y+\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}(x+y) & \operatorname{sh}(x+y)\\ \operatorname{sh}x+y) & \operatorname{ch}(x+y)\end{bmatrix}\in M,$$ adică legea este peste tot definită.

(2) Înmulțirea în M este comutativă. Într-adevăr

$$\forall X,\ Y\in M,\ \text{avem}\ XY=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}(x+y) & \operatorname{sh}(x+y)\\ \operatorname{sh}(x+y) & \operatorname{ch}(x+y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}(y+x) & \operatorname{sh}(y+x)\\ \operatorname{sh}(y+x) & \operatorname{ch}(y+x)\end{bmatrix}=YX.$$

(3) Se știe că înmulțirea matricelor beneficiază de proprietatea de asociativitate. În particular, această proprietate este valabilă și pe M.

(4) Matricea

$$E=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}0 & \operatorname{sh}0\\ \operatorname{sh}0 & \operatorname{ch}0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in M$$

este elementul unitate.

(5) Orice element din M admite un invers deoarece $det\ X=\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$, $\forall X\in M$. Se observă că inversa matricei X este matricea

$$X^{-1}=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}(-x) & \operatorname{sh}(-x)\\ \operatorname{sh}(-x) & \operatorname{ch}(-x)\end{bmatrix}.$$

Toate cele de mai sus arată că înmulțirea matricelor determină pe M o structură de grup comutativ (abelian).

Definim $f: R\to M$ prin $x\in R\to X\in M$, pentru care $\begin{bmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{ch}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{bmatrix}=X$. Se observă că f este bijectivă și că $f(x+y)=f(x)f(y)$, adică f este un izomorfism.

46. Să se arate că mulțimea F a funcțiilor $x\to f_a(x)=\dfrac{x+\operatorname{th}a}{x\operatorname{th}a+1}$, $a\in R$, împreună cu operația de compunere a funcțiilor este un grup comutativ, izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

Soluție. Se impune $x\operatorname{th}a+1\neq 0$, $\forall a\in R$. Ținînd seama că $\operatorname{cth}a\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ rezultă că domeniul de definiție comun tuturor funcțiilor f_a este $[-1,1]$. De asemenea se constată că $f_a([-1,1])=[-1,1]$, $\forall a\in R$. În cele ce urmează subînțelegem aceste lucruri.

(1) Fie f_a și f_b două elemente oarecare din F. Găsim

$$f_a(f_b(x))=\frac{f_b(x)+\operatorname{th}a}{f_b(x)\operatorname{th}a+1}=\frac{\dfrac{x+\operatorname{th}b}{x\operatorname{th}b+1}+\operatorname{th}a}{\dfrac{x+\operatorname{th}b}{x\operatorname{th}b+1}\operatorname{th}a+1}=\frac{x(1+\operatorname{th}a\operatorname{th}b)+\operatorname{th}a+\operatorname{th}b}{x(\operatorname{th}a+\operatorname{th}b)+1+\operatorname{th}a\operatorname{th}b}=$$

$$=\frac{x+\dfrac{\operatorname{th}a+\operatorname{th}b}{1+\operatorname{th}a\operatorname{th}b}}{x\dfrac{\operatorname{th}a+\operatorname{th}b}{1+\operatorname{th}a\operatorname{th}b}+1}=\frac{x+\operatorname{th}(a+b)}{x\operatorname{th}(a+b)+1}=f_{a+b}(x),$$

adică $f_a\circ f_b=f_{a+b}\in F$ și astfel compunerea este peste tot definită.

(2) Evident $f_a\circ f_b=f_{a+b}=f_{b+a}=f_b\circ f_a$ și deci compunerea este comutativă pe F.

Scanned with OKEN Scanner

(3) În general, compunerea funcţiilor este asociativă şi felul în care a fost dată F nu impune restricţii în acest sens.

(4) Funcţia f_0 definită prin $f_0(x)=x$ este elementul unitate.

(5) Orice element f_a din F admite o inversă $f_a^{-1}=f_{-a}$ din F.

Astfel F împreună cu operaţia de compunere a funcţiilor este un grup comutativ. De asemenea raţionamentele precedente ne sugerează să definim o funcţie $\varphi : F \to R$ prin $\varphi(f_a)=a$. Se verifică uşor că φ este o bijecţie. În plus, $\varphi(f_a \circ f_b)=\varphi(f_{a+b})=a+b=\varphi(f_a)+\varphi(f_b)$, adică φ este un izomorfism.

47. Relaţii binare

Fie E o mulţime oarecare. O parte R a produsului cartezian $E \times E$ se numeşte *relaţie binară* pe E. Cele mai importante relaţii binare sînt: relaţia de echivalenţă şi relaţia de ordine.

I. Relaţia de echivalenţă

O relaţie binară $\mathcal{R}$ pe E care are proprietăţile

a) este reflexivă: $(x, x)\in\mathcal{R}$, $\forall x\in E$,

b) este simetrică: $(x, y)\in\mathcal{R}$, $\Rightarrow(y, x)\in\mathcal{R}$, $\forall x, y\in E$

c) este tranzitivă: $(x, y)\in\mathcal{R}$, $(y, z)\in\mathcal{R}\Rightarrow(x, z)\in R$,

se numeşte *relaţie de echivalenţă*. Uneori în loc de $(x, y)\in\mathcal{R}$ se scrie $x\sim y$ sau $x\equiv y$ (mod $\mathcal{R}$) şi se citeşte „x este echivalent cu y modulo $\mathcal{R}$“ sau mai pe scurt, $x\sim y$, $x\equiv y$.

Exemple. 1) Fie Z mulţimea numerelor întregi. Din $Z\times Z$ alegem submulţimea elementelor (m, n) cu proprietatea $n\neq 0$. Două asemenea perechi (m, n) şi (m', n') se numesc echivalente, şi scriem $(m, n)\sim(m', n')$, dacă $mn'-m'n=0$.

2) Considerăm mulţimea dreptelor din plan. Dreptele D şi D' se numesc echivalente, şi scriem $D\sim D'$, dacă sînt paralele sau confundate.

3) Considerăm mulţimea autoturismelor Dacia 1300 din România. Spunem că două asemenea maşini sînt echivalente dacă au aceeaşi culoare.

Fie E o mulţime oarecare şi $\mathcal{R}$ o relaţie de echivalenţă pe E. O parte a lui E formată cu toate elementele echivalente cu unul fixat x_0 se numeşte *clasă de echivalenţă*. Deoarece $x_0\sim x_0$, rezultă că x_0 face parte din clasa de echivalenţă determinată de el.

Să presupunem acum că clasa de echivalenţă determinată de x_0 este o submulţime proprie a lui E (o submulţime diferită de mulţimea vidă $\varnothing$ şi mulţimea totală E; $\varnothing$ şi E se numesc submulţimi improprii ale lui E). Fie $y_0\in E$ care nu satisface $y_0\sim x_0$. Formăm clasa de echivalenţă a elementelor $y\in E$ pentru care $y\sim y_0$. Relaţia de tranzitivitate ne asigură că a doua clasă de echivalenţă nu are elemente comune cu prima clasă. Continuînd în acest fel, împărţim pe E în submulţimi disjuncte, astfel încît $x\in E$ face parte dintr-o asemenea submulţime şi numai dintr-una.

Invers, dacă avem o mulţime E care este acoperită de submulţimi disjuncte, atunci putem defini pe E o relaţie de echivalenţă şi anume:
$x\sim y \Leftrightarrow x$ şi y aparţin aceleiaşi submulţimi.

Mulţimea formată cu clasele de echivalenţă (luate ca elemente) se numeşte *mulţimea cît* a lui E prin $\mathcal{R}$ şi se notează $E/\mathcal{R}$.

II. **Relaţia de ordine**

O relaţie binară $\mathcal{R}$ pe E care are proprietăţile

a) este reflexivă,

b) este antisimetrică: $(x, y)\in\mathcal{R}$ şi $(y, x)\in\mathcal{R}\Rightarrow x=y$,

c) este tranzitivă,

se numeşte *relaţie de ordine parţială* pe mulţimea E.

În loc de $(x, y)\in\mathcal{R}$ se scrie $x\leqslant y$ sau $y\geqslant x$ şi se citeşte „x inferior lui y" sau „y superior lui x".

Relaţia $x<y$, adică „x strict inferior lui y", înseamnă $x\leqslant y$ şi $x\neq y$.

Exemple. 1) Pe mulţimea numerelor reale avem ordinea obişnuită $x\leqslant y$.

2) Pe mulţimea cuvintelor din limba română se poate defini ordinea alfabetică.

3) Fie F o mulţime oarecare şi $P(F)$ mulţimea părţilor lui F. Pentru X, $Y\in P(F)$ spunem $X\leqslant Y$ dacă $X\subseteq Y$.

O relaţie de ordine pe E se numeşte *totală* (iar mulţimea E se numeşte total ordonată) dacă pentru orice două elemente $x, y\in E$ avem $x<y$ sau $x=y$ sau $x>y$.

48. Fie $F=\{f/\, f: R\to R\}$. Pentru $f, g\in F$ definim $f\sim g$ dacă există o bijecţie $\varphi\in F$ astfel încît $f=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi$.

1) Să se arate că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe F.

2) Funcţiile date prin $f(x)=\cos x$ şi $g(x)=\sin x$ pot fi echivalente?

3) Să se determine a şi b astfel încît $f(x)=x^2-1$ să fie echivalentă cu $g(x)=x^2+ax+b$.

Soluţie. 1) Să verificăm proprietăţile relaţiei date:

reflexivitate: $f\sim f$ deoarece $\varphi=id$ este o bijecţie;

simetrie: dacă $f\sim g$, atunci $g\sim f$. Într-adevăr inversa unei bijecţii este o bijecţie şi se observă uşor că $f=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi$ implică $g=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}=(\varphi^{-1})^{-1}\circ f\circ\varphi^{-1}$;

tranzitivitate: dacă $f\sim g$ şi $g\sim h$, atunci $f\sim h$.

Pentru a verifica acest lucru ne bazăm pe faptul că compusa a două bijecţii φ şi ψ este tot o bijecţie. De aceea relaţiile $f=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi$, $g=\psi^{-1}\circ h\circ\psi$ implică $f=\varphi^{-1}\circ(\psi^{-1}\circ h\circ\psi)\circ\varphi=(\varphi^{-1}\circ\psi^{-1})\circ h\circ(\psi\circ\varphi)=(\psi\circ\varphi)^{-1}\circ h\circ(\psi\circ\varphi)$.

Astfel $f\sim g$ este o relaţie de echivalenţă.

2) Presupunem $\cos x=\varphi^{-1}(\sin\varphi(x))$, $\forall x\in R$. Restricţia funcţiei sin la intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este injectivă. De aceea, $\sin\circ\varphi: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\to R$ este injectivă. Fie $x_1\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$. Rezultă $\varphi^{-1}(\sin\varphi(x_1))=\cos x_1=\cos(-x_1)=\varphi^{-1}(\sin\varphi(-x_1))$ şi deci $\sin\varphi(x_1)=\sin\varphi(-x_1)$, adică $x_1=-x_1$ c.c. este absurd.

Astfel funcţiile sin şi cos nu sînt echivalente.

3) Presupunem că există o bijecţie φ astfel încît $f=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi$, adică $\varphi\circ f=g\circ\varphi$ sau altfel scris $(*)$ $\varphi(x^2-1)=(\varphi(x))^2+a\varphi(x)+b$, $\forall x$. Deoarece $\varphi(x^2-1)=(\varphi(-x))^2+a\varphi(-x)+b$, prin scădere găsim $(\varphi(x)-\varphi(-x))(\varphi(x)+$

$+\varphi(-x)+a)=0$. Ţinînd seama că φ este injectivă deducem $\varphi(x)+\varphi(-x)+a=0$, $\forall x$, adică partea pară a lui φ este $-\frac{a}{2}$. Astfel putem scrie $\varphi=-\frac{a}{2}+\psi$, unde ψ este partea impară a lui φ (*vezi* probl. 85), iar condiţia (*) se transcrie în forma (**) $\psi(x^2-1)-\psi^2(x)=b-\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}$. Înlocuind pe rînd $x=0$, respectiv $x=-1$ şi ţinînd seama că $\psi(0)=0$ rezultă $\psi(-1)=b-\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}$, $-\psi^2(-1)=b-\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}$. Aceste relaţii împreună cu faptul că ψ este bijectivă dau $\psi(-1)=-1$. De aceea (**) conduce la următoarea condiţie necesară pentru echivalenţa celor două funcţii, $b-\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}=-1$. Această condiţie este şi suficientă deoarece $\psi(x)=x$ este o soluţie a ecuaţiei funcţionale $\psi(x^2-1)-\psi^2(x)=-1$, iar pentru $\varphi(x)=x-\frac{a}{2}$ avem $\varphi\circ f=g\circ\varphi$.

49. 1) Să se arate că dacă a şi b sînt doi întregi aşa ca $a\equiv b \pmod{2^k}$, $\forall k\in N$, atunci $a=b$.

2) Fie întregii $m_1, m_2, \ldots, m_{2n+1}$ cu proprietatea că dînd la o parte pe unul oarecare dintre ei, cei care rămîn pot fi împărţiţi în două grupuri de cîte n întregi cu sume egale. Să se arate că $m_1=m_2=\ldots=m_{2n+1}$.

Soluţie. 1) Pentru simplificarea raţionamentului ne restrîngem la numerele naturale.

Scriem pe a şi b în raport cu baza 2:

$$a=a_0 2^n+a_1 2^{n-1}+\ldots+a_{n-2}2^2+a_{n-1}2+a_n$$

$$b=b_0 2^n+b_1 2^{n-1}+\ldots+b_{n-2}\,2^2+b_{n-1}2+b_n.$$

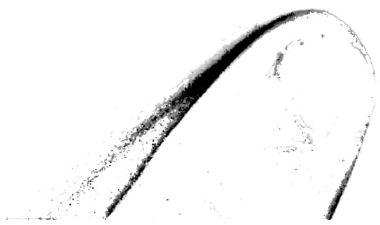
Evident a_i şi b_i sînt 0 sau 1. De aceea avem următoarele implicaţii $a\equiv b \pmod 2 \Rightarrow a_n=b_n$; $a\equiv b \pmod{2^2} \Rightarrow a_{n-1}2+a_n=b_{n-1}2+b_n \Rightarrow a_{n-1}=b_{n-1}$ etc., adică $a=b$.

2) Dînd la o parte un întreg dintre $m_1, m_2, \ldots, m_{2n+1}$, cei $2n$ rămaşi au suma pară şi acest lucru se întîmplă oricare ar fi întregul scos. De aceea toate numerele m_i au aceeaşi paritate, adică $m_i\equiv m_j \pmod 2$, $\forall i, j$.

Deoarece numerele m_i au aceeaşi paritate rezultă că şi numerele $\frac{m_i}{2}$ sau numerele $\frac{m_i-1}{2}$ au proprietatea din enunţ. Deci şi $\frac{m_i}{2}$ sau $\frac{m_i-1}{2}$ au aceeaşi paritate, adică $m_i\equiv m_j \pmod{2^2}$, $\forall i, j$. Din aproape în aproape găsim $m_i\equiv m_j \pmod{2^k}$, $\forall i, j, k$, şi deci $m_i=m_j$, $\forall i, j$.

50. Fie $A=[a_{ij}]$ o matrice pătratică de ordinul n care satisface condiţiile

(1) $a_{ii}\neq 0$, $\forall i$;



(2) dacă $i \neq j$ și $a_{ij} \neq 0$, atunci $a_{ji} = 0$;
(3) dacă $a_{ij} \neq 0$ și $a_{jk} \neq 0$, atunci $a_{ik} \neq 0$.

Să se arate că „$i \leqslant j \leftrightarrow a_{ij} \neq 0$" este o relație de ordine parțială pe mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Apoi să se probeze că A este nesingulară.

Soluție. În baza proprietăților (1), (2) și (3) rezultă $i \leqslant i$; $i \leqslant j$, $j \leqslant i \Rightarrow i = j$; $i \leqslant j$, $j \leqslant k \Rightarrow i \leqslant k$, adică relația este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă, c.c.tr.d.

Evident putem găsi o permutare σ: $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ așa ca $i \leqslant j$ să implice $\sigma(i) \leqslant \sigma(j)$. Matricea $A_\sigma = [a_{\sigma(i)\sigma(j)}]$ este superior triunghiulară și are elementele de pe diagonală nenule, adică este nesingulară. Pe de altă parte A_σ este obținută din A numai prin schimbarea ordinii liniilor și coloanelor. De aceea și A este nesingulară; evident $\det A = \det A_\sigma = a_{11} \cdot a_{22} \ldots a_{nn}$.

51. Margini pentru submulțimi de numere reale

Fie R mulțimea numerelor reale. O parte a mulțimii R se numește *majorată* dacă există un element din R, numit *majorant*, care este mai mare decît toate elementele din partea considerată. Analog se definește partea minorată. O parte majorată și minorată se numește *mărginită*. Evident, majorantul sau minorantul nu sînt unice.

Considerăm o parte majorată A a lui R. Dacă există un majorant al lui A care aparține lui A, atunci acesta se numește *maximumul* (*maximul*) lui A și se notează prin $\max\limits_{x \in A} x$ sau $\max A$.

Dacă există, maximul este unic. Într-adevăr, acest lucru decurge ușor din implicația $a \leqslant b$, $b \leqslant a \Rightarrow a = b$.

Analog se definește noțiunea de minimum (minim) pentru care utilizăm notațiile $\min\limits_{x \in A} x$ sau $\min A$.

Fie A o parte majorată a lui R. Dacă mulțimea majoranților lui A admite un minimum, atunci acest minimum se numește *marginea superioară* a lui A și se notează $\sup\limits_{x \in A} x$ sau $\sup A$, unde sup se citește „supremum (superior)". Evident, un număr real M este margine superioară a lui A dacă și numai dacă (fig. 123)

Fig. 123.

1) $\forall x \in A$, $x \leqslant M$,
2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$, astfel ca $M - \varepsilon \leqslant x_0$.

Analog se definește *marginea inferioară* pentru care utilizăm notațiile $\inf\limits_{x \in A} x$ sau $\inf A$, unde *inf* se citește „infimum (inferior)". Un număr real m este margine inferioară a lui A dacă și numai dacă (fig. 123)

1) $\forall x \in A$, $x \geqslant m$,
2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$ așa ca $x_0 \leqslant m + \varepsilon$.

Marginile unei mulțimi sînt unice. Existența marginilor o vom admite axiomatic.

Scanned with OKEN Scanner

Axioma marginii. Orice mulțime nevidă și majorată, de numere reale, admite o margine superioară (sau orice mulțime nevidă și minorată, de numere reale, admite o margine inferioară).

Marginile lui A pot să aparțină sau nu mulțimii A. De exemplu, mulțimea $A=\{x/\, x\leqslant 1\}$ admite pe $1\in A$ drept margine superioară, iar mulțimea $A=\{x/\, x>2\}$ admite pe $2\notin A$ drept margine inferioară. Dacă A este o mulțime închisă (mărginită), atunci marginile lui A aparțin lui A, fiind respectiv minimul și maximul lui A.

Exemplu. Fie $A=\left\{x_n=1-\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in N\right\}$. Să se afle $\inf A$ și $\sup A$.

Soluție. Se observă că șirul cu termenul general $x_n=1-\frac{1}{n}$ este crescător și convergent la 1.

Marginea inferioară a lui A este 0 deoarece $\forall n\in N$, $x_n\geqslant 0$ și $\forall \varepsilon>0$ există termenul $x_1=0$ astfel încît $x_1<0+\varepsilon$. Deci $\inf A=\min A=x_1$.

Marginea superioară a lui A este 1 deoarece $\forall n\in N$, $x_n<1$ și $\forall \varepsilon>0$, există cel puțin un n pentru care $x_n>1-\varepsilon$ și anume $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Deci $\sup A=1\notin A$.

52. Valori extreme ale funcțiilor reale

Fie E o submulțime de numere reale. Spunem că funcția $f: E\to R$ este *majorată, minorată sau mărginită* dacă mulțimea $f(E)$ are aceste proprietăți. Dacă există, minimul sau maximul lui $f(E)$ se numesc *minimul sau maximul global al lui f*, iar punctele din E în care sînt atinse aceste valori se numesc *puncte de minim sau maxim global*. Analog, dacă există, infimumul sau supremumul lui $f(E)$ se numesc *infimumul sau supremumul* lui f. De asemenea în loc de notațiile $\min f(E)$, $\inf f(E)$ etc. se folosesc $\min\limits_{x\in E} f(x)$, $\inf\limits_{x\in E} f(x)$ etc. sau mai pe scurt $\min f(x)$, $\inf f(x)$ etc.

Un punct $x_0\in E$ se numește *punct de minim (maxim) local* pentru f dacă există o vecinătate V_{x_0} astfel încît $f(x)\geqslant(\leqslant) f(x_0)$, $\forall x\in E\cap V_{x_0}$. Valoarea $f(x_0)$ se numește *minim* (respectiv *maxim*) *local*.

Punctele de minim sau maxim se mai sumesc și *puncte de extrem*, iar minimul sau maximul se mai numesc *extreme*. Evident, extremele globale sînt și locale, reciproca nefiind numaidecît adevărată.

Dacă funcția f este definită pe o mulțime E formată numai din puncte izolate, atunci prezintă interes numai problema extremelor globale. Dacă $f(E)$ este o mulțime închisă, atunci infimumul și supremumul lui f coincid respectiv cu extremele globale ale lui f.

Exemple. 1) Să se determine maximul funcției f, definită pe mulțimea $E=\{1, 2, \ldots, 10^3\}$, unde $f(x)=\frac{x}{x^2+10^4}$. (Enunțul poate fi reformulat sub forma: să se determine cel mai mare element al mulțimii $\left\{a_n\,\middle|\, a_n=\frac{n}{n^2+10^4},\ n\in\{1, 2, \ldots, 10^3\}\right\}$.)

Soluție. Comportarea funcției f, extinsă la mulțimea $x\in[1, 10^3]$ rezultă din tabel. Observăm că $\sup\limits_{x\in[1;\ 10^3]} f(x)=\frac{1}{200}$. Deoarece $E\subset[1, 10^3]$ rezultă că $\sup\limits_{x\in E} f(x)\leqslant \sup\limits_{x\in[1,\ 10^3]} f(x)$; dar deoarece punctul în care f își atinge supremumul este element din mulțimea $E\cap[1, 10^3]$, $\sup\limits_{x\in E} f(x)=\sup\limits_{x\in[1,\ 10^3]} f(x)=f(10^2)=\frac{1}{200}$.

x	1		10^2		10^3
$f'_{(x)}$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{10^4+1}$	$\nearrow$	$\frac{1}{200}$	$\searrow$	$\frac{1}{10^3+10}$

2) Să se determine extremele funcției $x\to f(x)=\arcsin\frac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$.

Soluție. Constatăm că mulțimea de definiție este discretă, finită $x\in\{(-\infty,-1]\cup[1, \infty)\}\cap[-1, 1]=\{-1; 1\}$. Deci $f: E\to F$, unde $E=\{-1; 1\}$, $F=\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$ și $\sup\limits_{x\in E} f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\inf\limits_{x\in E} f(x)=-\frac{\pi}{2}$. Funcția are puncte de maxim, respectiv minim, global.

3) Fie $f: (0, \infty)\to R$ dată prin $f(x)=4x+\frac{1}{x}$. Să se găsească $\min f(x)$.

Soluție. Utilizînd inegalitatea geometrică găsim $f(x)\geqslant (8x)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=4$. Deci $\inf f(x)=4$. Pe de altă parte observăm că $f\left(\frac{1}{2}\right)=4$. De aceea $\inf\limits_x f(x)=\min\limits_x f(x)=4$ și $x=\frac{1}{2}$ este punctul de minim global.

4) Se consideră funcția reală definită prin $f(x)=3x^a+x^b+2x^c$. În ipoteza $2a+b+c=0$, să se arate că $\inf\limits_x f(x)\geqslant\sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{32}$.

Soluție. Funcția f este definită pe $(0, \infty)$. Utilizînd inegalitatea geometrică $f(x)=\frac{1}{2}6x^a+\frac{1}{4}4x^b+\frac{1}{4}8x^c\geqslant(6x^a)^{\frac{1}{2}}(4x^b)^{1/4}(8x^c)^{1/4}=\sqrt{6}\ \sqrt[4]{32}$ și deci $\inf\limits_{x>0} f(x)\geqslant\sqrt{6}\sqrt[4]{32}$. În general însă, acest infimum nu mai este un minim.

53. 1) Se dau mulțimile de numere reale pozitive $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și $\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$. Să se determine permutarea $(j_1, \ldots, j_n)$ a întregilor $(1, 2, \ldots, n)$ astfel încît suma

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{j_m}a_{j_k}$$

să fie minimă.

(The Amer. Math. Monthly, 1972)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Notăm cu S suma pentru $(j_1, j_2, \ldots, j_n)=(1, 2, \ldots, n)$ și cu S' suma pentru $(j_1, j_2, \ldots, j_n)=(1, 2, \ldots, k-1, k+1, k, k+2, \ldots, n)$. Atunci $S'=S+b_ka_{k+1}-b_{k+1}a_k=S+b_kb_{k+1}\left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}-\frac{a_k}{b_k}\right)$ și deci $S'<S\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_{k+1}/b_{k+1}<a_k/b_k$.

Punînd $r_i=\frac{a_i}{b_i}$, $i=1, 2, \ldots, n$, rezultă că suma propusă este minimă cînd $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ este astfel încît $r_{j_1}\leqslant r_{j_2}\leqslant \ldots \leqslant r_{j_n}$.

2) Fie numerele reale a_i, $i=1, 2, \ldots, n$ și $S\geqslant 0$ dat de

$$(n-1)S^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2.$$

Să se arate că

$$n\min_i\{a_i\}\leqslant \Sigma a_i-S\leqslant \Sigma a_i+S\leqslant n\max_i\{a_i\}.$$

Cînd are loc egalitatea?

(The Amer. Math. Monthly, 1973)

Soluție. Fără a scădea generalitatea putem presupune că $a_1\leqslant a_2\leqslant \ldots \leqslant a_n$. În această ipoteză avem

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(a_i-a_j)^2\leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(i-1)(a_i-a_1)^2\leqslant \sum_{i=2}^{n}(a_i-a_1)^2\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_1)\right]^2.$$

Extrăgînd rădăcina pătrată găsim $na_1\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i-S$. Analog $S^2\leqslant\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(a_n-a_j)^2\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}(a_n-a_j)\right]^2$, din care rezultă $\sum_{j=1}^{n}a_j+S\leqslant n\,a_n$. Inegalitatea $n\,a_1\leqslant\Sigma a_i-S$ este o egalitate dacă și numai dacă $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}$. Analog $\Sigma a_j+S\leqslant na_n$ este o egalitate dacă și numai dacă $a_2=a_3=\ldots=a_n$. Astfel ambele egalități au loc $\Leftrightarrow n=2$ sau toate numerele a_i sînt egale. Evident $\Sigma a_i-S=$ $=\Sigma a_i+S\Leftrightarrow S=0$, adică, $\Leftrightarrow a_1=\ldots=a_n$.

3) Să se arate că dacă a, b și c sînt numere reale pozitive, atunci

$$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

(Olimpiadă, S.U.A., 1974)

Soluție. Observăm că inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$$a^{\frac{2a-b-c}{3}}\,b^{\frac{2b-a-c}{3}}\,c^{\frac{2c-a-b}{3}}\geqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fără a scădea generalitatea putem presupune $a \geqslant b \geqslant c$. Cu aceasta avem

$$a^{\frac{2a-b-c}{3}} b^{\frac{2b-a-c}{3}} c^{\frac{2c-a-b}{3}} \geqslant c^{\frac{2a-b-c+2b-a-c+2c-a-b}{3}} =$$

$$= c^0 = 1 \text{ c.c.tr.d.}$$

54. 1) Fie a un număr real. Să se arate că există un singur polinom P_n de gradul n, cu coeficienţi reali, astfel încît

$$\max_i |P_n(i) - a^i| = 0,$$

unde $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

2) Fie $a \geqslant 3$ şi Q_n un polinom oarecare de gradul n cu coeficienţi reali. Să se arate că

$$\max_i |Q_n(i) - a^i| \geqslant 1,$$

unde $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$.

Soluţie. 1) Condiţia pusă este echivalentă cu $P_n(i) = a^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sau explicit

$$\begin{cases} a_0 0^n + a_1 0^{n-1} + \ldots + a_{n-1} 0^1 + a_n = a^0 \\ a_0 1^n + a_1 1^{n-1} + \ldots + a_{n-1} 1^1 + a_n = a^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 n^n + a_1 n^{n-1} + \ldots a_{n-1} n^1 + a_n = a^n, \end{cases}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sînt coeficienţii polinomului P_n. Observăm însă că avem de-a face cu un sistem liniar de $n+1$ ecuaţii cu $n+1$ necunoscute al cărui determinant este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1^n & 1^{n-1} & \ldots\ldots & 1^1 & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & \ldots\ldots & 2^1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n^n & n^{n-1} & \ldots\ldots & n^1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$ (vezi determinant Vandermonde).

De aceea sistemul precedent are o soluţie unică. Explicitarea acestei soluţii este evidentă (regula lui Cramer).

2) Procedăm prin inducţie după gradul n al lui Q_n. Dacă $n = 0$, atunci $Q_n(x) = c$ (constantă). Deoarece sistemul

$$|c-1| < 1, \quad |c-a| < 1, \quad a \geqslant 3$$

este incompatibil, rezultă $\max\{|c-1|, |c-a|\} \geqslant 1$.

Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru toţi $k \leqslant n-1$ şi fie $Q_n(x)$ polinomul de gradul n. Definim

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{a-1}[Q_n(x+1) - Q_n(x)].$$

Pentru $i=0, 1, \ldots, n$ avem

$$|R_{n-1}(i)-a^i|=\frac{|-Q_n(i+1)+a^{i+1}+Q_n(i)-a^i|}{a-1}\leqslant\frac{|Q_n(i+1)-a^{i+1}|}{a-1}+\frac{|Q_n(i)-a^i|}{a-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{a-1}\max\{|Q_n(i)-a^i|:i=0, 1, \ldots, n+1\}\leqslant\max\{|Q_n(i)-a^i|:i=$$

$$=0, 1, \ldots, n+1\},$$

și ipoteza $\max_i\{|R_{n-1}(i)-a^i|\}\geqslant 1$, $i=0, 1, \ldots, n$, implică

$$\max_i\{|Q_n(i)-a^i|\}\geqslant 1,\ i=0, 1, \ldots, n+1.$$

Rezultă că afirmația 2) este adevărată $\forall n\in N$.

55. Fie $a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots$ un șir de numere ai cărui termeni sînt elemente (cifre) ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Construim șirul cu termenul general

$$x_n=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_110^1+a_010^0.$$

1) Cărei mulțimi îi aparțin numerele a_m dacă toți termenii șirului $\{x_n\}$ sînt divizibili cu 3?

2) Să se arate că dacă $a_0=a_1=\ldots=a_m=\ldots=a\neq 0$, atunci nici un termen din șirul $\{x_n\}$ nu este pătratul unui întreg.

Soluție. 1) Pentru n fixat numărul x_n este divizibil cu 3 dacă și numai dacă suma $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ este divizibilă cu 3. Într-adevăr, din $10=m3+1$, $10^2=m3+1, \ldots, 10^n=m3+1$ rezultă $x_n=m3+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)$.

Prin inducție rezultă că $a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots$ trebuie să aparțină mulțimii $\{0, 3, 6, 9\}$.

2) Dacă $a_0=a_1=\ldots=a_m=\ldots=a\neq 0$, atunci

$$x_n=a(10^n+10^{n-1}+\ldots+10+1)=a\frac{10^{n+1}-1}{10-1}=\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ cifre}}$$

Un număr de forma $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ cifre}}$ nu poate fi pătratul unui număr par, deoarece el este impar. Pe de altă parte, pătratul unui număr impar este de forma $8k+1$, $k\in N$. Într-adevăr, $(2p+1)^2=4p^2+4p+1=4p(p+1)+1=8k+1$ (deoarece $p(p+1)$ este divizibil cu 2). De aceea avem $11\ldots1=8k+1\Leftrightarrow 11\ldots10=8k\Leftrightarrow 55\ldots5=4k$, ceea ce este absurd. Pentru $a\in\{1, 4, 9\}$ numărul $aa\ldots a$ nu poate fi pătrat perfect, deoarece $11\ldots1$ nu este pătrat perfect; pentru $a\in\{2, 3, 7, 8\}$ numărul $aa\ldots a$ nu poate fi pătrat perfect, deoarece pătratul oricărui număr întreg se termină cu una din cifrele 1, 4, 5, 6, 9; pentru $a=5$ ar trebui ca $55\ldots5=8k+1$ și deci $55\ldots54=8k$, absurd; pentru $a=6$ ar trebui ca $66\ldots6=4k$, absurd. În concluzie, nici un termen al șirului dat nu poate fi pătrat perfect.

Scanned with OKEN Scanner

56. Fie x_n termenul general al unui şir definit prin

$$x_n=-x_{n-1}-2x_{n-2},\ x_1=1,\ x_2=-1.$$

Să se arate că $2^{n+1}-7x_{n-1}^2$ este un pătrat perfect.

(The Amer. Math. Monthly, 1972)

Soluţie. I. Prin inducţie asupra lui n demonstrăm că

$$2^{n+1}-7x_{n-1}^2=(2x_n+x_{n-1})^2.$$

Evident această relaţie are loc pentru $n=2$. Presupunem că ea este adevărată pentru n, $n\geqslant 2$. Atunci avem

$$(2x_{n+1}+x_n)^2=(-x_n-4x_{n-1})^2=x_n^2+8x_nx_{n-1}+16x_{n-1}^2=2(4x_n^2+4x_nx_{n-1}+x_{n-1}^2)+$$

$$+14x_{n-1}^2-7x_n^2=2(2^{n+1}-7x_{n-1}^2)+14x_{n-1}^2-7x_n^2=2^{n+2}-7x_n^2$$

şi deci relaţia are loc $\forall n\in N$.

II. Din relaţia de recurenţă avem $x_0=0$ şi

$$\begin{bmatrix}x_n & x_{n+1}\\ x_{n-1} & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{n+1} & x_{n+2}\\ x_n & x_{n+1}\end{bmatrix}\text{ aşa că }\begin{bmatrix}x_n & x_{n+1}\\ x_{n-1} & x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{n-1}.$$

Trecînd la determinanţi obţinem $x_n^2-x_{n+1}x_{n-1}=2^{n-1}$; înmulţim ambii termeni cu 4, înlocuim $-x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}$ şi scădem $7x_{n-1}^2$ din ambii membri, rezultă

$$(2x_n+x_{n-1})^2=2^{n+1}-7x_{n-1}^2.$$

57. Se dă $\cos s\pi=\frac{1}{3}$. Să se arate că

$$\cos(2^n s\pi)=\frac{a_n}{3^{2^n}},\ n=1,2,\ldots$$

unde a_n este un întreg care nu este divizibil cu 3 şi să se deducă de aci că s este iraţional.

Soluţie. Notăm $\theta=s\pi$. Ţinînd seama de $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ găsim $\cos(2s\pi)=-\frac{7}{3^{2^1}}$, $\cos(2^2s\pi)=\frac{17}{3^{2^2}}$.

Presupunem acum că $\cos(2^n s\pi)=\frac{a_n}{3^{2^n}}$, unde a_n este un întreg ce nu este divizibil cu 3. Găsim $\cos(2^{n+1}s\pi)=\cos(2\cdot 2^n s\pi)=2\cos^2(2^n s\pi)-1=\frac{2a_n^2-3^{2^{n+1}}}{3^{2^{n+1}}}=$

$=\frac{a_{n+1}}{3^{2^{n+1}}}$, unde evident, a_{n+1} nu se divide cu 3.

De aceea relaţia dată are loc, oricare ar fi numărul natural n.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că $\cos(2^n s\pi) \neq \cos(2^{n+m} s\pi)$, $\forall n, m$. Pe de altă parte, dacă s ar fi un număr rațional, adică $s = \frac{p}{q}$ unde $p \in Z$, $q \in Z - \{0\}$, atunci $\cos(ms\pi)$, $m \in Z$, ar lua cel mult $2q$ valori distincte. Contradicția conduce la faptul că s este irațional.

58. Teoreme referitoare la convergența șirurilor reale

Fie $\{x_n\}$ un șir de numere reale.

(I) Criteriul fundamental al lui Cauchy este o condiție necesară și suficientă de convergență: $\{x_n\}$ este convergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ astfel încît $\forall m, n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Pentru unele cazuri particulare dispunem însă și de criterii suficiente de convergență. Dintre acestea am selectat teoremele care urmează.

(II) Șirul $\{x_n\}$ se numește crescător dacă $x_n \leqslant x_{n+1}$, $\forall n$, și strict crescător dacă $x_n < x_{n+1}$, $\forall n$. Dacă $\{x_n\}$ este un șir crescător și mărginit la dreapta, atunci $a = \sup\limits_n \{x_n\}$ este limita șirului.

Analog se definesc șirurile descrescătoare. De asemenea, orice șir descrescător și mărginit la stînga, converge către $\inf\limits_n \{x_n\}$.

Șirurile crescătoare sau descrescătoare se mai numesc și monotone. De aceea afirmațiile precedente pot fi reunite: orice șir monoton și mărginit este convergent.

Exemple. Fie șirul cu termenul general $x_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$. Avem $x_n > 0$ și $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} < \frac{e}{n+1} < 1$ pentru $n \geqslant 2$. Astfel șirul $\{x_n\}$ este descrescător și mărginit la stînga de zero; deci $\{x_n\}$ este un șir convergent. Notăm $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Din $x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1}$, prin trecere la limită în ambii membri, găsim $b = b \cdot e \cdot 0 = 0$.

2) Fie șirul cu termenul general $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Se observă ușor că $x_n < x_{n+1}$, adică șirul este strict crescător. Pe de altă parte avem $x_n < 1 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3$. De aceea șirul $\{x_n\}$ este convergent. De asemenea se poate dovedi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n \{x_n\} = e$.

(III) Criteriul majorării: fie șirul $\{x_n\}$ și $x \in R$; dacă există un șir $\{a_n\}$ convergent către zero astfel încît $|x_n - x| \leqslant |a_n|$, $\forall n > N_0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(IV) Criteriul cleștelui: fie $\{a_n\}$, $\{x_n\}$, $\{b_n\}$ trei șiruri astfel încît $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, abstracție făcînd cel mult de un număr finit de termeni; dacă $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ sînt convergente și au aceeași limită, atunci și $\{x_n\}$ este convergent și are aceeași limită ca și celelalte două șiruri.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Fie şirul cu termenul general

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

Se observă că

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<x_n<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$. De aceea $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

(V) Dacă $\{x_n\}$ este un şir convergent către x, atunci şirul cu termenul general $s_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ este convergent către x; s_n se numesc sumele lui Cesaro. Drept consecinţe imediate ale acestei teoreme citãm: (a) dacă $\{x_n\}$ este un şir cu termeni strict pozitivi, convergent către x, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=x$; (b) dacă $\{x_n\}$ este un şir cu termeni strict pozitivi şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=x$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=x$.

Exemple. 1) Fie şirul cu termenul general $x_n=\frac{1}{n}\left(e^{-1}+e^{-1/2}+\ldots+e^{-1/n}\right)$. Se observă că $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}}=1$. De aceea $\lim x_n=1$.

2) Fie şirul cu termenul general $x_n=\sqrt[n]{n}$. Deoarece $x_n=\sqrt[n]{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}}$, pentru $n\geqslant 2$, şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$, rezultă $\lim\limits_{n\to 8}x_n=1$.

3) Considerăm şirul cu termenul general $x_n=\sqrt[n]{\frac{(n+1)\ldots(2n)}{n^n}}$. Notăm $t_n=\frac{(n+1)\ldots(2n)}{n^n}$ şi găsim $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{4}{e}$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{t_n}=\frac{4}{e}$.

59. 1) Fie $f(n)=(n!)^{\frac{1}{n}}$, $n\in N$. Să se arate că şirul $\left\{\frac{f(n+1)}{f(n)}\right\}$ este descrescător şi mărginit. Să se găsească limita sa.

Soluţie. Scriind efectiv termenii corespunzători lui $n=1, 2, 3$ se constată că ei descresc. Să arătăm că acest lucru are loc în general, adică

$$\frac{f(n+2)}{f(n+1)}\Big/\frac{f(n+1)}{f(n)}<1.$$

Pentru aceasta definim

$$R(n)=\left[\frac{f(n+2)\,f(n)}{f^2(n+1)}\right]^{n(n+1)(n+2)}$$

Scanned with OKEN Scanner

și presupunem $R(n)<1$ ca ipoteză pentru inducție. Rezultă

$$R(n+1)=R(n)\left[\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}\right]^{(n+1)(n+2)}<1,\ \forall n,$$

și deci șirul este descrescător.

Se poate verifica că

$$1<\frac{f(n+1)}{f(n)}<\frac{n+1}{n}.$$

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=1.$$

2) Fie $\{a_n\}$ un șir nemărginit de numere reale pozitive astfel încît $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$ și $\left\{\frac{a_1^{\alpha-1}+\ldots+a_n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}},\ \alpha>1\right\}$ este un șir mărginit. Să se găsească

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^{\alpha}+\ldots+a_n^{\alpha}}{n^{\alpha}}.$$

Soluție. Alegem un subșir $\{a_{n_k}\}$ al lui $\{a_n\}$ utilizînd regulile: fie n_1 cel mai mic întreg pentru care $a_{n_1}>a_n,\ldots$, fie n_k cel mai mic întreg superior lui n_{k-1} pentru care $a_{n_k}>a_{n_{k-1}}$ etc. Pentru $n_k\leqslant n<n_{k+1}$ avem

$$0\leqslant\frac{a_1^{\alpha}+\ldots+a_n^{\alpha}}{n^{\alpha}}<\frac{a_1^{\alpha-1}+\ldots+a_n^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}}\cdot\frac{a_{n_k}}{n_k}$$

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^{\alpha}+\ldots+a_n^{\alpha}}{n^{\alpha}}=0.$$

60. Se dă $x\to f(x)=\frac{\sin x}{x}$. Se cere:

1) Studiul funcției f pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

2) Să se arate că șirul $n\to x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}f(k)$ este convergent;

3) Să se stabilească natura șirului $n\to a_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

Soluție. 1) Deoarece $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=-\frac{\cos x}{x^2}(\operatorname{tg}x-x)<0,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că f este descrescătoare pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și admite marginile $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$.

2) Pentru a demonstra convergența șirului $(x_n)_{n\in N}$ să utilizăm, spre exemplu, criteriul Cauchy și criteriul majorării.

Se arată că pentru $\varepsilon>0$, arbitrar, există un rang $N(\varepsilon)$, începînd de la care $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. Se face evaluarea, din care se determină rangul $N(\varepsilon)$

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)<\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

Rezultă că dacă $n<N(\varepsilon)=\left[\lg_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$, atunci $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$, $(\forall\varepsilon>0)$.

3) Pentru determinarea soluției vom utiliza, spre exemplificare, criteriul cleștelui. Se consideră f pe submulțimea discretă $\left\{\frac{k\pi}{n^2}\,\middle|\,k\in\overline{1,\,n}\right\}\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; deoarece f — descrescătoare, rezultă

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{n^2}}{\frac{n\pi}{n^2}}<\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{\pi}{n^2}}$$

pentru $x\in\left[\frac{\pi}{n^2},\,\frac{n\pi}{n^2}\right]$; cu relația

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{n^2}}{\frac{n\pi}{n^2}}\cdot x<\sin x<\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{\pi}{n^2}}\cdot x,$$

utilizată pentru mulțimea discretă menționată, rezultă prin însumare

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{n^2}}{\frac{n\pi}{n^2}}\cdot\frac{\pi}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\leqslant a_n\leqslant\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{\pi}{n^2}}\cdot\frac{\pi}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2},$$

Deoarece șirurile minorant și majorant au aceeași limită $\frac{\pi}{2}$, rezultă că $a_n\to\frac{\pi}{2}$.

61. Fie $x\to f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Se cere:

1) Reprezentarea grafică a funcției f; să se arate că punctul $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ este centru de simetrie al graficului funcției, $G(f)$; să se calculeze $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

2) Să se calculeze limitele șirurilor

$$n \to a_n = \sum_{k=1}^{n} f(\sqrt{n^2+k}) \text{ și } n \to b_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{n+k}{2n}\right).$$

Soluție. 1) Funcția f ia valori reale pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$; $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$, $\lim_{x \nearrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Urmează tabelul de variație și graficul (fig. 124).

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

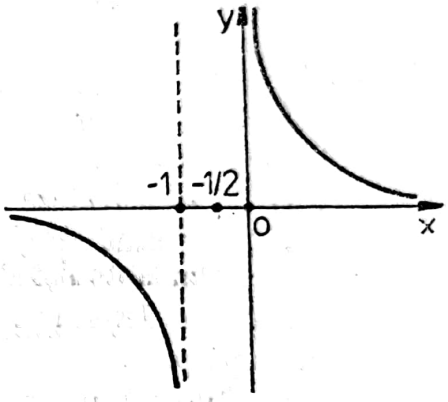


Fig. 124.

Făcînd schimbarea de variabilă $x = x' - \frac{1}{2}$ (translația după Ox) rezultă

$$f\left(x' - \frac{1}{2}\right) = \varphi(x') = \ln \frac{x' + \frac{1}{2}}{x' - \frac{1}{2}}, \quad x' \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$ Punctul $\omega = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ din planul xOy este centru de simetrie al graficului, dacă φ este funcție impară; se verifică $\varphi(-x') = \ln \frac{-x' + \frac{1}{2}}{-x' - \frac{1}{2}} = \ln \frac{x' - \frac{1}{2}}{x' + \frac{1}{2}} = -\ln \frac{x' + \frac{1}{2}}{x' - \frac{1}{2}} = -\varphi(x')$, unde $x' \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Se integrează prin părți și rezultă

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln(1+x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

2) Se transcrie $a_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right) = \ln \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)$; deoarece $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n < \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right) < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n$, iar șirurile majorant

și minorant converg către aceeași limită egală cu e, rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Termenul șirului $(b_n)_{n\in N}$ este o sumă Riemann (pentru o diviziune uniformă) a funcției f considerată, spre exemplu, pe $\left[+\frac{1}{2}, 1\right]$ (se observă că $f:(-\infty, -1)\cup(0, \infty)$ și deci se consideră o restricție pe $[a, b]\cap(0, \infty)$);

$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{k}{n}\right)$, $b=1$, $a=\frac{1}{2}$, $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{2n}$. Rezultă că $b_n \to$

$\to \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \ln\frac{8}{3\sqrt{3}}$.

62. Se consideră funcția $f:[0, \pi)\to R$ definită prin $f(x)=x-\sin x$.

1) Să se cerceteze variația lui f.

2) Să se arate că șirul $\{x_n\}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1}=\sin x_n$, $n\in N$, este monoton și să i se cerceteze convergența.

3) Să se determine limita șirului $\{x_{n+1}^{-p}-x_n^{-p}\}$, $p\in N$, $x_1\neq k\pi$, $k\in N$. Discuție după p.

4) Utilizînd un șir de sume Cesaro să se determine limita șirului $\{nx_{n+1}^2\}$, știind că $x_1\neq k\pi$, $k\in Z$.

Soluție. 1) Se observă că $f'(x)=1-\cos x$. Deci: $f'(x)=0$ pentru $x=0$ și $f'(x)>0$ în rest. De aceea f este strict crescătoare de la $f(0)=0$ la $f(\pi)=\pi$.

2) Dacă $0<x_1<\pi$, atunci $x_n>0$, $\forall n\in N$. În plus, $x_n-x_{n+1}=x_n-\sin x_n=$ $=f(x_n)>0$, adică șirul $\{x_n\}$ este strict descrescător și mărginit de zero. Notînd $l=\lim_{n\to\infty} x_n$ și ținînd seama de $x_{n+1}=\sin x_n$ rezultă $l=\sin l$, ecuație ce are numai soluția $l=0$. Același lucru se poate spune despre orice x_1 care este congruent modulo 2π cu un număr de pe $(0, \pi)$: $x_1>x_2>\ldots>x_n>\ldots>0$ și $\lim_{n\to\infty} x_n=0$.

Analog, dacă x_1 este congruent modulo 2π cu un număr din intervalul $(-\pi, 0)$, atunci $x_1>x_2>\ldots>x_n>\ldots>0$ și $\lim_{n\to\infty} x_n=0$.

Dacă $x_1=k\pi$, $k\in Z$, atunci $x_n=0$, $\forall n\in N$.

3) Pentru $x_1=k\pi$ avem $a_n=0$ și deci $nx_n^2=0$, $\forall n$.

Fie $x_1\neq k\pi$, $k\in N$. Pentru $p=1$ avem $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}^{-1}-x^{-1}_n)=\lim_{n\to\infty}(\sin^{-1}x_n-x_n^{-1})=$ $=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=0$; pentru $p=2$ găsim $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}^{-2}-x_n^{-2})=\lim_{n\to\infty}(\sin^{-2}x_n-x_n^{-2})=$ $=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{1}{3}$, aplicînd de exemplu regula lui l'Hospital. Pentru $p\geq 3$, $p\in N$, formula lui Taylor $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+x^5\varphi(x)$ dă $\sin^p x=x^p-$ $-\frac{1}{6}C_p^1 x^{p+2}+\ldots$; de aceea $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}^{-p}-x_n^{-p})=\lim_{n\to\infty}(\sin^{-p}x_n-x_n^{-p})=\lim_{x\to 0}\frac{x^p-\sin^p x}{x^p\sin^p x}=$

Scanned with OKEN Scanner

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} C_p^1 x^{p+2} + \dots}{x^{2p} + \dots} = \infty$, deoarece $p+2<2p$. Pentru obținerea acestui rezultat se poate aplica și regula lui l'Hospital.

4) Fie $x_1 \neq k\pi$, $k\in N$. Din cele precedente știm că $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}^{-2} - x_n^{-2}) = \frac{1}{3}$. Rezultă $\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_1^n (x_{k+1}^{-2} - x_k^{-2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_{n+1}^{-2} - x_1^{-2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx_{n+1}^2}$. Deci $\lim_{n\to\infty}(nx_{n+1}^2) = 3$.

63. Ecuații liniare cu diferențe finite

Ecuația $f(x+n)+a_1(x)f(x+n-1)+\dots+a_n(x)f(x)=Q(x)$ este ecuație liniară cu diferențe finite, neomogenă. Deoarece este ecuație liniară, dacă se cunoaște o soluție particulară a ecuației neomogene, atunci găsirea soluției se reduce la rezolvarea ecuației omogene corespunzătoare.

Menționăm cîteva proprietăți ale soluțiilor ecuațiilor liniare omogene.

I. Dacă $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$ sînt soluții ale ecuației, atunci și o combinație liniară, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{p} C_k f_k(x)$, este soluție a ecuației; C_k sînt constante arbitrare.

II. Fie sistemul de soluții $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$; se definește

$$D(f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}, \quad f_{ij} = f_i(j-1).$$

Dacă $D(f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)) \neq 0$, atunci sistemul de funcții se numește sistem fundamental, iar $f(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k f_k(x)$ este soluția generală a ecuației (soluțiile particulare se obțin din aceasta prin particularizarea corespunzătoare a constantelor C_k, pentru condiții inițiale date).

III. Dacă $\{f_k(x)\}$, $k\in\overline{1,n}$, sînt liniar independente, atunci $D(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ nu poate fi identic nul pe $\{0, 1, 2, \dots\}$; dacă pentru o valoare $x\in\{0, 1, 2, \dots\}$ avem $D(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \neq 0$, atunci și $D(f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)) \neq 0$.

IV. Dacă ecuația este cu coeficienți constanți, atunci se poate determina un sistem fundamental de soluții; se caută o soluție particulară sub forma $f(x)=\lambda^x$, $\lambda>0$. Din condiția de soluție rezultă satisfacerea ecuației caracteristice

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

1°. Să se arate că dacă ecuația caracteristică are rădăcini reale distincte, atunci $\{\lambda_k^x\}$, $k\in\overline{1,n}$, este sistem fundamental.

Soluție. Se constată că pentru $\{f_k(x)=\lambda_k^x\}$ avem

$$D(f_1, f_2, \ldots, f_n)=\begin{vmatrix} \lambda_1^x & \lambda_2^x & \ldots & \lambda_n^x \\ \lambda_1^{x+1} & \lambda_2^{x+1} & \ldots & \lambda_n^{x+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^{x+n-1} & \lambda_2^{x+n-1} & \ldots & \lambda_n^{x+n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}\neq 0,$$

deoarece ultimul este un determinant Vandermonde și $\lambda_j\neq\lambda_k$ pentru $j\neq k$.

2°. Să se afle forma termenului general al *șirului Fibonacci* 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., care satisface $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.

Soluție. Ecuația cu diferențe finite rezultă din relația de recurență, $f(x+2)=f(x+1)+f(x)$ și cunoaștem condițiile inițiale $f(0)=0$, $f(1)=1$ (primii doi termeni ai șirului). Ecuația caracteristică $\lambda^2-\lambda-1=0$ are rădăcinile $\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ cărora le corespund soluțiile $f_1(x)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x$, $f_2(x)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x$. Soluția generală este $f(x)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x$; cu condițiile inițiale date se obține sistemul algebric liniar pentru determinarea constantelor, $C_1+C_2=0, C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$, care are soluția $C_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, C_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

S-a obținut că termenul general al șirului are forma

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

3°. Termenii unui șir $(a_n)_{n\in N}\subset R$ satisfac relația de recurență $a_{n+1}=-2(a_n+2a_{n-1})$; $a_0=1$, $a_1=2$.

1) Să se afle termenul general al șirului în funcție numai de n;

2) Să se afle mulțimea valorilor (termenilor) șirului $b_n=\frac{a_n}{2^{n-1}}$.

Soluție. 1) Ecuației cu diferențe finite, $f(n+2)+2f(n+1)+4f(n)=0$, $n\in N\cup\{0\}$, îi corespunde ecuația caracteristică $\lambda^2+2\lambda+4=0$ cu rădăcinile $\lambda_{1,2}=-1\pm i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Soluțiile particulare sînt complexe, $\varphi_1(n)=2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$, $\varphi_2(n)=2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$; deoarece o combinație liniară a lor este de asemenea soluție, se consideră $f_1(n)=\frac{1}{2}(\varphi_1(n)+$

$+\varphi_2(n))=2^n\cos\frac{2n\pi}{3}$, $f_2(n)=\frac{1}{2i}(\varphi_1(n)-\varphi_2(n))=2^n\sin\frac{2n\pi}{3}$ și soluția generală se exprimă sub formă reală

$$f(n)=2^n\left(C_1\cos\frac{2n\pi}{3}+C_2\sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Condițiile inițiale devin $f(0)=1$, $f(1)=2$ și se determină $C_1=1$, $C_2=\sqrt{3}$; rezultă în final

$$a_n=2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right),\text{ sau }a_n=2^{n-1}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right).$$

2) Se obține $b_n=\sin\left(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$, $n\in N\cup\{0\}$. Din expresia lui b_n rezultă că $(b_n)_{n\in N}$ are cel mult trei valori distincte, corespunzătoare submulțimilor $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_3+1$, $\mathcal{M}_3+2$ din $N\cup\{0\}$: pentru

$$n=3k,\quad b_{3k}=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};$$

$$n=3k+1,\quad b_{3k+1}=\sin\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};$$

$$n=3k+2,\quad b_{3k+2}=\sin\left(2k\pi+\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-1.$$

Deci $b_n\in\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$, $n\in N\cup\{0\}$.

64. Progresii

Fie K un corp comutativ oarecare și $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o submulțime finită din K. Elementele lui A sînt în *progresie* (A este o *progresie*), dacă se satisface relația $a_{k+1}=a_k*r$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, unde $*$ este adunarea sau înmulțirea din K, iar r este un element fixat din K diferit de elementul neutru e în raport cu $*$.

Dacă $*$ este adunarea din K, atunci A se numește *progresie aritmetică*, iar dacă $*$ este înmulțirea din K, atunci A se numește *progresie geometrică*.

Proprietăți

(1) $a_{k+1}*a_{k-1}=a_k*a_k$, $k=2, 3, \ldots, n-1$. Într-adevăr, $a_{k+1}*a_{k-1}=(a_k*r)*(a_k*r^{-1})=a_k*(r*r^{-1})*a_k=a_k*e*a_k=a_k*a_k$, unde r^{-1} este simetricul lui r în raport cu $*$.

(2) $a_k=a_1*\underbrace{r*\ldots*r}_{k-1}$, $k=2, 3, \ldots, n$. Se demonstrează prin recurență.

(3) $a_{k+1}*a_{n-k}=a_1*a_n$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ Într-adevăr $a_{k+1}*a_{n-k}=(\underbrace{a_1*r*\ldots*r}_{k})*(a_n*\underbrace{r^{-1}*\ldots*r^{-1}}_{k})=a_1*(r*\ldots*r*r^{-1}*\ldots*r^{-1})*a_n=$

$=a_1*a_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Precizare. Proprietăţile (1), (2) sau (3) sînt echivalente definiţiei progresiei.

(4) Adunarea definită pe K permite să definim suma termenilor unei progresii: pentru progresia aritmetică $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$, pentru progresia geometrică $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=a_1\frac{1-r^n}{1-r}$.

Fie acum un şir $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ de elemente din K. Şirul B se numeşte *progresie* dacă există $r\in K-\{e\}$ astfel încît $b_{n+1}=b_n*r$, $\forall n\in N$; pentru adunare — progresie aritmetică, e fiind zero; pentru înmulţire — progresie geometrică, e fiind unitatea.

Fie a, b, c trei elemente din K. Se observă că:

(1) a, b, c sînt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice dacă şi numai dacă $a+c=2b$.

(2) a, b, c sînt trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice dacă şi numai dacă $ac=b^2$.

Problemă. Se consideră funcţiile reale

$$x\to\frac{22-7x}{30},\quad x\to\frac{1}{x+1},\quad x\to\frac{x}{x^2+1}.$$

(i) Să se determine valorile lui x pentru care valorile corespunzătoare ale celor trei funcţii sînt termenii consecutivi ai unei progresii.

(ii) Să se determine punctele comune ale graficelor celor trei funcţii.

Soluţie. (i) Numerele $\frac{22-7x}{30}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{x}{x^2+1}$, $x\neq-1$, sînt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice dacă $\frac{22-7x}{30}+\frac{x}{x^2+1}=\frac{2}{x+1}$. Rezultă ecuaţia $7x^4-15x^3+15x^2-45x+38=0$, care are soluţiile reale $x_1=1$, $x_2=2$.

Analog, pentru progresia geometrică se impune

$$\frac{22-7x}{30}\cdot\frac{x}{x^2+1}=\left(\frac{1}{x+1}\right)^2,\quad x\neq-1.$$

Deoarece membrul drept este strict pozitiv, rezultă $0<x<\frac{22}{7}$. Apoi se observă că ecuaţia se transcrie în forma $7x^4-8x^3-7x^2-22x+30=0$. Rezultă $x_1=1$, $x_2\in(1, 2)$ etc.

(ii) Din $\frac{22-7x}{30}=\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x^2+1}$, $x\neq-1$, găsim $x=1$. Deci singurul punct comun celor trei grafice este $\left(1, \frac{1}{2}\right)\subset R^2$.

65. Seria geometrică

Fie $\{x_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ un şir de numere reale. Şirul cu termenul general $s_n=x_0+x_1+\ldots+x_n=\sum_{i=0}^{n}x_i$ se numeşte *serie* asociată şirului x_n şi se notează

prin suma formală $x_0+x_1+\ldots+x_n+\ldots$ sau pe scurt $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Numărul x_n se numeşte *termenul general* al seriei.

Dacă există $\lim_{n\to\infty} s_n=s\in R$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numeşte *convergentă*. Această ipoteză ne permite să redefinim seria ca fiind suma termenilor unui şir de numere reale, deoarece putem conveni să scriem $\sum_{n=0}^{\infty} x_n=s$. Din acest punct de vedere numerele s_n se numesc *sumele parţiale* ale seriei, iar numărul s se numeşte *suma seriei*.

O serie care nu este convergentă se numeşte *divergentă*.

Considerăm acum şirul de numere reale $a, aq, \ldots, aq^n, \ldots$ numit adeseori progresie geometrică infinită. Lui îi ataşăm seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$.

Deoarece

$$s_n=a+aq+\ldots+aq^n=\begin{cases}(n+1)a, & q=1\\ \dfrac{a}{1-q}-\dfrac{aq^{n+1}}{1-q}, & q\neq 1,\end{cases}$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}, & |q|<1\\ \pm\infty, & q\geqslant 1\\ \text{nu există} & q\leqslant -1.\end{cases}$$

Astfel seria geometrică este convergentă pentru $|q|<1$ şi are suma $\frac{a}{1-q}$, iar pentru $|q|\geqslant 1$ seria este divergentă.

Problemă. Fie o progresie geometrică cu o infinitate de termeni, avînd primul termen $a_1=\sqrt{x^2-x}$ şi raţia $q=1-\sqrt[3]{x+1}$.

1) Să se afle suma progresiei $S(x)$ şi să se traseze graficul funcţiei $x\to S(x)$.

2) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $S(x)=1$.

Soluţie. 1) Condiţia de convergenţă pentru seria geometrică, $|q|<1$, implică $-1<1-\sqrt[3]{x+1}<1$, adică $-1<x<7$; pe de altă parte a_1 este real dacă $x^2-x\geqslant 0$, adică $x\in(-\infty, 0]\cup[1, \infty)$.

Se obţine $S(x)=\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x\in(-1, 0]\cup[1, 7)$.

Deoarece $S'(x)=\dfrac{4x^2+5x-3}{6\sqrt{x^2-x}\sqrt[3]{(x+1)^4}}$, pentru $x\in(-1, 0)\cup(1, 7)$ avem următorul tabel de variaţie şi graficul din fig. 125.

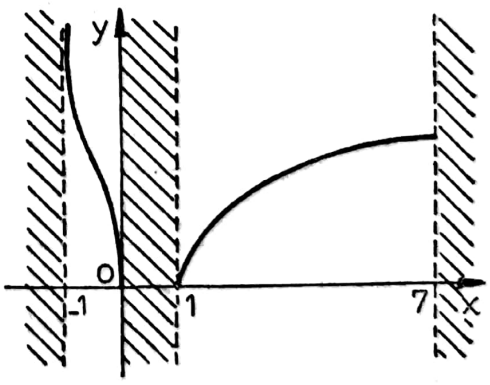


Fig. 125.

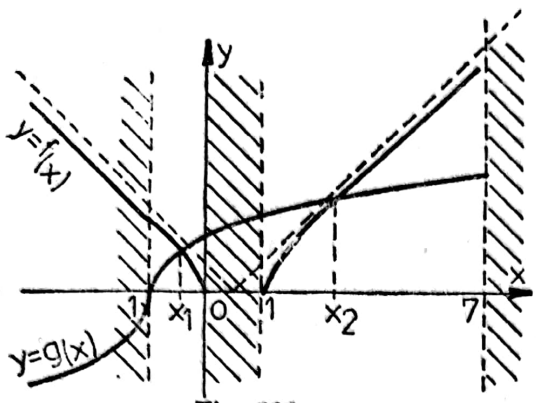


Fig. 126.

x	-1		0	1		7
$S'(x)$	▨	$---$	▨	▨	$+++$	|
$S(x)$	▨ ∞	$\searrow$	0	▨ 0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{42}}{2}$ |

2) Ecuația $S(x)=1$, $x\in(-1, 0]\cup[1, 7)$ devine $\sqrt{x^2-x}=\sqrt[3]{x+1}$. Notăm $f(x)=\sqrt{x^2-x}$, $g(x)=\sqrt[3]{1+x}$ și folosim metoda grafică. Conform fig. 126, ecuația $S(x)=1$ are două rădăcini reale $x_1\in(-1, 0)$, $x_2\in(1, 7)$.

66. Se dă $E_n(x)=\log_{a_0} x+\log_{a_1}x+\ldots+\log_{a_n}x$, unde $a_n=a^{x^n}$.

1) Să se restrîngă $E_n(x)$.

2) Să se determine pentru ce valori ale lui x șirul $(E_n(x))_{n\in N}$ este convergent; în acest caz să se determine funcția limită și apoi să se reprezinte grafic.

Soluție. 1) Cu ipotezele $x>0$, $x\neq 1$, $a>0$, $a\neq 1$ rezultă

$$E_n(x)=\frac{1}{\log_x a}+\frac{1}{x\log_{x^2}a}+\frac{1}{x^3\log_{x^3}a}+\ldots+\frac{1}{x^n\log_{x^n}a}=$$

$$=\frac{x^{n+1}-1}{x^n(x-1)}\cdot\log_a x,$$

restrînsă ca sumă a unei progresii geometrice.

2) Pentru $0<\frac{1}{x}<1$, adică $x\in(1, \infty)$ rezultă că

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} E_n(x)=\frac{x}{x-1}\log_a x.$$

Se reprezintă grafic $f(x)=\frac{x\ln x}{(x-1)\ln a}$, $x\in(1, \infty)$.

Urmează tabelul de variație și graficul (fig. 127):

x	1		∞
$f'(x)$	$\frac{1}{2\ln a}$	$+++$	
$f(x)$	$\frac{1}{\ln a}$	$\nearrow$	∞

$(a>1)$;

x	1		∞
$f'(x)$	$\frac{1}{2\ln a}$	$---$	
$f(x)$	$\frac{1}{\ln a}$	$\searrow$	$-\infty$

$(0<a<1)$

$f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2\ln a}(-\ln x+x-1)$; observăm că $-\ln x+x-1>0$ pentru $x\in(1, \infty)$

(spre exemplu, rezolvare grafică). Apoi $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{\ln a}\cdot(\infty)$, $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{\ln a}$, $\lim_{x\to 1} f'(x) = \frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 1}\frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)} = \frac{1}{2\ln a}$.

Rezultă o familie de curbe, în funcție de parametrul a.

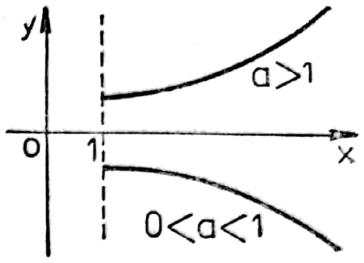


Fig. 127.

67. Limita unei funcții compuse

Fie $f: S\to T$ și $g: T\to F$, unde S, T, F sînt submulțimi de numere reale. Dacă a este un punct de acumulare pentru S și $\lim_{x\to a} f(x)=b$, iar b este un punct de acumulare pentru T și $\lim_{y\to b} g(y)=c$, atunci $\lim_{x\to a} g(f(x))=c$ sau $\lim_{x\to a} g(f(x))=g(b)$ sau $\lim_{x\to a} g(f(x))$ nu există.

(P. Ramankutty și M. K. Vamanamurthy, The Amer. Math Monthly, vol. 82 (1975), p. 63)

Într-adevăr, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\gamma>0$ și $\delta>0$ astfel încît $|g(y)-c|<\varepsilon$ ori de cîte ori $0<|y-b|<\gamma$ și $|f(x)-b|<\gamma$ ori de cîte ori $0<|x-a|<\delta$.

(1) Presupunem că există o vecinătate V a lui a astfel încît $f(x)\neq b$, $\forall x\in V-\{a\}$. Alegînd pe δ astfel încît $(a-\delta, a+\delta)\subset V$, avem $0<|f(x)-b|<\gamma$, ori de cîte ori $0<|x-a|<\delta$. Aceasta arată că $\lim_{x\to a} g(f(x))=c$.

(2) Dacă ipoteza din (1) este falsă, atunci pentru fiecare vecinătate V a lui a există $x\in V-\{a\}$ astfel încît $f(x)=b$ și deci $g(f(x))=g(b)$. De aceea, dacă există $\lim_{x\to a} g(f(x))$, atunci această limită trebuie să fie $g(b)$.

Exemplu. Fie $E: R\to R$ dată prin $E(x)=[x]$ și $g: R\to R$ dată prin $g(y)=\begin{cases}1, & y=0.\\ 0, & y\neq 0\end{cases}$. Luînd $a=\frac{1}{2}$ găsim $\lim_{x\to\frac{1}{2}} E(x)=0$. Apoi avem $b=0$ și $\lim_{y\to 0} g(y)=0$. Pe de altă parte

$$g(E(x))=\begin{cases}1, & E(x)=0\\ 0, & E(x)\neq 0\end{cases}$$

și deci $\lim_{x\to\frac{1}{2}} g(E(x))=g(0)=1$.

(3) Cazul trei se dovedește prin exemplul următor. Fie $f: R\to R$ dată prin $f(x)=\begin{cases}x, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$ și $g: R\to R$ dată prin $g(y)=\begin{cases}1, & y=0\\ 0, & y\neq 0\end{cases}$. Luăm $a=0$ și observăm că $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. Apoi $b=0$ și $\lim_{y\to 0} g(y)=0$. Dar $g(f(x))=\begin{cases}1, & f(x)=0\\ 0, & f(x)\neq 0\end{cases}=$

$=\begin{cases}1, & x\notin Q\\ 0, & x\in Q\end{cases}$ și deci $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in Q}} g(f(x))=0$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\notin Q}} g(f(x))=1$, adică $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ nu există.

68. Fie $f(x)=(|\sin\alpha|^x+|\cos\alpha|^x)^{\frac{1}{x}}$, $x>0$, $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Să se determine x_0 astfel încît

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } \alpha\in\left\{-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\}\\ |\cos\alpha|, & \text{dacă } \alpha\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\\ |\sin\alpha|, & \text{dacă } \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Soluţie. Se observă că funcţia $f:(0,\infty)\to R$ este continuă. De aceea pentru $x_0\in(0,\infty)$ avem $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Dacă $\alpha\in\left\{-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}\right\}$, atunci orice punct $x_0\in(0,\infty)$ satisface ecuaţia $f(x_0)=1$. Dacă $\alpha\in\left\{-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\}$ atunci ecuaţia $f(x_0)=1$ are soluţia $x_0=2$. Dacă $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ atunci ecuaţia $f(x_0)=|\sin\alpha|$ este o imposibilitate; analog dacă $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ ecuaţia $f(x_0)=|\cos\alpha|$ este o imposibilitate.

Pentru $x_0=0$ şi $\alpha\in\left\{-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}\right\}$, adică $f(x)=1$, avem $\lim_{x\to 0} f(x)=1$; pentru $x_0=0$ şi $\alpha\in\left\{-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\}$ adică $f(x)=\frac{2^{1/x}}{\sqrt{2}}$, găsim $\lim_{x\searrow 0} f(x)=\infty$; analog pentru $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ se deduce $\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$.

Pentru $x_0=\infty$ şi $\alpha\in\left\{-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}\right\}$, adică $f(x)=1$, avem $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$; pentru $x_0=\infty$ şi $\alpha\in\left\{-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\}$, adică $f(x)=\frac{2^{1/x}}{\sqrt{2}}$ găsim $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 1$; pentru $x_0=\infty$ şi $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, adică $|\cos\alpha|>|\sin\alpha|$, deducem $\lim_{x\to\infty} f(x)=$

$$=|\cos\alpha|\lim_{x\to\infty}(1+|\operatorname{tg}\alpha|^x)^{\frac{1}{x}}=|\cos\alpha|\lim_{x\to\infty}\left((1+|\operatorname{tg}\alpha|^x)^{\frac{1}{|\operatorname{tg}\alpha|^x}}\right)^{\frac{|\operatorname{tg}\alpha|^x}{x}}=|\cos\alpha|;$$

analog pentru $x_0=\infty$ şi $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ obţinem $\lim_{x\to\infty} f(x)=|\sin\alpha|$.

În concluzie: dacă $\alpha\in\left\{-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}\right\}$, atunci $x_0\in[0,\infty]$; dacă $\alpha\in\left\{-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\}$, atunci $x_0=2$; dacă $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, avem $x_0=\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

69. Funcţii unimodale

Fie I un interval deschis inclus într-o mulţime de numere reale S. O funcţie $f: S \to R$ se numeşte *unimodală* pe I dacă f/I are un singur punct de extrem (minim sau maxim). Aceasta înseamnă că o asemenea funcţie este caracterizată prin faptul că fiind date două valori ale variabilei $x_1 < x_2$ din I, situate de aceeaşi parte a punctului de extrem x, cea care se găseşte mai aproape de x furnizează o valoare mai „bună" pentru funcţie. Această caracteristică permite ca prin evaluări ale funcţiei să micşorăm succesiv intervalul I, numit *interval de incertitudine*, pînă obţinem o încadrare convenabilă a punctului de extrem.

Să ne ocupăm acum în mod special de probleme de minim. În acest caz „valoarea cea mai bună" înseamnă valoarea cea mai mică. De aceea avem implicaţiile

$$x_1 < x_2 < x_{min} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1),$$

$$x_{min} < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Fie $I=(0, 1)$ şi $x_1 < x_2$ două puncte din acest interval. Presupunem că f are un singur minim pe I. Dacă $f(x_1) < f(x_2)$, atunci punctul de minim nu se poate găsi la dreapta lui x_2. De aceea $[x_2, 1)$ se poate elimina (fig. 128 a) şi astfel găsim un interval de incertitudine mai mic. Dacă $f(x_1) > f(x_2)$, atunci punctul de minim nu poate fi la stînga lui x_1 şi deci $(0, x_1]$ se poate elimina (fig. 128 b). Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci intervalele $(0, x_1]$ şi $[x_2, 1)$ pot fi eliminate (fig. 128 c). Pentru calcule se preferă alegerea punctelor astfel încît intervalul redus să conţină unul din punctele iniţiale.

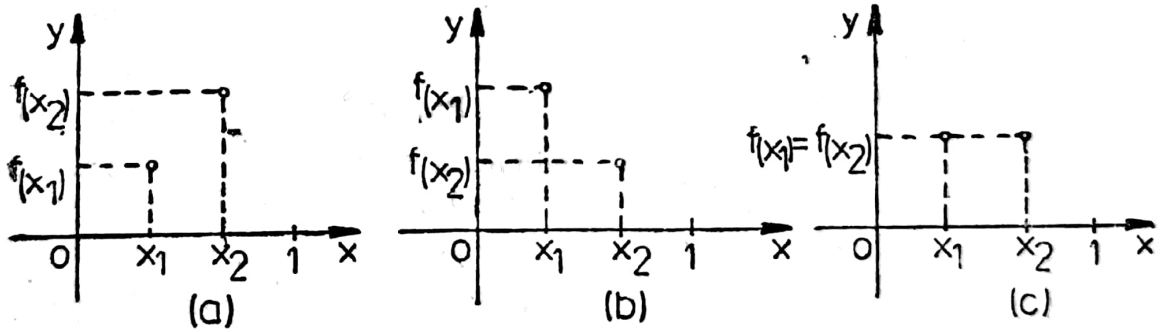


Fig. 128.

Să presupunem că avem o problemă de minim şi că pentru depistarea punctului de minim se impune să cercetăm valorile lui f în n puncte din intervalul iniţial de incertitudine $I = (0, x_0)$. Definim $h = \frac{a_{n-1}}{a_n} x_0$, unde $\{a_n\}$ este şirul Fibonacci $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$, adică şirul definit prin $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$; apoi punem $x_1 = h$, $x_2 = x_0 - h$. Pe baza ipotezei de unimodalitate se elimină o parte a intervalului $(0, x_0)$. Rămîne un interval mai scurt, avînd în interior unul din punctele x_1 sau x_2 situat la o anumită distanţă faţă de una din extremităţile intervalului. Se plasează un nou punct la aceeaşi distanţă de celălalt capăt şi iarăşi eliminăm o parte

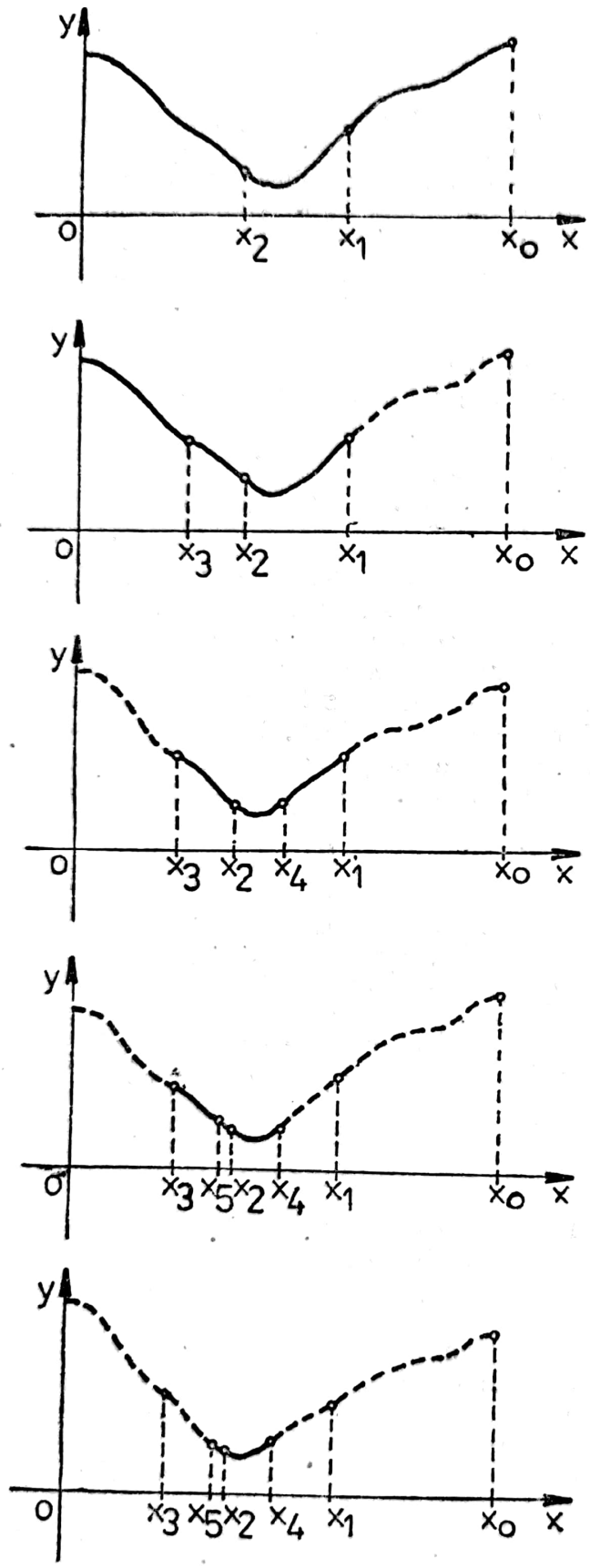


Fig. 129.

din interval. Procedeul se repetă pînă cînd controlăm n puncte stabilite după regula de mai sus. Dacă (în final) avem suprapunere de puncte, atunci se efectuează mici deplasări.

Procedeul precedent numit *metoda Fibonacci* conduce la un interval final de incertitudine cît mai mic posibil (minimizează maximul intervalului de incertitudine) și nu depinde de funcția f.

Exemplu. Utilizînd tehnica Fibonacci să se restrîngă intervalul în care este cuprins punctul de minim al funcției $f:(0, x_0)\to R$ definită prin graficul din fig. 129.

Soluție. Ne propunem să utilizăm 5 puncte din $(0, x_0)$. În acest caz $h=\frac{a_4}{a_5}x_0=\frac{5}{8}x_0$. Punem $x_1=\frac{5}{8}x_0$ și $x_2=x_0-\frac{5}{8}x_0=\frac{3}{8}x_0$; se elimină $[x_1, x_0)$ și rămîne $(0, x_1]$ care conține pe x_2. Luăm $x_3=0+(x_1-x_2)=\frac{2}{8}x_0$; eliminăm pe $(0, x_3]$ și rămîne (x_3, x_1) care conține pe x_2. Punem $x_4=x_1-(x_2-x_3)=\frac{4}{8}x_0$; eliminăm pe $[x_4, x_1)$ și rămîne (x_3, x_4) care conține pe x_2. Luăm $x_5=x_4-(x_2-x_3)=\frac{3}{8}x_0\equiv x_2$; de aceea mutăm pe x_5 la stînga lui x_2, eliminăm pe $(x_3, x_5]\cup[x_5, x_2)$ și rămîne intervalul final de incertitudine (x_2, x_4).

Evident metoda Fibonacci este propice pentru o funcție cu proprietăți neprecizate pe mulțimea de definiție, abordabilă prin metode numerice.

70. 1) Fie f un polinom real care are cel mult gradul n. Să se arate că dacă există $C>0$ și $a>0$ astfel încît $|f(x)|\leqslant C|x|^{n+1}$, $\forall x\in[-a, a]$, atunci $f=0$.

2) Fie g, h două polinoame care au cel mult gradul n. Să se arate că ipotezele $C>0$, $|g(x)-h(x)| \leqslant C|x|^{n+1}$, $\forall x \in [-a, a]$ implică $g=h$.

Soluție. 1) Deoarece $0 \leqslant |f(x)| \leqslant C|x|^{n+1}$, prin trecere la limită pentru $x \to 0$, găsim $\lim |f(x)| = 0$. Cum însă f este o funcție continuă, rezultă $0 = \lim |f(x)| = |f(0)|$, adică $f(0)=0$. De aceea există un polinom f_1 care are cel mult gradul n astfel încît $f(x)=xf_1(x)$. Cu aceasta inegalitatea din enunț se reduce la $0 \leqslant |f_1(x)| \leqslant C|x|^n$.

Repetînd raționamentul precedent ajungem la concluzia că $x=0$ este o rădăcină multiplă de ordinul $n+1$ pentru polinomul f. De aceea $f=0$.

2) Afirmația poate fi privită ca o consecință a lui 1).

71. Prelungirea prin continuitate a unei funcții

I. Fie E o submulțime a mulțimii numerelor reale R. Fie $f: E \to R$ o funcție reală, $U_{f(x_0)}$ o vecinătate a lui $f(x_0)$, iar V_{x_0} o vecinătate a lui x_0. Funcția f se numește continuă în $x_0 \in E$ dacă $\forall U_{f(x_0)}$, $\exists V x_0$ încît $\forall x \in V_{x_0} \Rightarrow f(x) \in U_{f(x_0)}$. Dacă f este continuă pentru orice $x \in E$ se spune că f este continuă pe E.

Uneori se acceptă numai definiția continuității într-un punct de acumulare din E: f este continuă în $x_0 \in E$ dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. În aceste cazuri se pierde din vedere faptul că funcțiile sînt continue în orice punct izolat al domeniului lor de definiție.

Exemplu. Să se studieze continuitatea funcției

$$x \to f(x) = \arcsin x - \sqrt{x^2-1}.$$

Evident, $f: \{-1, 1\} \to \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ și f este continuă pe domeniul său de definiție format din două puncte izolate.

II. Fie E o submulțime a mulțimii numerelor reale R. Presupunem că avem o funcție $f: E \to R$, iar a este un punct de acumulare al lui E care nu face parte din E. Dacă $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, atunci lui f putem să-i atașăm funcția $f^*: E \cup \{a\} \to R$ definită prin

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ l & x = a. \end{cases}$$

Din unicitatea limitei rezultă ușor că f^* este unică. Funcția f^* este continuă în punctul $x=a$ și de aceea se numește *prelungirea prin continuitate a lui* f.

Evident mulțimea soluțiilor ecuației $f(x)=l$ este inclusă în mulțimea soluțiilor ecuației $f^*(x)=l$.

Exemplu. Fie $f: (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to R$ funcția definită prin $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, prelungirea prin continuitate a lui f este $f^*: R \to R$ dată prin

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea observăm că ecuația $f(x)=1$ nu are soluții, pe cînd $f^*(x)=1$ are soluția $x=0$.

72. Fie f și g două funcții reale derivabile pe intervalul deschis I care satisfac $f^2+g^2=1$ și pentru care există un număr θ_0 astfel încît $f(0)=\cos\theta_0$, $g(0)=\sin\theta_0$. Dacă θ este funcția definită prin

$$\theta(t)=\theta_0+\int_0^t (fg'-f'g)\,dt,$$

atunci să se arate că $f=\cos\theta$, $g=\sin\theta$.

Soluție. Fie $u=f\cdot\cos\theta+g\cdot\sin\theta$. Evident această funcție este derivabilă pe I și $u'=f'\cos\theta+f\cdot(\cos\theta)'+g'\cdot\sin\theta+g\cdot(\sin\theta)'=f'\cos\theta-f\theta'\sin\theta+g'\sin\theta+g\theta'\cos\theta$. Deoarece $\theta'=fg'-f'g$ și derivînd pe $f^2+g^2=1$ găsim $ff'+gg'=0$, rezultă $u'=0$ pe intervalul I. De aceea $u=c$ (const.). Pentru determinarea constantei înlocuim pe θ cu θ_0. Rezultă $c=f(0)\cos\theta_0+g(0)\sin\theta_0=\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0=1$. Deci $f\cos\theta+g\sin\theta=1$ pe I. Aceasta împreună cu $f^2+g^2=1$, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ implică $(f-\cos\theta)^2+(g-\sin\theta)^2=0$ și deci $f=\cos\theta$, $g=\sin\theta$ pe I.

73. O funcție $f:[a,\ b]\to R$ se numește **lipschitziană** dacă $\exists k>0$ astfel încît

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|,\quad \forall x,\ y\in[a,\ b].$$

1) Să se arate că dacă f are derivată mărginită pe $[a,\ b]$, atunci ea este o funcție lipschitziană.

2) Să se arate că $f:[0,\ 1]\to R$ dată prin

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

este derivabilă pe $[0,\ 1]$ dar nu este lipschitziană.

Soluție. 1) Conform teoremei lui Lagrange $f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)$. Dar prin ipoteză $|f'(x)|\leqslant k$, $\forall x\in[a,\ b]$. De aceea $|(f(x)-f(y)|\leqslant k\,|x-y|$

2) Evident f este derivabilă pe $(0,\ 1)$. Apoi

$$f'_{dr}(0)=\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{x^2\sin e^{\frac{1}{x}}}{x}=0,$$

$$f'(x)=2x\sin e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}\cos e^{\frac{1}{x}},\quad x\in(0,\ 1),$$

$$f'_{st}(1)=\lim_{x\uparrow 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\uparrow 1}\frac{x^2\sin e^{\frac{1}{x}}-\sin e}{x-1}=2\sin e-e\cos e.$$

Se observă că f' nu este continuă la dreapta în $x=0$.

Pentru a demonstra că f nu este lipschitziană pe $[0,\ 1]$ se poate proceda prin reducere la absurd.

74. Funcţii cu punct fix

Fie E o mulţime de numere reale şi $f: E \to E$ o funcţie. Spunem că $x_0 \in E$ este un *punct fix al lui* f dacă $f(x_0)=x_0$. Evident f: $E \to E$ are cel puţin un punct fix dacă şi numai dacă graficul său $G(f)=\{(x, f(x)) | x \in E\}$ se intersectează cu prima bisectoare $B=\{(x, y) | x=y\}$ cel puţin într-un punct.

Exemple. 1) Considerăm funcţia identitate definită prin $f(x)=x$, $x \in R$. Orice punct din R este un punct fix al acestei funcţii.

2) Funcţia afină definită prin $f(x)=ax+b$, $x \in R$, $b \neq 0$, are un punct fix dacă şi numai dacă $a \neq 1$. Într-adevăr în acest caz ecuaţia $x=ax+b$ are soluţia unică $x=\frac{b}{1-a}$.

3) Trinomul $f(x)=ax^2+bx+c$, $x \in R$ are cel puţin un punct fix dacă şi numai dacă $(b-1)^2-4ac \geqslant 0$. Acest lucru rezultă din existenţa soluţiilor reale ale ecuaţiei $x=ax^2+bx+c$.

4) Funcţia omografică definită prin $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, $x \in R-\{-d/c\}$ are cel puţin un punct fix dacă şi numai dacă $(d-a)^2+4cb \geqslant 0$, adică dacă şi numai dacă ecuaţia $x=\frac{ax+b}{cx+d}$ admite soluţii reale.

5) Funcţiile sin şi cos au respectiv cîte un singur punct fix; tg şi ctg au respectiv o infinitate de puncte fixe.

75. Fie $f: (0, \infty) \to R$ definită prin $f(x)=x^x$.

1) Să se cerceteze variaţia şi să se determine punctele fixe ale funcţiei f.

2) Să se verifice că restricţia lui f la $\left[\frac{1}{e}, \infty\right]$ este inversabilă, iar dacă g este inversa, atunci $g(y)=\frac{\ln y}{\ln \ln y}\psi(y)$, unde $\lim_{y \to \infty} \psi(y)=1$.

Soluţie. 1) Evident f este derivabilă şi $f'(x)=x^x(1+\ln x)$. Se constată că $f'(x)=0$ implică $x=\frac{1}{e}$. Deoarece $f'(x)<0$ pentru $x<\frac{1}{e}$ şi $f'(x)>0$ pentru $x>\frac{1}{e}$, punctul $x=\frac{1}{e}$ este un punct de minim.

Tabelul de variaţie a lui f este

x	0		$1/e$		∞
$f'(x)$	$-\ -\ -$		0		$+\ +\ +$
$f(x)$	1	$\searrow$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$	$\nearrow$	∞

Ecuaţia $x^x=x$, $x \in (0, \infty)$, are soluţia unică $x=1 \in (0, \infty)$. *Altfel*: deoarece f este convexă pe $(0, \infty)$, iar $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}>\frac{1}{e}$, rezultă că f nu are punct fix pe $\left(0, \frac{1}{e}\right]$; cum $f'(1)=1$, înseamnă că $y=x$ este tangentă la $G(f)$. Din definiţia funcţiei convexe pe un interval (*vezi* probl. 98) rezultă că singurul punct fix este $(1, 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Se observă că restricția lui f la $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$ este strict crescătoare și deci injectivă. De aceea există $g : \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \infty\right) \to \left[\frac{1}{e}, \infty\right)$.

Din $y = x^x$ deducem $\ln y = x \ln x$, $\ln \ln y = \ln x + \ln \ln x$ și deci $x = \frac{\ln y}{\ln \ln y} \cdot \frac{\ln x + \ln \ln x}{\ln x}$. Se observă că $\psi(y) = \frac{\ln x(y) + \ln \ln x(y)}{\ln x(y)}$ și deci $\lim_{y \to \infty} \psi(y) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x + \ln \ln x}{\ln x} = 1$. (Se aplică regula lui l'Hospital.)

76. Să se arate că funcția $f : R \to R$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}$$

admite pe R derivate continue de orice ordin.

Soluție. Vom utiliza metoda inducției complete.

Mai întîi vom privi funcția f ca fiind derivata sa de ordinul zero. Apoi determinăm derivata de ordinul întîi. Deoarece

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{0}{x} = 0, \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0,$$

avem

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Observînd forma derivatelor de ordinul zero și unu, presupunem că derivata de ordinul n este

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \end{cases}$$

unde P_n este un polinom în variabila $\frac{1}{x}$. Să arătăm că și $f^{(n+1)}(x)$ există și are aceeași formă. Prin derivare directă avem

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

Pentru a găsi pe $f^{(n+1)}(0)$ utilizăm faptul că $\lim_{x \downarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^k} = 0$, $\forall k \in N$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=0,$$

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\uparrow 0}\frac{0}{x}=0.$$

Astfel $f^{(n+1)}(0)=0$.

Rezultă că f admite derivate de orice ordin, continue pe R.

77. 1) Fie a, b, c trei numere strict pozitive și $\alpha=min\{a, b, c\}$. Să se studieze variația funcției $x\to f(x)=\left(\frac{a}{x}-1\right)\left(\frac{b}{x}-1\right)\left(\frac{c}{x}-1\right)$, $x\in(-\infty, 0)\cup(0, \alpha)$.

2) **Aplicație.** Să se arate că există un singur punct D în planul triunghiului orientat ABC așa ca $\overline{BA_1}=\overline{CB_1}=\overline{AC_1}=x$, unde $\{A_1\}=AD\cap BC$, $\{B_1\}=BD\cap CA$ și $\{C_1\}=CD\cap AB$.

Soluție. 1) Fără a scădea generalitatea putem presupune că $a\leqslant b\leqslant c$ și deci $\alpha=a$. Avem

$$f'(x)=-\frac{a}{x^2}\left(\frac{b}{x}-1\right)\left(\frac{c}{x}-1\right)-\frac{b}{x^2}\left(\frac{a}{x}-1\right)\left(\frac{c}{x}-1\right)-\frac{c}{x^2}\left(\frac{a}{x}-1\right)\left(\frac{b}{x}-1\right).$$

Pentru $x<0$, avem $\frac{a}{x}, \frac{b}{x}, \frac{c}{x}<0$. Rezultă $f'(x)<0$ și deci f descrește (strict) de la $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$ la $\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

Pentru $0<x<a$, avem $\frac{a}{x}-1$, $\frac{b}{x}-1$, $\frac{c}{x}-1>0$. Rezultă $f'(x)<0$ și deci f descrește (strict) de la ∞ la $\lim_{x\to a}f(x)=0$.

2) Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC. Evident putem presupune că $a\leqslant b\leqslant c$. Din teorema lui Ceva găsim

$$1=\frac{a-x}{x}\cdot\frac{b-x}{x}\cdot\frac{c-x}{x}=f(x).$$

Deoarece restricția $f:(0, a)\to(0, \infty)$ este bijectivă, ecuația $f(x)=1$ are o singură soluție $x\in(0, a)$, adică afirmația din problemă este adevărată.

În final observăm că ipoteza $\overline{CA_1}=\overline{BC_1}=\overline{AB_1}=x$ determină unic un alt punct E. Punctele D și E coincid numai pentru triunghiul echilateral.

78. Fie funcția $f:R\to R$ dată prin

$$f(x)=\begin{cases}\left(x-\frac{1}{n+1}\right)^2\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\sin\frac{1}{x-\frac{1}{n+1}}, & x\in\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), n\in N\\ 0, & \text{în rest.}\end{cases}$$

1) Să se arate că f este derivabilă.
2) Să se cerceteze continuitatea lui f'.
3) Să se găsească $f''(0)$.

Soluție. Restricțiile lui f respectiv la $(-\infty, 0)$, $(0, 1)-\left\{\frac{1}{n},\ n=2, 3, \ldots\right\}$, $(1, \infty)$ sînt funcții elementare derivabile. Pe de altă parte avem

$$f'_{st}(0)=0,\ f'_{dr}(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\left(x-\frac{1}{n+1}\right)^2\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\sin\frac{1}{x-\frac{1}{n+1}}}{x}=0$$

deoarece $x\to 0$ implică $\frac{1}{n+1}\to 0$.

Analog $f'_{st}\left(\frac{1}{n}\right)=f'_{dr}\left(\frac{1}{n}\right)=0$, $n=1, 2, \ldots$

Astfel găsim

$$f'(x)=\begin{cases}\varphi(x;\ n), & x\in\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right),\ n\in N\\ 0, & \text{în rest,}\end{cases}$$

unde

$$\varphi(x;\ n)=2\left(x-\frac{1}{n+1}\right)\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\sin\frac{1}{x-\frac{1}{n+1}}+2\left(x-\frac{1}{n+1}\right)^2\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{1}{x-\frac{1}{n+1}}-\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\cos\frac{1}{x-\frac{1}{n+1}},\ x\in\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), n\in N.$$

2) Funcția f' este discontinuă în fiecare punct de forma $\frac{1}{n}$. Într-adevăr

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x<\frac{1}{n}}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x<\frac{1}{n}}}\varphi(x;\ n)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x<\frac{1}{n}}}\left[2\left(x-\frac{1}{n+1}\right)\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\sin\frac{1}{x-\frac{1}{n+1}}+\right.$$

$$\left.+2\left(x-\frac{1}{n+1}\right)^2\left(x-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{x-\frac{1}{n+1}}-\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\cos\frac{1}{x-\frac{1}{n+1}}\right]=0=f'\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x>\frac{1}{n}}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x>\frac{1}{n}}}\varphi(x;\ n)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x>\frac{1}{n}}}\left[2\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{1}{n-1}\right)^2\sin\frac{1}{x-\frac{1}{n}}+\right.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+2\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\left(x-\frac{1}{n-1}\right)^2\sin\frac{1}{x-\frac{1}{n}}-\left(x-\frac{1}{n-1}\right)^2\cos\frac{1}{x-\frac{1}{n}}\Bigg]=$$

$$=-\lim_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x>\frac{1}{n}}}\left(x-\frac{1}{n-1}\right)^2\cos\frac{1}{x-\frac{1}{n}}\to\text{nu există.}$$

3) Avem

$$f''_{st}(0)=\lim_{\substack{x\to0\\ x<0}}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=0,\quad f''_{dr}(0)=\lim_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x>0\\ x\to0}}\frac{\varphi(x;n)}{x}=0.\quad\text{Deci } f''(0)=0.$$

79. Prelungirea firească a unei funcţii

Fie $f:T\to R$ o funcţie reală elementară, unde T este domeniul maxim de definiţie. Fie S o submulţime a lui T şi f/S restricţia lui $f:T\to R$ la S. Funcţia $f:T\to R$ se numeşte *prelungirea firească* a lui f/S.

Exemple. 1) Considerăm şirul cu termenul general $x_n=\frac{n-1}{5n+1}\sqrt{n}+\frac{4n-1}{5n}$. Aceasta este o funcţie definită pe N şi cu valori în R. Extensia firească a acestei funcţii este funcţia $f:(0,\infty)\to R$ dată prin $f(x)=\frac{x-1}{5n-1}\sqrt{x}+\frac{4x-1}{5x}$.

2) Considerăm funcţiile $n\to f_\alpha(n)=\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^{\alpha-1}}$, $n\in N$, $\alpha\in R$. Dacă $\alpha\in N-\{1\}$, atunci prelungirile fireşti sînt $f_\alpha:(-\infty,0)\cup(0,\infty)\to R$ definite prin $f_\alpha(x)=\frac{(x+1)^\alpha-x^\alpha}{x^{\alpha-1}}$; dacă $\alpha=0$, atunci prelungirea firească este funcţia identic nulă pe R; dacă $\alpha=1$, atunci prelungirea firească este $f_1:R\to R$ definită prin $f_1(x)=1$; dacă $\alpha<0$, $\alpha\in Z$, atunci prelungirile fireşti sînt $f:(0,\infty)\to R$ definite prin $f_\alpha(x)=\frac{(x+1)^\alpha-x^\alpha}{x^{\alpha-1}}$; etc.

80. Fie şirul cu termenul general $x_n(\alpha)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$, $n\in N$, α fiind un parametru real.

1) Să se găsească $\lim_{n\to\infty}x_n(\alpha)$.

2) Să se determine $a<b$ astfel încît şirul $\{x_n(\alpha)\}$ să fie monoton crescător pentru $\alpha\in(-\infty,a]$ şi monoton descrescător pentru $\alpha\in[b,\infty)$.

3) Ce putem spune despre variaţia lui $\{x_n(\alpha)\}$ pentru $\alpha\in(a,b)$?

(F. A. Butter, Amer. Math. Monthly, 83, nr. 7. 1976)

Soluţie. 1) Evident $\lim_{n\to\infty}x_n(\alpha)=e$, $\forall\alpha\in R$.

2)–3) Considerăm acum restricţia la $x\geqslant1$ a extensiei fireşti a lui $n\to x_n(\alpha)$. Această funcţie $f_\alpha:[1,\infty)\to R$ este definită prin $f_\alpha(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$. Un calcul

direct arată că (1) $(x^2+x)f'_\alpha(x)=f_\alpha(x)(g(x)-\alpha)$, unde $g(x)=(x^2+x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x$. Dar $g'(x)=(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-2>0$ și deci $g:[1,\infty)\to R$ este strict crescătoare de la $g(1)=\ln 4-1$ la $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\frac{1}{2}$. Astfel din (1) rezultă: dacă $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$, atunci f_α este strict descrescătoare; dacă $\alpha\leqslant g(1)$, atunci f_α este strict crescătoare; dacă $g(1)<\alpha<\frac{1}{2}$, atunci f_α este strict descrescătoare pe $[1, x_0(\alpha)]$ și strict crescătoare pe $[x_0(\alpha), \infty)$, unde $x_0(\alpha)$ este soluția unică a ecuației $g(x)=\alpha$ în $x>1$.

Deoarece $x_n(\alpha)=f_\alpha(n)$, găsim: șirul $\{x_n(\alpha)\}$ este strict descrescător dacă $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$; șirul $\{x_n(\alpha)\}$ este strict crescător dacă $\alpha<a$, unde a este soluția ecuației $2^{1+\alpha}=f_\alpha(1)=f_\alpha(2)=\left(\frac{3}{2}\right)^{2+\alpha}$, adică $a=\frac{\ln 9-\ln 8}{\ln 4-\ln 3}$; dacă $a\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$, atunci există un indice $k\geqslant 2$ (depinzînd de α) așa ca $x_n(\alpha)<x_{n+1}(\alpha)$ pentru $1\leqslant n\leqslant k-2$, $x_{k-1}(\alpha)\geqslant x_k(\alpha)$ și $x_n(\alpha)<x_{n+1}(\alpha)$ pentru $n\geqslant k$. De exemplu, dacă $\alpha=a$, atunci $k=2$ și avem $x_1(a)=x_2(a)<x_3(a)<\ldots$

31. *Formula lui Leibniz*

Fie I un interval și $u, v: I\to R$ două funcții derivabile de m ori. În această ipoteză produsul uv este o funcție derivabilă de m ori și are loc egalitatea:

$$(uv)^{(m)}=\sum_{i=0}^{m} C_m^i u^{(m-i)}v^{(i)}=u^{(m)}v+C_m^1 u^{(m-1)}v'+\ldots+uv^{(m)},$$

numită formula lui Leibniz.

Această formulă se poate demonstra prin recurență. Într-adevăr pentru $m=1$ avem $(uv)'=u'v+uv'$, adică relația este adevărată. Să presupunem acum că $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)}v^{(i)}$ și să arătăm că aceasta implică $(uv)^{(n+1)}=$ $=\sum\limits_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i u^{(n+1-i)}v^{(i)}$. Acest fapt rezultă din șirul de egalități $(uv)^{(n+1)}=[(uv)^{(n)}]'=$ $=\left[\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)}v^{(i)}\right]'=\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i[u^{(n-i+1)}v^{(i)}+u^{(n-i)}v^{(i+1)}]=\sum\limits_{i=0}^{n} u^{(n-i)}v^{(i+1)}(C_n^{i+1}+C_n^i)+$ $+C_n^0 u^{(n+1)}v^{(0)}=\sum\limits_{i=0}^{n} C_{n+1}^{i+1} u^{(n-i)}v^{(i+1)}+C_{n+1}^0 u^{(n+1)}v^{(u)}=\sum\limits_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i u^{(n+1-i)}v^{(i)}$. De aceea formula este adevărată pentru orice $n\in\{1, 2, \ldots, m\}$.

Aplicație. Fie f o funcție reală, indefinit derivabilă, care satisface

$$(-1)^k f^{(k)}\geqslant 0,\ k=0, 1, 2, \ldots$$

Să se arate că funcția g dată prin

$$g(x)=\frac{a+b f(x)}{x^\alpha},\ x>0,\ a\geqslant 0,\ \alpha\geqslant 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

are proprietățile $(-1)^k g^{(k)}(x) \geqslant 0$, pentru $b \geqslant 0$ sau $(-1)^k g^{(k)}(x) \leqslant 0$, pentru $b<0$ și $f(x) \geqslant \frac{-a}{b}$.

Soluție. Avem .

$$g^{(k)}(x)=a\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{(k)}+b\left(\frac{f(x)}{x^\alpha}\right)^{(k)}.$$

Prin recurență deducem că

$$(x^{-\alpha})^{(k)}=(-\alpha)(-\alpha-1)\ldots(-\alpha-k+1)x^{-\alpha-k}=$$
$$=(-1)^k\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)x^{-\alpha-k}.$$

Aplicînd formula lui Leibniz, pentru al doilea termen găsim

$$g^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)a}{x^{\alpha+k}}+\left[f^{(k)}(x)\frac{1}{x^\alpha}+\right.$$
$$+\ldots+C_k^p f^{(k-p)}(x)\frac{(-1)^p\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{x^{\alpha+p}}+$$
$$\left.+\ldots+f(x)\frac{(-1)^k\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{x^{\alpha+k}}\right]b.$$

Rezultă

$$(-1)^k g^{(k)}(x)=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)a}{x^{\alpha+k}}+\left[(-1)^k f^{(k)}(x)\frac{1}{x^\alpha}+\right.$$
$$+\ldots+C_k^p(-1)^{k-p}f^{(k-p)}(x)\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{x^{\alpha+p}}+$$
$$\left.+\ldots+f(x)\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{x^{\alpha+k}}\right]b$$

sau

$$(-1)^k g^{(k)}(x)=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{x^{\alpha+k}}[a+bf(x)]+$$
$$+b\left[(-1)^k f^{(k)}(x)\frac{1}{x^\alpha}+\ldots+\right.$$
$$\left.+C_k^p(-1)^{k-p}f^{(k-p)}(x)\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{x^{\alpha+p}}+\ldots+(-1)^1 f^{(1)}(x)\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\right].$$

Astfel concluziile devin evidente.

82. Ramuri infinite. Asimptote. Puncte asimptotice

Notăm intervalul deschis (a, b) cu I, unde a poate fi și $-\infty$, iar b și $+\infty$. Considerăm funcția $f: I \to R$ și notăm cu $G(f)$ graficul acestei funcții, adică $G(f)=\{(x, f(x)) \mid x \in I\} \subset R^2$.

Fie M punctul de coordonate $(x, f(x))$ și $d(0, M)=\sqrt{x^2+f^2(x)}$ distanța de la origine la M.

Definiție. Fie x_0 o extremitate a intervalului I. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} d(0, M)=+\infty$, atunci spunem că $G(f)$ posedă o ramură infinită în extremitatea x_0.

Deoarece $max\{|x|, |f(x)|\} \leqslant \sqrt{x^2+f^2(x)} \leqslant \sqrt{2}\ max\{|x|, |f(x)|\}$, rezultă că $G(f)$ posedă o ramură infinită în extremitatea x_0 dacă și numai dacă cel puțin una dintre coordonatele punctului $(x, f(x))$ tinde către $\pm\infty$ cînd $x \to x_0$.

Fie $D: ax+by+c=0$ o dreaptă din plan, iar x_0 o ramură infinită a lui $G(f)$. Se știe că distanța de la M la D are expresia $d(M; D)=\frac{|ax+bf(x)+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

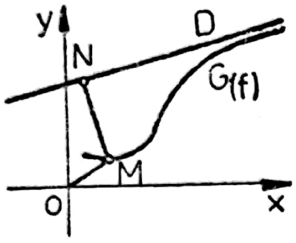


Fig. 130.

Definiție. Dreapta D se numește asimptotă la ramura infinită a lui $G(f)$ dacă $\lim\limits_{x\to x_0} d(M; D)=0$ (fig. 130).

Evident dreapta D este asimptotă la ramura infinită dacă și numai dacă $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+bf(x)+c)=0$.

Dacă presupunem că $G(f)$ posedă o ramură infinită în extremitatea x_0, sînt adevărate afirmațiile: (1) Fie $x_0=$finit și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$. Dreapta D este asimptotă (verticală) dacă și numai dacă ecuația ei se reduce la $x=x_0$.

(2) Presupunem $x_0=\pm\infty$ și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ (finit).

Dreapta D este asimptotă (orizontală) dacă și numai dacă ecuația ei se reduce la $y=y_0$.

3) Presupunem $x_0=\pm\infty$ și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$. Dreapta D este asimptotă (oblică) dacă și numai dacă ecuația ei se reduce la $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x}$ (finit), $n=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-mx)$ (finit).

4) În toate celelalte cazuri posibile, ramura infinită nu admite asimptote

Definiție. Fie x_0 o extremitate finită a lui I. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ (finită), atunci punctul (x_0, y_0) se numește *punct asimptotic* pentru $G(f)$.

Observație. Problema ramurilor infinite a fost prezentată pentru cazul cînd f este definită pe un interval, situație la care se reduc majoritatea problemelor de nivel mediu.

Noțiunea de ramură infinită are sens și în alte situații, $f: A \to R$; se impune însă ca punctul x_0 în care se face discuția să fie punct de acumulare pentru A.

Exemplu. Funcția $x \to f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$ este definită pe $R-\{1\}$; $x=+1$ este deci punct de acumulare al domeniului de definiție și deoarece $f(+1-0)=-\frac{\pi}{2}$, $f(+1+0)=+\frac{\pi}{2}$ punctele $\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$ și $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ sînt puncte asimptotice pentru $G(f)$.

Acest exemplu arată și faptul că precizarea tipurilor posibile de puncte de discontinuitate (de speța I cînd limitele laterale sînt finite, dar diferite; de speța II dacă cel puțin una din limitele laterale este infinită) elimină următoarea afirmație incorectă: „dacă x_0 este punct de acumulare al mulțimii de definiție A, dar $x_0 \notin A$, atunci $x=x_0$ este asimptotă verticală pentru $G(f)$".

Scanned with OKEN Scanner

83. Se consideră $x \to f(x) = \sqrt{x^2+x}+ax$, $a \in R$.

1) Să se determine valorile lui a pentru care G_f, graficul funcției f, admite asimptotă orizontală și să se determine ecuația asimptotei.

2) Aceeași întrebare pentru asimptotă oblică.

Soluție. 1) Pentru ramura $+\infty$: din condiția $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$, l — finit, rezultă $a<0$; f este definită pentru $x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ și deci poate avea asimptote pentru ambele ramuri (la $\pm\infty$).

Se calculează $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(a^2-1)x^2+x}{\sqrt{x^2+x}-ax}$, care ia valoarea finită pentru $a^2=1$, respectiv $a=-1$; se obține în acest caz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}$, iar ecuația asimptotei este $y=\frac{1}{2}$.

Pentru ramura $-\infty$: din condiția $l=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, l — finită, rezultă $a>0$; se calculează $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(a^2-1)x^2+x}{\sqrt{x^2+x}-ax}$, care ia valoare finită pentru $a^2=1$, respectiv $a=1$. Se obține $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = -\frac{1}{2}$, iar ecuația asimptotei este $y=-\frac{1}{2}$.

2) Pentru asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ se impune condiția $a<0$; se calculează $m=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a+1$ și $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \frac{1}{2}$. Ecuația asimptotei este $y=(a+1)x+\frac{1}{2}$.

Pentru ramura $-\infty$: G_f poate avea asimptotă oblică, dacă $a<0$; rezultă $m=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a-1$ și $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx) = -\frac{1}{2}$.

Ecuația asimptotei este $y=(a-1)x-\frac{1}{2}$.

Observație. G_f nu poate avea simultan asimptote de același tip la $\pm\infty$. G_f poate avea pentru o ramură asimptotă orizontală, iar pentru cealaltă — asimptotă oblică: dacă $a=1$, $(a>0)$ rezultă că G_f are asimptota $y=-\frac{1}{2}$ pentru ramura $(-\infty)$ și asimptota $y=2x+\frac{1}{2}$ pentru ramura $(+\infty)$; dacă $a=-1$ rezultă $y=\frac{1}{2}$ la $(+\infty)$ și $y=-2x-\frac{1}{2}$ la $(-\infty)$.

84. Se consideră $x \to f(x) = \frac{1}{|x-1|} e^{|x+1|}$ și

$$F(t) = \int_{-1}^{\operatorname{tg} t} (1-x) f(x)\,dx,\ t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

1) Să se reprezinte graficul $G(f)$.

2) Să se calculeze $F'(t)$ pornind de la definiția derivatei și să se determine $\sup_{t\in\left(-\frac{\pi}{4},\,\frac{\pi}{4}\right)} F(t)$.

Soluție. 1) Se exprimă pe porțiuni valorile lui $f: R-\{+1\}\to R$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}\,e^{-(x+1)}, & x\in(-\infty,\,-1),\\[2mm] \dfrac{1}{1-x}\,e^{x+1}, & x\in[-1,\,1),\\[2mm] \dfrac{1}{x-1}\,e^{x+1}, & x\in(1,\,\infty).\end{cases}$$

Derivata este

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{(1-x)^2}\,e^{-(x+1)}, & x\in(-\infty,\,-1),\\[2mm] \dfrac{2-x}{(1-x)^2}\,e^{x+1}, & x\in(-1,\,1),\\[2mm] \dfrac{x-2}{(x-1)^2}\,e^{x+1}, & x\in(1,\,\infty);\end{cases}$$

deoarece $f'_s(-1)=-\frac{1}{4}$, $f'_d(-1)=\frac{3}{4}$, rezultă că f nu este derivabilă în $x=-1$. Graficul $G(f)$ admite asimptota verticală $x=1$.

Urmează tabelul de variație și graficul (fig. 131):

x	$-\infty$		-1		1		2		∞
$f'(x)$		$-$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$+$		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty\searrow$	e^3	$\nearrow$	∞

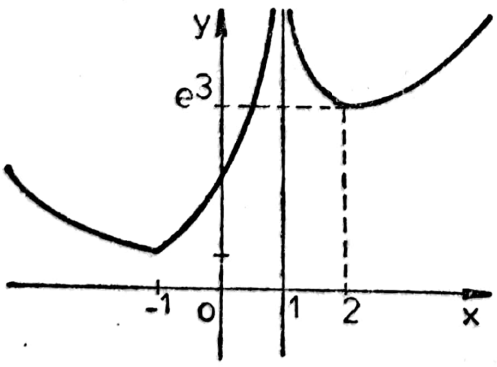


Fig. 131.

2) Pentru $t\in\left[-\frac{\pi}{4},\,\frac{\pi}{4}\right)$ rezultă că $[1,\,\operatorname{tg}t]\subset[-1,\,1)$; deoarece pe $[-1,\,1)$, $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1-x}$, se obține $F(t)=\int_{-1}^{\operatorname{tg}t} e^{x+1}dx$. Pentru $t,\,t_0\in\left(-\frac{\pi}{4},\,\frac{\pi}{4}\right)$, arbitrare, se exprimă raportul

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\frac{\int_{\operatorname{tg}t_0}^{\operatorname{tg}t}(1-x)f(x)dx}{t-t_0}=\frac{\operatorname{tg}t-\operatorname{tg}t_0}{t-t_0}\,e^{\operatorname{tg}\xi+1},$$

unde $\xi \in (t_0, t)$ sau (t, t_0); deoarece $\operatorname{tg} t$ este derivabilă pe $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, deci şi continuă, rezultă că există limita

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = \frac{1}{\cos^2 t_0} \cdot \lim_{\substack{t \to t_0 \\ (\xi \to t_0)}} e^{\operatorname{tg} \xi + 1} = \frac{1}{\cos^2 t_0} e^{\operatorname{tg} t_0 + 1},$$

Pentru că t_0 a fost ales arbitrar, se obţine $F'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} e^{\operatorname{tg} t + 1}$. Deoarece $F'(t) > 0$ pe $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă că F este strict crescătoare pe acest interval şi deci

$$\sup_{t \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)} F(t) = \int_{-1}^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} e^{x+1} dx = \int_{-1}^{1} e^{x+1} dx = e^2 - 1.$$

85. Funcţii pare şi funcţii impare

Fie $f : E \to R$ o funcţie reală, unde E are proprietatea că odată cu x conţine şi pe $-x$.

Funcţia f se numeşte *pară* dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in E$; funcţia f se numeşte *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in E$.

Evident, o funcţie este pară dacă şi numai dacă graficul său este simetric faţă de Oy. Analog o funcţie este impară dacă şi numai dacă graficul său este simetric faţă de originea axelor.

Orice funcţie g definită pe E este suma dintre o funcţie pară şi impară. Într-adevăr,

$$g(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(-x)] + \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)], \quad \forall x \in E,$$

iar suma $\frac{1}{2}[g(x) + g(-x)]$ defineşte o funcţie pară şi diferenţa $\frac{1}{2}[g(x) - g(-x)]$ defineşte o funcţie impară.

Problemă. Fie funcţiile

$$x \to f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n+1} + (x-1)^{2n+1}}{(x+1)^{2n+1} - (x-1)^{2n+1}}, \; n \in N.$$

1) Să se arate că funcţia f_n (n = fixat) este continuă, impară şi bijectivă. Să se determine funcţia inversă f_n^{-1}.

2) Să se determine tangenta la graficul funcţiei f_n în punctul (0, 0). Să se determine a şi b astfel încît

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f_n(x) - (ax + b)) = 0.$$

Să se traseze graficul lui f_n.

3) Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Soluţie. 1) Observăm că

$(x+1)^{2n+1}-(x-1)^{2n+1}=0 \Leftrightarrow x+1=x-1$ (imposibilitate). Astfel domeniul de definiţie al lui f_n este R. Funcţia f_n este continuă fiind o funcţie raţională.

Numărătorul este un polinom impar, iar numitorul este un polinom par. Astfel $f_n(x)$ este o funcţie impară. De aceea în continuare putem utiliza restricţia lui f_n la $[0, \infty)$.

Deoarece $x \geqslant 0$, avem $x+1 \neq 0$ şi putem scrie

$$f_n(x)=\frac{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}}{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}}.$$

Astfel f_n este compusa a trei funcţii

$$u=\frac{x-1}{x+1},\ v=u^{2n+1},\ w=\frac{1+v}{1-v}.$$

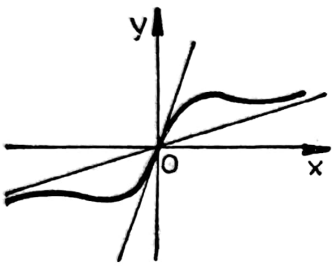


Fig. 132.

Deoarece aceste funcţii sînt strict crescătoare rezultă că şi restricţia lui f_n la $[0, \infty)$ este tot strict crescătoare, şi deci injectivă.

Avem $f_n(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=\infty$. De aceea $f([0, \infty))=[0, \infty)$, adică f_n este surjectivă. (Graficul $G(f_n)$ este în fig. 132.) Pe de altă parte $\forall y \in [0, \infty)$ avem

$$\frac{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}}{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}}=y \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}=\frac{y-1}{y+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}=\sqrt[2n+1]{\frac{y-1}{y+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt[2n+1]{\frac{y-1}{y+1}}}{1-\sqrt[2n+1]{\frac{y-1}{y+1}}} \in [0, \infty).$$

Rezultă că $f_n : R \to R$ este o bijecţie şi că

$$f_n^{-1}(x)=\frac{\sqrt[2n+1]{x+1}+\sqrt[2n+1]{x-1}}{\sqrt[2n+1]{x+1}-\sqrt[2n+1]{x-1}}.$$

2) Avem $f_n(0)=0$, $f_n'(0)=2n+1$.

Deci $y=(2n+1)x$ este tangenta la grafic în punctul (0, 0).

Apoi

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^{2n+1}+(x-1)^{2n+1}}{(x+1)^{2n+1}-(x-1)^{2n+1}}-(ax+b)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{2n+1}+(x-1)^{2n+1}+ax((x-1)^{2n+1}-(x+1)^{2n+1})+b((x-1)^{2n+1}-(x+1)^{2n+1})}{(x+1)^{2n+1}-(x-1)^{2n+1}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca această limită să fie zero trebuie ca $a=\frac{1}{2n+1}$, $b=0$. Astfel $y=\frac{x}{2n+1}$ este asimptotă la $\pm\infty$ (fig. 132).

3) Observăm că pentru $x>0$ avem $-1<u<1$. De aceea găsim

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0.\end{cases}$$

86. Extremele funcțiilor derivabile

Fie E o reuniune de intervale și $f: E\to R$ o funcție derivabilă pe E excepînd o submulțime cel mult numărabilă de puncte din E. Fie E' submulțimea lui E pe care f este derivabilă.

I. Dacă $x_0\in E'$ este un punct de extrem local al funcției f, atunci x_0 este un zero al derivatei, adică $f'(x_0)=0$. Cu alte cuvinte punctele de extrem local pentru f se află în mod necesar printre rădăcinile ecuației $f'(x)=0$, $x\in E'$.

Să dăm acum o condiție suficientă de extrem local.

Dacă există o vecinătate V_{x_0} astfel încît derivata f' să aibă semnul $+$ la stînga lui x_0 și semnul $-$ la dreapta lui x_0, atunci x_0 este punct de maxim al funcției f; dacă pe V_{x_0} derivata f' are semnul $-$ la stînga lui x_0 și semnul $+$ la dreapta lui x_0, atunci x_0 este un punct de minim pentru f.

Dacă f' are același semn într-o vecinătate a lui x_0, atunci f nu are extrem în x_0.

II. Fie $[a, b]\subset E$. Funcția $f: [a, b]\to R$ se spune *derivabilă pe* $[a, b]$ dacă este derivabilă pe (a, b), iar derivata la dreapta în a și derivata la stînga în b sînt numere unic determinate.

Dacă f este derivabilă pe $[a, b]$, atunci punctele x din $[a, b]$ în care avem $f'(x)=0$ sînt eventuale puncte de extrem ale lui f.

Dacă derivata f' este continuă pe $[a, b]$ și nu se anulează pe (a, b), adică păstrează semn constant, atunci singurele puncte de extrem (global) ale lui f sînt capetele a și b: dacă $f'_d(a)\leqslant 0$ (respectiv $f'_s(b)\geqslant 0$), atunci $f(a)$ (respectiv $f(b)$) este maximul lui f; dacă $f'_d(a)\geqslant 0$ (respectiv $f'_s(b)\leqslant 0$), atunci $f(a)$ (respectiv $f(b)$) este minimul lui f.

Dacă $f: E\to R$ este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b), atunci extremele globale ale restricției $f: [a, b]\to R$ sînt respectiv minimul și maximul mulțimii $\{f(a), f(b), f(x'_1), \ldots, f(x'_n)\}$, unde x'_i sînt soluțiile ecuației $f'(x)=0$ $x\in(a, b)$.

Cazurile $[a, b)\subset E$ și $(a, b]\subset E$ se explicitează analog.

III. Presupunem că $f: E\to R$ este derivabilă de n ori, $n\geqslant 2$, într-un punct $x_0\in(a, b)\subset E$ astfel încît

$$f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

(1) Dacă n este par, atunci x_0 este un punct de extrem local al lui f și anume: dacă $f^{(n)}(x_0)<0$, atunci x_0 este un punct de maxim; dacă $f^{(n)}(x_0)>0$, atunci x_0 este punct de minim.

Scanned with OKEN Scanner

(2) Dacă n este impar, atunci x_0 nu este punct de extrem; pentru n impar ≥ 3, punctul x_0 este un punct de inflexiune.

Exemple. 1) Să se determine extremele locale ale funcției

$$x \to f(x) = \sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) - 1.$$

Soluție. Observăm că $f: (0, \infty) \to R$, $f(x) = \sqrt{2}\left(\sin\left(t(x) + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, unde $t(x) = \pi \ln x$.

Punctele de extrem se găsesc printre rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$, sau $f'(x) = \sqrt{2} \cos\left(t(x) + \frac{\pi}{4}\right) \cdot t'(x) = \frac{\pi\sqrt{2}}{x} \cos\left(t(x) + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; rezultă $t(x) = (2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$ sau $x_k = e^{k+\frac{1}{4}}$, $k \in Z$.

Se calculează

$$f''(x) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{x^2} \cos\left(t(x) + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{x^2} \sin\left(t(x) + \frac{\pi}{4}\right):$$

$$f''(x_k) = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{e^{2k+\frac{1}{2}}} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2\sqrt{2}\, e^{-2k-\frac{1}{2}} (-1)^k.$$

Pentru $k = 2n$, $f''(x_{2n}) < 0$, deci x_{2n} sînt puncte de maxim local și $f_{max} = \sqrt{2} - 1$; pentru $k = 2n+1$, $f''(x_{2n+1}) > 0$, x_{2n+1} — sînt puncte de minim local, $f_{min} = -\sqrt{2} - 1$.

2) Să se determine extremele locale ale funcției

$$x \to f(x) = 2 \cos x + x^2.$$

Soluție. Avem $f'(x) = -2 \sin x + 2x$ și ecuația $f'(x) = 0$ se reduce la $\sin x = x$, cu soluția unică $x = 0$. Apoi $f''(x) = -2\cos x + 2$ și $f''(0) = 0$; $f'''(x) = 2 \sin x$ și $f'''(0) = 0$; $f^{(IV)}(x) = +2 \cos x$ și $f^{(IV)}(0) = +2 > 0$. Deci $x = 0$ este un punct de minim.

2) Să se determine $\inf\limits_{x \in E} f(x)$ și $\sup\limits_{x \in E} f(x)$, unde $f: E \to R$ este definită prin $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$.

Soluție. Pentru existența lui $\ln x$ în R, se impune $x > 0$. Apoi se observă că dacă $x > 0$ și $\ln x \in Z - \{0\}$, atunci expresia $(\ln x)^{\ln x}$ are sens; de asemenea pentru $x > 0$ și $\ln x > 0$, adică pentru $x < 1$, expresia $(\ln x)^{\ln x}$ are sens (*vezi* precizarea de la problema 23). Deci domeniul maxim de definiție al lui f este

$$E = \{x \mid x \in (0,1),\ \ln x \in Z\} \cup (1, \infty) = \{x \mid x = e^{-n},\ n = 1, 2, \ldots\} \cup (1, \infty).$$

Pentru $x \in (1, \infty)$ avem $f'(x) = \frac{1}{x} (\ln x)^{\ln x} (\ln \ln x + 1)$, iar $f'(x) = 0$ implică $x_0 = e^{1/e}$. Se constată că x_0 este un punct de minim și $f(x_0) = e^{-1/e}$. Apoi $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = 1$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte $f(e^{-n})=(-n)^{-n}$ și deci $f(e^{-1})=-1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(e^{-n})=0$. Se observă că $f(-n)\in\left[-1, \frac{1}{4}\right]$.

În concluzie, $\inf\limits_{x\in E} f(x)=\min\limits_{x\in E} f(x)=-1$ și $\sup\limits_{x\in E} f(x)=\infty$.

87. Se consideră funcțiile f_n: $[1, \infty)\to(0, \infty)$, $n\in N$, definite prin $f_n(x)=\frac{x}{n^3+x^4}$.

1) Să se determine $a_n=\sup\limits_{x\in[1,\infty)} f_n(x)$.

2) Să se arate că șirul cu termenul general $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ este convergent.

Soluție. 1) Deoarece $f_n'(x)=\frac{(n+\sqrt{3}x^2)(n-\sqrt{3}x^2)}{(n^3+x^4)^2}$, ecuația $f_n'(x)=0$ are pe $[1, \infty)$ numai soluția $x_0=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{3}}$. Se observă că $f_n'(x)>0$ pentru $1\leqslant x<x_0$ și $f_n'(x)>0$ pentru $x>x_0$. De aceea x_0 este un punct de maxim și $f_n(x_0)=\frac{3}{4\sqrt[4]{3}}\frac{1}{n^{3/2}}$. În plus, $f_n(1)=\frac{1}{n^3+1}$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=0$. Comparînd pe $f_n(1)$, $f_n(x_0)$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=0$, deducem că $a_n=\frac{3}{4\sqrt[4]{3}}\frac{1}{n^{3/2}}$.

2) Problema se reduce la a arăta că șirul cu termenul general $s_n=\frac{1}{1^{3/2}}+\frac{1}{2^{3/2}}+\ldots+\frac{1}{n^{3/2}}$ este convergent. Într-adevăr se constată că s_n este crescător și mărginit de $1+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$. De aceea $\{s_n\}$ este un șir convergent.

88. Se consideră funcțiile $f_n: R\to[0, \infty)$, $n\in N$, definite prin $f_n(x)=\frac{x^2}{1+nx^2}$.

1) Să se determine $a_n=\sup\limits_{x\in R} f_n(x)$.

2) Să se arate că șirul cu termenul general $a_1+a_2+\ldots+a_n$ este divergent.

Soluție. 1) Evident f_n sînt derivabile și

$$f_n'(x)=\frac{2x}{(1+nx^2)^2}\to\begin{cases}<0 & x<0\\ =0 & x=0\\ >0 & x>0.\end{cases}$$

De aceea $x_0=0$ este un punct de minim. Comparînd numerele $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x)=\frac{1}{n}$ și $f_n(0)=0$, deducem că $a_n=\sup\limits_{x\in R} f_n(x)=\frac{1}{n}$.

2) Se constată ușor că dacă notăm $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, atunci $s_1<s_2<\ldots<s_n<\ldots$, iar $s_{2k}>\frac{k}{2}$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\infty$.

89. Se dă $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}\to R$ definită prin $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$.

1) Să se arate că $\max\limits_{x} f(x)\geqslant\frac{\pi^2-4}{\pi^2}$.

2) Să se determine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3) Pentru $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ să se determine o funcție h, care să satisfacă $h''(x)=f(x)$ și să se arate că $h(x)\geqslant\ln x+C_1x+C_2$, unde C_1, C_2 sînt funcții constante.

Soluție. 1) Deoarece $0<\sin^2 x\leqslant 1$ rezultă $\frac{1}{\sin^2 x}\geqslant 1$ și deci $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\geqslant 1-\frac{1}{x^2}$. Pe de altă parte pentru $\varphi(x)=1-\frac{1}{x^2}$ avem $\varphi'(x)=\frac{2}{x^3}$ și următorul tabel de variație

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(x)$	$-\quad-\quad-$			$+\quad+\quad+$	
$\varphi(x)$	$1-\frac{4}{\pi^2}$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow\quad 1-\frac{4}{\pi^2}$

Astfel $\max\limits_{x}\varphi(x)=1-\frac{4}{\pi^2}$ și deci $\max\limits_{x} f(x)\geqslant 1-\frac{4}{\pi^2}$.

2) Avem

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=$$

=(aplică regula l'Hospital de patru ori),

$\frac{1}{3}$. De aceea $x=0$, $y=\frac{1}{3}$ este un punct asimptotic pentru graficul lui f.

3) Pentru $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ găsim

$$g(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{x^2}=-\operatorname{ctg} x+\frac{1}{x}+C_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Apoi

$$h(x)=\int g(x)dx=\int\left(-\operatorname{ctg}x+\frac{1}{x}+C_1\right)dx=-\ln\sin x+\ln x+C_1x+C_2.$$

Deoarece $0<\sin x\leqslant 1$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, rezultă $-\ln\sin x\geqslant 0$ și deci $h(x)\geqslant\ln x+$ $+C_1x+C_2$.

90. Funcții original

O funcție $f: R\to R$ care satisface condițiile:

(I) $f(x)=0$ pentru $x<0$,

(II) f este derivabilă pe porțiuni,

(III) există două numere reale $a>0$ și $s\geqslant 0$ astfel încît $|f(x)|\leqslant ae^{sx}$, $\forall x$,

se numește *funcție original*. Asemenea funcții apar în fizică, electrotehnică etc. Cel mai simplu exemplu este *funcția unitate*, definită prin

$$\eta(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & x=0\\ 1 & x>0.\end{cases}$$

Problemă. 1) Să se arate că suma și produsul a două funcții original sînt funcții original.

2) Să se arate că funcțiile definite prin $x^n\eta(x)$, $x^ne^{\lambda x}\eta(x)$, $x^n\sin\omega x\,\eta(x)$, $e^{\lambda x}(P(x)\cos\omega x+Q(x)\sin\omega x)\,\eta(x)$ (unde $n\in N\cup\{0\}$; $\lambda,\omega\in R$; η=funcția unitate; P, Q=polinoame) sînt funcții original.

Soluție. 1) Se aplică direct definiția.

2) Evident $x\xrightarrow{f}x^n\,\eta(x)$ satisface condiția $f(x)=0$ pentru $x<0$. De asemenea restricțiile lui f la $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$ sînt derivabile și $f'_s(0)=0$, $f'_d(0)=0$, adică f este derivabilă pe porțiuni.

Să arătăm că există $a>0$ și $s>0$ astfel încît $\varphi(x)=\frac{x^n}{ae^{sx}}<1$, $\forall x\in(0,\infty)$.

Deoarece $\varphi'(x)=\frac{x^{n-1}(n-sx)}{ae^{sx}}$, ecuația $\varphi'(x)=0$ dă $x=\frac{n}{s}$, pentru $s\neq 0$. Fie $s>0$; avem $\varphi'(x)>0$ pentru $x<\frac{n}{s}$, $\varphi'(x)<0$ pentru $x>\frac{n}{s}$, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$. Deci $\varphi\left(\frac{n}{s}\right)=\frac{\left(\frac{n}{s}\right)^n}{ae^n}$ este un maxim global al funcției φ. Problema s-a redus la a arăta că există $a>0$ astfel încît $\left(\frac{n}{se}\right)^n\frac{1}{a}<1$, adică $a>\left(\frac{n}{se}\right)^n$. Deoarece prin inducție se constată că $n!\,e^n>n^n$, rezultă $a=\frac{n!}{s^n}$.

Analog se tratează celelalte cazuri.

Observație. Din definiție și din exemple rezultă că la orice funcție $f: R\to R$ care satisface condițiile (II) și (III) poate fi atașată funcția $f\eta$ care este o funcție original.

Scanned with OKEN Scanner

91. Funcția „signum"

Aplicația $f: R \to \{-1, 0, +1\}$ definită prin

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0, \end{cases}$$

este funcția „signum" de argument $x \in R$. Evident funcția signum este impară. Unii autori consideră $\operatorname{sign} x = \frac{|x|}{x}$, neatribuindu-i-se deci valoare în $x=0$.

1°. Pentru funcția $x \to f(x)=(x^2+px+q)\operatorname{sign} x$ se cere: 1) graficul pentru $p=1$, $q=-2$; 2) să se determine p, $q \in R$ astfel, încît f să fie inversabilă pe R și să se determine inversa în acest caz; în ce condiții inversa poate fi prelungită prin continuitate?

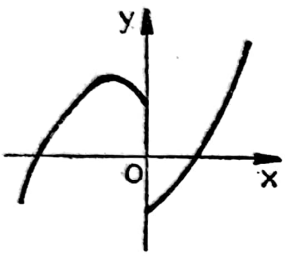


Fig. 133.

Soluție. 1) f se definește pe subintervale prin $x \xrightarrow{f_1} x^2+x-2$, $x>0$ și $x \xrightarrow{f_2} -x^2-x+2$, $x<0$; f_1 și f_2 au graficele arce de parabolă (fig. 133).

$$2)\ f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x>0 \\ f_2(x), & x<0. \end{cases}$$

Pentru inversabilitate pe întreg R:

— se restrînge numărul intervalelor de monotonie la două, adică $p=0$;

— se impune condiția să fie disjuncte codomeniile celor două restricții, $\{f_2(x) | x \in (-\infty, 0)\} \cap \{f_1(x) | x \in (0, \infty)\} = \varnothing$, adică $q \geqslant 0$.

Deci $f(x)=(x^2+c^2)\operatorname{sign} x$. Se determină inversele:

$$\left.\begin{matrix} x=\pm\sqrt{y-c^2} \\ x>0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow x=\sqrt{y-c^2},\ y \in (c^2, \infty);$$

$$\left.\begin{matrix} x=\pm\sqrt{-y+c^2} \\ x<0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow x=-\sqrt{-y+c^2},\ y \in (-\infty, -c^2),$$

sau dacă se redefinesc variabilele

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{x-c^2}, & x \in (c^2, \infty), \\ -\sqrt{-x+c^2}, & x \in (-\infty, -c^2). \end{cases}$$

Pentru $q=0$ rezultă că $f_s(0)=f_d(0)=0$ și deci atribuind valoarea $f(0)=0$, inversa devine funcție continuă.

92. Se dă funcția

$$x \to f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \operatorname{sign}\left(\cos\frac{\pi}{2x}\right), & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

1) Să se explicitezе valorile $f(x)$ pentru $x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$.

2) Să se rezolve ecuația $f(x)+f(y)=2$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Fie $x_0=0<x_1=\frac{1}{4k+2}<x_2=\frac{1}{4k}<\ldots<x_{2k}=\frac{1}{6}<x_{2k+1}=\frac{1}{4}<x_{2k+2}=\frac{1}{2}<x_{2k+3}=1$. Să se găsească

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{2k+2}|f(x_{i+1})-f(x_i)|.$$

Soluţie. 1) Observăm că $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$ implică $\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{2x}<2\pi$ şi deci $\cos\frac{\pi}{2x}>0$. Rezultă $f(x)=1$ pentru $x\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$. Pentru $x=\frac{1}{3}$ şi $x=1$ găsim $f(x)=0$, apoi $f(x)=-1$ pentru $x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$.

2) Deoarece valorile signumului sînt -1, 0, $+1$, ecuaţia admite soluţii numai pentru $f(x)=1$ şi $f(y)=1$. Dar $\operatorname{sign}\left(\cos\frac{\pi}{2x}\right)=1$ impune $\cos\frac{\pi}{2x}>0$, adică $\frac{\pi}{2x}\in\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$, adică $x\in\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)$. Analog $y\in\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)$.

3) Avem $S_k=\sum_{i=0}^{2k+2}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\ldots$

$\ldots+|f(x_{2k+2})-f(x_{2k+1})|+|f(x_{2k+3})-f(x_{2k+2})|=\left|\operatorname{sign}\left(\cos(4k+2)\frac{\pi}{2}\right)\right|+$

$+\left|\operatorname{sign}(\cos 2k\pi)-\operatorname{sing}\left(\cos(4k+2)\frac{\pi}{2}\right)\right|+\ldots+|\operatorname{sign}(\cos\pi)-\operatorname{sign}(\cos 2\pi)|+$

$+\left|\operatorname{sign}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sign}(\cos 2\pi)\right|=1+\underbrace{2+\ldots+2}_{k}+1=2k+2$. Deci $\lim_{k\to\infty}S_k=\infty$

93. Funcţia „parte întreagă”

Funcţia $E:R\to Z$ definită prin $E(x)=[x]$, unde $[x]=n$, pentru $n\leqslant x<n+1$, $n\in Z$, se numeşte funcţie parte întreagă.

Se dă

$$x\to f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ (x-E(x))\ln x, & x\in(0,3)\end{cases}$$ şi se cere:

1) să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x)-m=0$ în funcţie de $m\in R$;

2) să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei f şi axa Ox pentru $x\in(0,3)$.

(Bacalaureat, Maroc, 1976. Text modificat)

Soluţie. 1) Rezultă că

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x\ln x, & x\in(0,1),\\ (x-1)\ln x, & x\in[1,2),\\ (x-2)\ln x, & x\in[2,3),\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}\ln x+1, & x\in(0,1),\\ \ln x+1-\frac{1}{x}, & x\in(1,2),\\ \ln x+1-\frac{2}{x}, & x\in(2,3)\end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in(0,\ 1),\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}, & x\in(1,\ 2),\\ \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}, & x\in(2,\ 3).\end{cases}$$

Tabelul de variație și graficul pentru f (fig. 134):

x	0		$\frac{e}{1}$		1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+1$	0	$+$	$\frac{1}{2}+\ln 2$	$\ln 2$ $+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2;$	0	$\nearrow$ $\ln 3$
$f''(x)$			$+$			$+$			$+$

Discuția după $m\in R$ a numărului rădăcinilor reale ale ecuației $f(x)-m=0$:

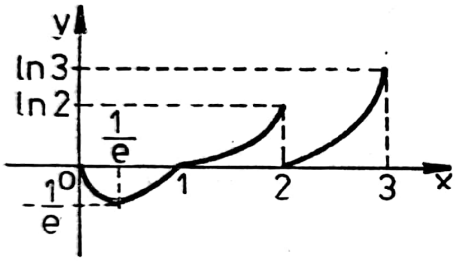


Fig. 134.

$m\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{e}\right)$, nu are rădăcini reale;

$m=-\frac{1}{e}$, $x_1=x_2=\frac{1}{e}$;

$m\in\left(-\frac{1}{e},\ 0\right)$, $x_1\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$, $x_2\in\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$;

$m=0$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$;

$m\in(0,\ \ln 2)$, $x_1\in(1,\ 2)$, $x_2\in(2,\ 3)$;

$m\in[\ln 2,\ \ln 3)$, $x_1\in(2,\ 3)$;

$m\in[\ln 3,\ +\infty)$, nu are rădăcini reale.

2) Se calculează

$$A=-\int_0^1 x\ln x\,dx+\int_1^2(x-1)\ln x\,dx+\int_2^3(x-2)\ln x\,dx=-\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1+$$

$$+\left(\frac{x^2-2x}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+x\right)\Bigg|_1^2+\left(\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}+2x\right)\Bigg|_2^3=\frac{5}{4}+2\cdot\ln 2-\frac{3}{2}\cdot\ln 3,$$

deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha\cdot\ln x=0$, $\alpha>0$.

94. Fie n un număr natural fixat și $b(n)$ minimul lui $k+\frac{n}{k}$ pentru $k\in n$. Să se arate că $b(n)$ și $\sqrt{4n+1}$ au aceeași parte întreagă (prin partea întreagă a unui număr real x se înțelege cel mai mare număr întreg care nu-l depășește pe x).

(Competiția William Lowell Putnam, S.U.A., 1973)

Soluţie. Considerăm funcţia $\varphi(x)=x+\frac{n}{x}$, $x\geqslant 1$. Deoarece $\varphi'(x)=1-\frac{n}{x^2}$, $\varphi''(x)=\frac{2n}{x^3}$, rezultă că $\varphi(x)$ este convexă. De aceea $x=\sqrt{n}$ este un punct de minim global şi $min\ \varphi(x)=2\sqrt{n}$. În particular, $b(n)=2\sqrt{n}$.

Evident $b(n)=2\sqrt{n}<\sqrt{4n+1}<2\sqrt{n}+1$. Notînd cu $[x]$ partea întreagă a lui x şi ţinînd seama de inegalitatea precedentă deducem

$$[2\sqrt{n}]\leqslant[\sqrt{4n+1}]<[2\sqrt{n}+1]=1+[2\sqrt{n}].$$

Rămîne că $[2\sqrt{n}]=[\sqrt{4n+1}]$.

95. Fie a, b două numere naturale. Împărţind a^2+b^2 la $a+b$ obţinem cîtul q şi restul r. Să se determine toate perechile (a, b) pentru care avem $q^2+r=1\,977$.

(O.I.M., Iugoslavia, 1977)

Soluţie. Să determinăm mai întîi pe q şi r. Avem $q\leqslant[\sqrt{1\,977}]=44$. Deoarece $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$ şi $r<a+b$, găsim $q=\left[\frac{a^2+b^2}{a+b}\right]\geqslant\frac{a^2+b^2}{a+b}-1\geqslant\frac{1}{2}(a+b)-1>\frac{r}{2}-1$. Ipoteza $q\leqslant 43$ implică $r\geqslant 1977-43^2=128$, adică $43\geqslant q>\frac{r}{2}-1\geqslant 63$, ceea ce este absurd. Rămîne $q=44$ şi atunci $r=1977-44^2=41$.

Cu acestea avem $a^2+b^2=44(a+b)+41$ sau $(a-22)^2+(b-22)^2=1009$. Ţinînd seama că în scrierea zecimală ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, iar ultima cifră a lui 1 009 se poate scrie $0+9$, $4+5$, rezultă că este suficient să încercăm pe 0, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 25, 27, 28, 30, drept $|a-22|$, $|b-22|$. Se obţine $a-22=28$, $b-22=\pm 15$ sau invers. Astfel (50, 37), (37, 50), (50, 7), (7, 50) sînt perechile căutate.

96. Funcţii hiperbolice

Aplicaţia $x\to\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in R$, defineşte „sinusul hiperbolic" de argument x; se utilizează notaţia $x\to\operatorname{sh} x$. În mod analog se defineşte $x\to\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in R$.

Observînd că funcţiile „sh" şi „ch" sînt combinaţii liniare ale aplicaţiilor $x\to e^x$, $x\to e^{-x}$, $x\in R$, studiul proprietăţilor funcţiilor hiperbolice devine un simplu exerciţiu.

Analog funcţiilor circulare (trigonometrice) se mai definesc funcţiile $x\to\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $x\to\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

1°. Să se demonstreze egalităţile:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,\ \operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y.$$

$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y,\ \operatorname{th}(x\pm y)=\frac{\operatorname{th} x\pm\operatorname{th} y}{1\pm\operatorname{th} x\operatorname{th} y};$$

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Calcule directe.

2°. Se consideră funcțiile $x \to \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \to \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Se cere:

(1) reprezentarea funcțiilor, raportată la aceleași axe,
(2) inversabilitatea și inversele funcțiilor,
(3) să se calculeze aria domeniului

$$D = \{(x, y) | x \in (0, \infty), \operatorname{sh} x < y < \operatorname{ch} x\}.$$

Soluție. (1) Tabelele de variație și graficele (fig. 135):

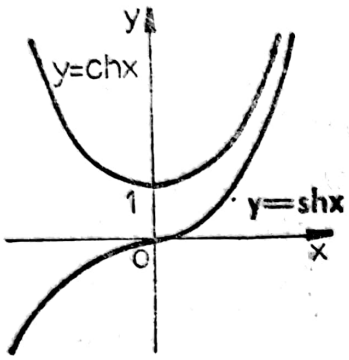


Fig. 135.

x	$-\infty$		0		∞
$\operatorname{sh}' x$		$+$		$+$	
$\operatorname{sh} x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
x	$-\infty$		0		∞
$\operatorname{ch}' x$		$-$	0	$+$	
$\operatorname{ch} x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

Se constată că sh este funcție impară, iar ch este funcție pară.

(2) Deoarece sh este strict monotonă pe R, este inversabilă pe R și rezultă $\operatorname{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; observăm că determinarea $\ln(x - \sqrt{x^2+1})$ nu ia valori în R.

Funcția ch are două intervale de monotonie, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, \infty)$. Pe cele două intervale se determină inversa:

— pentru ch: $(-\infty, 0) \to (1, \infty)$,

$$\operatorname{ch}^{-1}(x) = \ln(x - \sqrt{x^2-1});$$

— pentru ch: $(0, \infty) \to (1, \infty)$,

$$\operatorname{ch}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

(3) aria $D = \lim\limits_{A \to \infty} \int_0^A (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)\,dx$; deoarece

$\int_0^A (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)\,dx = \int_0^A e^{-x}\,dx = 1 - e^{-A}$, rezultă că aria $D = 1$.

3°. Se consideră $x \to \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $x \to \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ pe domeniul maxim de definiție.

(1) Să se studieze și să se reprezinte grafic, raportate la același sistem de axe.

(2) Să se stabilească inversabilitatea și să se determine inversele.

(3) Să se determine natura șirului $n \longrightarrow A_n = \int_n^{n+1} (\operatorname{cth} x - \operatorname{th} x)\,dx$.

Soluţie. (1) Funcţiile th şi cth sînt funcţii impare. Deoarece $(\text{th}\,x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$, $(\text{th}\,x)'' = -\frac{2\,\text{sh}\,x}{\text{ch}^3 x}$, $(\text{cth}\,x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$, $(\text{cth}\,x)'' = \frac{2\,\text{ch}\,x}{\text{sh}^3 x}$, urmează tabelele de variaţie şi graficele (fig. 136).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\text{th}x)'$		$+$		$+$	
$\text{th}\,x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$
$(\text{th}x)''$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		0		∞
$(\text{cth}x)'$		$-$		$-$	
$(\text{cth}x)$	-1	$\searrow -\infty$		$+\infty$	$\searrow +1$
$(\text{cth}x)''$		$-$		$+$	

(2) Funcţia th este strict crescătoare pe R; inversa se obţine din $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$; schimbînd notaţia variabilei independente rezultă $x \to \arg\text{th}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.

Funcţia cth este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$; corespunzător celor două domenii se determină restricţiile inversei, $x \to \text{arg cth}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$.

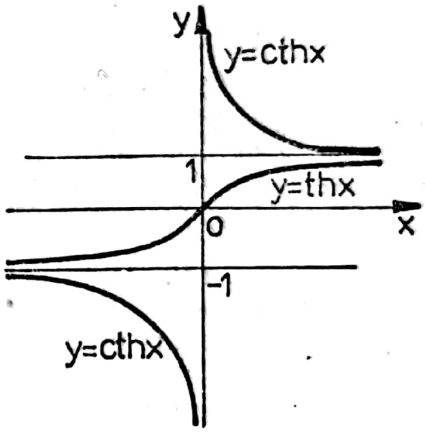


Fig. 136.

(3) Se calculează

$$A_n = \int_n^{n+1} (\text{cth}\,x - \text{th}\,x)\,dx = \int_n^{n+1} \frac{\text{ch}\,x}{\text{sh}\,x}\,dx - \int_n^{n+1} \frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x}\,dx = \ln \text{th}\,x\Big|_n^{n+1} =$$

$$= \ln\frac{\text{th}(n+1)}{\text{th}\,n} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{\text{th}(n+1)}{\text{th}\,n} = \ln 1 = 0.$$

97. Se dă $f(x) = \dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x$.

1) Să se studieze ariaţia şi să se traseze graficul funcţiei f.

2) Să se determinevvaloarea maximă a lui α şi valoarea minimă a lui β aşa ca

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}, \quad \forall n \in N.$$

Soluţie. 1) Din $x \neq 0$, $1+\frac{1}{x} > 0$ rezultă domeniul maxim de definiţie $E = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$. Evident $f: E \to R$ este continuă. În punctele de acumulare ale lui E care nu fac parte din E calculăm limitele:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = 1, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0,$$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$(aplicăm regula lui l'Hospital de două ori),

$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$. De aici rezultă că dreapta $y=\dfrac{1}{2}$ este asimptotă orizontală atît la $-\infty$ cît și la $+\infty$. Graficul nu admite asimptote oblice, diferite de cea orizontală.

Deoarece $f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1=\dfrac{\mathrm{sh}^2 u}{u^2}-1>0$, unde $e^{2u}=1+\dfrac{1}{x}$,

funcția f este strict crescătoare. Aceasta împreună cu cele precedente ne arată că graficul lui f nu taie axele de coordonate.

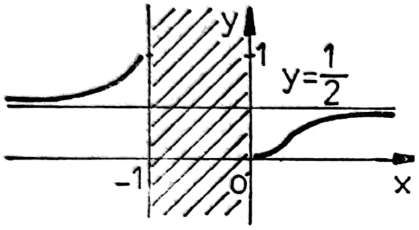


Fig. 137.

x	$-\infty$		-1	0		∞
$f'(x)$	$+++$				$+++$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	1	0	↗	$\frac{1}{2}$

Astfel forma graficului lui f este cea din fig. 137.

2) Logaritmînd în baza e obținem

$$\alpha_{max}=\inf_n\left\{\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right\},$$

$$\beta_{min}=\sup_n\left\{\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right\}.$$

Ținînd seama de variația funcției f găsim

$$\alpha_{max}=f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1=0{,}442695,$$

$$\beta_{min}=\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2},$$

98. Funcții convexe

Fie I un interval din R și $f: I\to R$ o funcție reală. Dacă

$$f((1-t)a+tb)\leqslant(1-t)f(a)+tf(b),\ \forall a,\ b\in I,\ \forall t\in[0,\ 1],$$

atunci funcția f se numește *convexă*. Dacă $-f$ este convexă, atunci f se numește *concavă*. De aceea toată teoria funcțiilor convexe are un corespondent pentru funcțiile concave.

Din punct de vedere geometric relaţia precedentă spune că $\forall a,\ b\in I$, graficul restricţiei lui f la $[a,\ b]$ se află sub segmentul de dreaptă ce uneşte punctele $(a,\ f(a))$ şi $(b,\ f(b))$ — fig. 138.

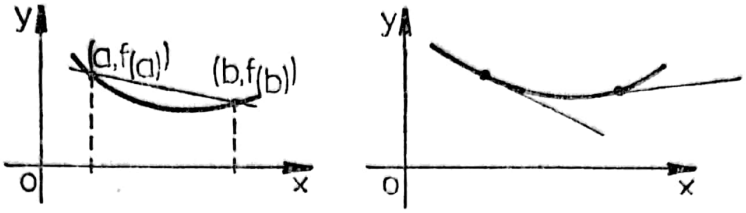


Fig. 138.

Proprietăţi

(1) Dacă f este convexă pe I şi c este un număr real, atunci $\{x|x\in I,\ f(x)\leqslant c\}$ este un interval (mulţimea vidă şi mulţimea cu un singur element sînt privite ca intervale particulare).

(2) Orice funcţie convexă este continuă.

(3) Presupunem că I este deschis, iar $f: I\to R$ este derivabilă. Funcţia f este convexă pe I dacă şi numai dacă

$$f(a)+(b-a)f'(a)\leqslant f(b),\quad \forall a,\ b\in I.$$

Cu alte cuvinte, f este convexă dacă şi numai dacă dreapta tangentă la $G(f)$ se află mereu sub grafic (fig. 138).

(4) Fie I un interval deschis şi $f: I\to R$ o funcţie derivabilă de două ori. Funcţia f este convexă pe I dacă şi numai dacă $f''(x)\geqslant 0$, $\forall x\in I$.

(5) Pentru o funcţie convexă mulţimea punctelor de minim local coincide cu mulţimea punctelor de minim global şi această mulţime este sau vidă, sau mulţime cu un singur element, sau interval (propriu-zis) — fig. 139.

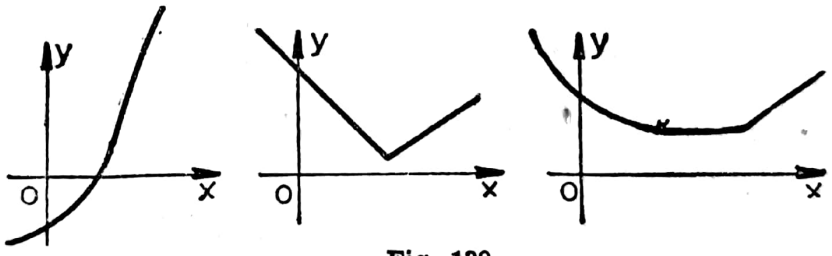


Fig. 139.

(6) Dacă $f: I\to R$ este convexă şi derivabilă, atunci soluţiile ecuaţiei $f'(x)=0$, $x\in I$, sînt puncte de minim.

(7) Dacă o funcţie convexă $f: I\to R$ are un punct de maxim global în interiorul lui I, atunci f este o constantă.

Probleme

I. Se consideră funcţia $f:\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\to R$ definită prin $f(x)=\cos x$.

1) Fie $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ unghiurile unui triunghi ascuţit-unghic exprimate în radiani. Să se probeze că $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ implică $(\beta-\alpha)\cos\alpha+(\gamma-\alpha)\cos\beta+(\gamma-\beta)\cos\gamma<2$.

(GMB, Adrian Ghioca)

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se verifice că

$$(x_2-x_1)\sin x_1 \leqslant \cos x_1-\cos x_2 \leqslant (x_2-x_1)\sin x_2,\ \forall x_1,\ x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Soluţie. 1) Se observă că $f'(x)=-\sin x$ şi $f''(x)=-\cos x\leqslant 0$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, De aceea f este concavă.

Pe axa Ox şi respectiv pe graficul $G(f)$ considerăm punctele $A(\alpha, 0)$, $A'(\alpha, \cos\alpha)$; $B(\beta, 0)$, $B'(\beta, \cos\beta)$; $C(\gamma, 0)$, $C'(\gamma, \cos\gamma)$; observăm că suma ariilor trapezelor $AA'B'B$ şi $BB'C'C$ este strict mai mică decît aria domeniului limitat de axe şi $G(f)$. Deci

$$\frac{(\beta-\alpha)(\cos\beta+\cos\alpha)}{2}+\frac{(\gamma-\beta)(\cos\gamma+\cos\beta)}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1,$$

inegalitate echivalentă cu cea din enunţ.

2) Orice funcţie convexă şi derivabilă $f: I\to R$ satisface relaţia $f(x_1)+(x_2-x_1)f'(x_1)\leqslant f(x_2)$, $\forall x_1, x_2\in I$. În particular $f=-\cos$ este convexă şi derivabilă, deci satisface relaţia precedentă.

II. Se consideră funcţia $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to R$ dată prin $f(x)=\operatorname{tg} x$.

1) Să se arate că f şi primitiva lui f sînt funcţii convexe.

2) Să se dovedească dublele inegalităţi

$$(b-a)\frac{1}{\cos^2 a}\leqslant \operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a\leqslant(b-a)\frac{1}{\cos^2 b},\ (b-a)\operatorname{tg} a<\ln\cos a-\ln\cos b<$$

$$<(b-a)\operatorname{tg} b,\ \forall a,\ b\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Soluţie. 1) Se constată că $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ şi $f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\geqslant 0$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, De aceea f este convexă.

Primitiva lui f este funcţia $\varphi:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to R$ definită prin $\varphi(x)=C-\ln\cos x$. Evident $\varphi'(x)=f(x)$ şi $\varphi''(x)=f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}>0$. De aceea φ este strict convexă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

2) Relaţiile din problemă sînt exprimări echivalente cu faptul că f este convexă, iar φ este strict convexă.

III. Se dă funcţia $f: R\to R$ definită prin

$$f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+2px}-pe^{2x},$$

unde p este un parametru real.

1) Să se cerceteze variaţia lui f.

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se arate că

$$pe^{\frac{x}{p}}+qe^{-\frac{x}{q}}\leqslant e^{x^2/8p^2q^2}$$

unde $q=1-p$.

Soluţie. 1) Mai întîi observăm că $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$. Apoi avem

$$f'(x)=(x+2p)e^{\frac{x^2}{2}+2px}-2pe^{2x} \text{ şi } f'(x)=0$$

implică $x=0$. Mai mult

$$f''(x)=e^{2x}\{[1+(x+2p)^2]e^{\frac{x^2}{2}+2px}-4p\}\geqslant 0.$$

De aceea f este convexă şi deci $x=0$ este un punct de minim global. Rezultă următorul tabel de variaţie

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$---$	0	$+++$	
$f''(x)$		$+++$	$+$	$+++$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$1-p$	$\nearrow$	∞

2) Din cele precedente avem $f(x)\geqslant f(0)=1-p$, $\forall x$. Rezultă

$$e^{x^2/2+2px}-pe^{2x}\geqslant 1-p.$$

Notăm $1-p=q$ şi facem substituţia $x\to\frac{x}{2pq}$. Astfel găsim inegalitatea din enunţ.

99. Fie I, J două intervale deschise şi $f: I\to J$ o funcţie pentru care $f(I)=J$. Presupunem că f are derivată nenulă de semn constant pe I.

1) Să se arate că există inversa $\varphi: J\to I$ a lui f şi că pentru orice $x\in I$, $y\in J$, $y=f(x)$, se satisface $f'(x)\varphi'(y)=1$.

2) Să se demonstreze că dacă f admite şi derivată de ordinul doi pe I, atunci pentru orice $x\in I$, $y\in J$, $y=f(x)$ are loc relaţia $\varphi''(y)=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$.

Ce putem spune despre convexitatea lui φ dacă f este convexă?

Indicaţii. 1) Se utilizează identitatea

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Se derivează identitatea $f'(x)\varphi'(y)=1$.

Presupunem că $f''(x)\geqslant 0$ pe I, adică f este convexă. Dacă $f'(x)>0$, adică f este crescătoare, atunci $\varphi'(y)>0$ și $\varphi''(y)\leqslant 0$, adică φ este crescătoare și concavă; dacă $f'(x)<0$, adică f este descrescătoare, atunci $\varphi'(y)<0$ și $\varphi''(y)\geqslant 0$, adică φ este descrescătoare și convexă.

100. Fie $\mathscr{P}$ mulțimea polinoamelor reale P cu coeficienți nenegativi.

1) Să se arate că

$$f(x)=\frac{P(x)}{x^n},\quad x>0,\ n\in N,$$

este convexă.

2) Fie $0<x_0<1$ și $0<\alpha<1$; utilizînd rezultatul precedent să se găsească $m(x_0;\ \alpha)=\inf\limits_{P}\{P'(1)\mid P\in\mathscr{P},\ P(1)=1,\ P(x_2)\leqslant\alpha\}$.

Soluție. 1) Presupunem $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_kx^k$, $a_k\geqslant 0$. Evident $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_kx^{k-n}$ și $f''(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}(k-n)(k-n-1)\,a_kx^{k-n-2}$. Deoarece $(k-n)(k-n-1)\,a_k\geqslant 0$, $\forall k, n$, rezultă că $f''(x)\geqslant 0$, $\forall x>0$.

2) Alegem pe n așa ca $x_0^n\geqslant\alpha>x_0^{n+1}$. Deoarece f este convexă avem

$$f'(1)\geqslant\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}\geqslant\frac{1-\frac{\alpha}{x_0^n}}{1-x_0}=\frac{x_0^n-\alpha}{x_0^n-x_0^{n+1}};$$

Astfel

$$P'(1)=nf(1)+f'(1)\geqslant n+\frac{x_0^n-\alpha}{x_0^n-x_0^{n+1}}$$

și deci

$$m(x_0;\ \alpha)=n+\frac{x_0^n-\alpha}{x_0^n-x_0^{n+1}};$$

Această margine inferioară este un minim deoarece ea este atinsă pentru polinomul

$$P(x)=\frac{x_0^n-\alpha}{x_0^n-x_0^{n+1}}x^{n+1}+\frac{\alpha-x_0^{n+1}}{x_0^n-x_0^{n+1}}x^n.$$

101. *Funcții periodice*

Fie E o mulțime din R și $f: E\to R$ o funcție. Dacă există un număr $T>0$ astfel încît $x+T\in E$, $f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in E$, atunci funcția f se numește *periodică*. De exemplu, funcția lui Dirichlet $f: R\to R$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=\text{rațional}\\ 0, & x=\text{irațional}\end{cases}$$

este periodică. Într-adevăr pentru orice număr rațional r avem $f(x+r)=f(x)$, $\forall x\in R$. Observăm însă că pentru funcția lui Dirichlet nu există $min\ \{r>0|r\in \in Q,\ f(x+r)=f(x),\ \forall x\in E\}$.

Sub rezerva că există, cel mai mic număr $T>0$ cu proprietățile $x+T\in E$, $(x+T)=f(x)$, $\forall x\in E$ se numește *perioada lui f*. În general, o funcție periodică $f: R\to R$, neconstantă, continuă în cel puțin un punct, are perioadă.

Exemple. 1) Funcția $x\to\sin x$ este periodică și are perioada 2π.

2) Funcția $f: R\to R$ dată prin $f(x)=x^2$ nu este periodică.

3) Dacă $f:(a,\ b]\to R$ este o funcție arbitrară, atunci există o funcție periodică $\widetilde{f}: R\to R$ de perioadă $T\in(0,\ b-a]$ astfel încît $\widetilde{f}\,|_{(a\ b)}=f$. Într-adevăr, cu $y=x+n(b-a)$, $x\in(a,\ b]$, $n\in N$, $y\in R$, funcția $\widetilde{f}: R\to R$ definită prin $\widetilde{f}\,(y)= =f(x)$ este periodică și are perioada $min\ \{T|\widetilde{f}(y+T)=\widetilde{f}(y)\}\in(0,\ b-a]$. Funcția f se numește *prelungirea prin periodicitate a lui f*.

4) Fie f, g două funcții periodice. Dacă f are perioada T_1 și g perioada T_2 astfel încît $\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n}\in Q$, $\frac{m}{n}$ — ireductibilă, atunci $f\pm g$, fg pot fi periodice cu perioada $nT_1=mT_2$.

5) Dacă o funcție periodică este derivabilă, atunci derivata sa este o funcție periodică.

102. 1) Să se găsească perioada funcției $f: R\to R$ definită prin $f x)= =\cos(ax+b)$, $a\neq 0$.

Soluție. Deoarece funcția cosinus este periodică și de perioadă 2π avem $\cos(ax+b+2\pi)=\cos(ax+b)$ și deci $\cos\left[a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)+b\right]=\cos(ax+b)$, $\forall x$, adică $T=\frac{2\pi}{a}$.

Fie $T=\frac{2\pi}{|a|}$. Dacă $a>0$, atunci $\cos[a(x+T)+b]=\cos(ax+b+2\pi)= =\cos(ax+b)$. Dacă $a<0$, atunci $\cos[a(x+T)+b]=\cos\left[a\left(x-\frac{2\pi}{a}\right)+b\right]= =\cos(ax+b-2\pi)=\cos(ax+b)$. De aceea $T=\frac{2\pi}{a}$ este perioada lui f.

2) Să se arate că funcția $f: R\to R$ definită prin $f(x)=x-E(x)$ este periodică și să se găsească perioada.

Soluție. Prin definiție $E(x)=n$ pentru $n\leqslant x<n+1$. De aceea $n+1\leqslant \leqslant x+1<n+2$ și deci $E(x+1)=n+1=E(x)+1$. Rezultă $f(x+1)=x+1- -E(x+1)=x+1-E(x)-1=f(x)$, adică f este perioadică. Pe de altă parte, pentru orice număr ε mai mic decît 1 găsim $f(0+\varepsilon)=0+\varepsilon-E(0+\varepsilon)= =\varepsilon-0=\varepsilon$. Deci $f(0+\varepsilon)\neq f(0)$ și ε nu este o perioadă pentru f. Rămîne că 1 este perioada funcției f.

3) Să se găsească toate funcțiile f continue pe $(0,\ \infty)$ pentru care diferența $f(x_1y)-f(x_2y)$ este independentă de y.

(David Shelupsky, Amer. Math. Monthly, 82, nr. 5, 1975)

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. Varianta I. Presupunem că x_1 şi x_2 sînt fixe şi distincte, iar f cu valori reale. Se impune $f(x_1y)-f(x_2y)=c$ (const.), $\forall y\in(0,\ \infty)$. Echivalent, $f(ax)=f(x)+c$, unde $a=\frac{x_1}{x_2}\neq 1$ este o constantă.

Funcţia g definită prin $g(x)=f(e^x)-\frac{cx}{b}$, $b=\ln a$, satisface $g(x+b)=g(x)$, $\forall x\in(0,\ \infty)$. Astfel $f(x)=g(\ln x)+\frac{c}{b}\ln x$.

Invers, se constată că orice funcţie definită prin $f(x)=g(\ln x)+\alpha\ln x$, α=const., g=continuă şi periodică cu perioada $b=\ln\frac{x_1}{x_2}$, are proprietatea dorită.

Varianta II. Fie x_1 şi x_2 variabile, iar f cu valori reale. Deoarece $f(xy)-f(y)$ este independentă de y avem $f(xy)-f(y)=f(x)-f(1)$. Funcţia $g(x)=f(e^x)-f(1)$ satisface ecuaţia lui Cauchy $g(x+y)=g(x)+g(y)$. Deoarece g este continuă avem $g(x)=ax$. Deci $f(x)=\alpha\ln x+\beta$, α, β=constante arbitrare.

103. Fie f o funcţie reală şi continuă aşa ca $\forall x,\ y\in R$, $f(x+y)=\Phi(f(x),\ y)$. Să se arate că f este strict monotonă dacă şi numai dacă nu se reduce la o constantă.

Soluţie. Echivalent, va trebui să arătăm că f nu este strict monotonă dacă şi numai dacă se reduce la o constantă.

Dacă $f(x)=c$, $\forall x\in R$, atunci evident că nu este strict monotonă.

Presupunem acum că f nu este strict monotonă, adică există, $a,\ b\in R$, $a-b=h>0$, aşa ca $f(a)=f(b)$. În baza ipotezei avem $f(a+t)=\Phi(f(a),\ t)=\Phi(f(b),\ t)=f(b+t)$, $\forall t$, adică f este periodică cu perioada h. Pe de altă parte, din faptul că f este continuă şi din $f(a)=f(b)$ rezultă că există $c\in(a,\ b)$ aşa ca $f(c)$ să fie un extrem al lui f pe $[a,\ b]$. Alegem pe ε astfel încît $[c-\varepsilon,\ c+\varepsilon]\cup[a,\ b]$. Deoarece diferenţa $f(x)-f(x+\varepsilon)$ are semne opuse în $x=c$ şi $x=c-\varepsilon$, rezultă că există un punct $a_0\in[c,\ c-\varepsilon]$ în care ea se anulează, adică $f(a_0)=f(a_0+\varepsilon)$. Aceasta înseamnă că funcţia periodică f trebuie să aibă perioada $\varepsilon\neq nh$, $n\in Z$. Acest lucru nu este posibil decît dacă $f(x)=c$, $\forall x$.

104. Soluţie supraabundentă în justificări colaterale

Se consideră polinomul $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Considerînd un interval oarecare $[x_1,\ x_2]$ dat, să se determine $x_0\in(x_1,\ x_2)$ care satisface formula lui Lagrange pentru polinomul $P(x)$. Să se demonstreze că ecuaţia care dă pe x_0 are rădăcinile reale. (*Problemă de concurs.*)

Soluţie. Scriind relaţia lui Lagrange pe intervalul dat, avem

$$\frac{P(x_2)-P(x_1)}{x_2-x_1}=P'(x_0)$$

adică

$$\frac{x_2^3-x_1^3+a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=3x_0^2+2ax_0+b$$

sau

$$3x_0^2+2ax_0-[x_2^2+x_1x_2+x_1^2+a(x_2+x_1)]=0. \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca rădăcinile să fie reale trebuie ca $\Delta=a^2+3(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+3a(x_2+x_1)>0$. Ordonînd expresia lui Δ după puterile lui x_1 obţinem trinomul $\Delta=3x_1^2+3(x_2+a)x_1+3x_2^2+3ax_2+a^2$ al cărui discrminant este $\Delta_1=-3(3x_2+a)^2<0$. Rezultă că Δ păstrează semnul plus pentru orice x_1 şi x_2. De aceea ecuaţia (1) are rădăcini reale.

Comentariu. Un x_0 este real din teorema lui Lagrange. Cum (1) este o ecuaţie de gradul doi, rezultă că şi soluţia a doua este reală.

105. Problemă şi soluţie cu greşeli

Se dau

$$x\to f_\alpha(x)=\frac{x\cos\alpha-\sin\alpha}{x\sin\alpha+\cos\alpha},\quad M_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

Pe mulţimea $\mathcal{F}$ a funcţiilor f se consideră operaţia obişnuită de compunere a funcţiilor, iar pe mulţimea $\mathcal{M}$ a matricelor M_α se consideră operaţia de înmulţire. Mulţimile $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{M}$ se pun în corespondenţă prin $f_\alpha\to M_\alpha$.

1) Fie M_α matricea ataşată lui f_α şi M_β matricea ataşată lui f_β. Să se arate că matricea ataşată lui $f_\alpha\circ f_\beta$ este $M_\alpha M_\beta$. În plus

$$f_\alpha\circ f_\beta=f_{\alpha+\beta},\quad M_\alpha M_\beta=M_{\alpha+\beta}.$$

2) Să se verifice că în mulţimea $\mathcal{F}$ înzestrată cu operaţia de compunere elementul neutru este f_0, iar simetricul unui element f_α este $f_{-\alpha}$. De asemenea, în mulţimea $\mathcal{M}$ înzestrată cu operaţia de înmulţire, elementul neutru este M_0, iar simetricul unui element M_α este $M_{-\alpha}$.

3) Să se arate că operaţia de compunere determină pe $\mathcal{F}$ o structură de grup comutativ; să se arate că operaţia de înmulţire determină pe $\mathcal{M}$ o structură de grup comutativ. (*Problemă de concurs.*)

Soluţie. 1) Funcţiile f_α sînt definite pentru $x\in R-\{-\operatorname{ctg}\alpha\}$. Avem

$$(f_\alpha\circ f_\beta)(x)=f_\alpha(f_\beta(x))=\frac{f_\beta(x)\cos\alpha-\sin\alpha}{f_\beta(x)\sin\alpha+\cos\alpha}=\text{(se înlocuieşte } f_\beta(x) \text{ cu expresia sa), } \frac{x\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)}{x\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)}.$$

Deci $f_\alpha\circ f_\beta=f_{\alpha+\beta}$.

Apoi observăm că

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}=M_{\alpha+\beta},$$

2) Deoarece $f_0(x)=x$, avem $f_0\circ f_\alpha=f_\alpha\circ f_0=f_\alpha$, adică f_0 esfe elementul neutru al compunerii.

Relaţiile $f_\alpha\circ f_\beta=f_\beta\circ f_\alpha=f_0$ sînt echivalente cu $\alpha+\beta=0$. De aceea simetricul lui f_α este $f_{-\alpha}$.

Se observă că $M_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ şi $M_0M_\alpha=M_\alpha M_0=M_\alpha$, adică M_0 este element neutru. Deoarece $M_\alpha M_\beta=M_0\Leftrightarrow\alpha+\beta=0$, elementul simetric al lui M_α este $M_{-\alpha}$.

3) (a) $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta} \in \mathscr{F}$, $M_\alpha M_\beta = M_{\alpha+\beta} \in \mathscr{M}$

(b) $f_\alpha \circ (f_\beta \circ f_\gamma) = f_\alpha \circ f_{\beta+\gamma} = f_{\alpha+(\beta+\gamma)} = f_{\alpha+\beta+\gamma}$, $(f_\alpha \circ f_\beta) \circ f_\gamma = f_{\alpha+\beta} \circ f_\gamma = f_{(\alpha+\beta)+\gamma} = f_{\alpha+\beta+\gamma}$,

din care rezultă asociativitatea. Analog pentru matrice.

(c) Există element neutru: f_0 respectiv M_0.

(d) Simetricul lui f_α este $f_{-\alpha}$; simetricul lui M_α este $M_{-\alpha}$.

(e) $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta} = f_{\beta+\alpha} = f_\beta \circ f_\alpha$,
$M_\alpha M_\beta = M_{\alpha+\beta} = M_{\beta+\alpha} = M_\beta M_\alpha$.

Acestea arată că afirmaţiile din problemă sînt adevărate.

Comentariu (*E. Georgescu — Buzău, G.M.A., nr.* 5, 1972)

(I) Domeniul maxim de definiţie D_α al funcţiei f_α este $R-\{-\operatorname{ctg}\alpha\}$, dacă $\alpha \neq k\pi$, $k \in Z$, şi R dacă $\alpha = k\pi$, $k \in Z$ (R este mulţimea numerelor reale).

(II) Compunerea $f_\alpha \circ f_\beta$ are sens cînd $f_\beta(D_\beta) \subset D_\alpha$. Se constată însă că $f_\beta(D_\beta) = D_{-\beta}$. De aceea compunerea $f_\alpha \circ f_\beta$ este definită numai dacă $D_{-\beta} \subset D_\alpha$. Pe de altă parte această incluziune nu este adevărată decît dacă $\alpha = k\pi$, $k \in Z$ sau $\beta = -\alpha + k\pi$, $k \in Z$.

Deoarece $f_{k\pi} = f_0$ şi $f_{\alpha+k\pi} = f_\alpha$, rezultă că nu sînt definite decît compuneri, de forma $f_0 \circ f_\beta$ şi $f_\alpha \circ f_{-\alpha}$. Deci, pe $\mathscr{F}$ compunerea nu este peste tot definită, fapt care face ca afirmaţiile referitoare la $\mathscr{F}$ făcute la punctul 2) şi 3) să-şi piardă sensul.

(III) În general, egalitatea $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ nu are sens.

(IV) Corespondenţa $f_\alpha \to M_\alpha$ nu este complet precizată deoarece $f_\alpha = f_{\alpha+k\pi}$, $k \in Z$, pe cînd, pentru k impar matricea M_α nu este egală cu

$$M_{\alpha+k\pi} = \begin{bmatrix} (-1)^k \cos\alpha & -(-1)^k \sin\alpha \\ (-1)^k \sin\alpha & (-1)^k \cos\alpha \end{bmatrix},$$

(V) Afirmaţia că f_0 este element neutru este falsă deoarece compunerea $f_\alpha \circ f_0$ nu este definită dacă $\alpha \neq k\pi$, $k \in Z$.

Afirmaţia că simetricul lui f_α este $f_{-\alpha}$ nu are sens din moment ce nu există element neutru.

În concluzie, compunerea funcţiilor nu determină pe $\mathscr{F}$ o structură de grup.

106. Problemă şi soluţie incorectă

Să se calculeze

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{\ln|x^2+3x-3|}{\sin(x^2-5x+4)} \right]^{\frac{\ln|x^2+x-1|}{x^2-3x+2}}$$

fără a se folosi regula l'Hospital. (*Problemă de concurs.*)

Soluţie. Deoarece $|x^2+3x-3| = x^2+3x-3$ pentru x dintr-o vecinătate a lui 1, avem

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+3x-3)}{x^2+3x-4} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Apoi observăm că

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-5x+4)}{x^2-5x+4}=1.$$

De aceea

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln|x^2+3x-3|}{\sin(x^2-5x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x-5}=-\frac{5}{4},$$

Analog pentru x dintr-o vecinătate a lui 1 avem

$$|x^2+x-1)|=x^2+x-1 \text{ şi deci}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+x-1)}{x^2+x-2}=1.$$

Aceasta conduce la

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln|x^2+x-1|}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-2}=-3.$$

Astfel limita căutată este $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-3}=-\frac{64}{125}$.

Comentariu. Pentru rezolvarea unei asemenea probleme (pusă corect!) sînt necesare, mai întîi determinarea submulţimii intervalului $[1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon]$ pe care există $f(x)$ şi apoi stabilirea faptului că 1 este un punct de acumulare pentru această submulţime.

Tabelele

x	$1-\varepsilon$	1	$1+\varepsilon$
$\lvert x^2+3x-3\rvert$	$1-\delta$	1	$1+\delta$
$\ln\lvert x^2+3x-3\rvert$	$-$	0	$+$

x	$1-\varepsilon$	1	$1+\varepsilon$
x^2-5x+4	$+$	0	$-$
$\sin(x^2-5x+4)$	$+$	0	$-$

arată că funcţia u: $[1-\varepsilon,\ 1)\cup(1,\ 1+\varepsilon]\to R$ definită prin $u(x)=\frac{\ln|x^2+3x-3|}{\sin(x^2-5x+4)}$ are valori negative. Mai mult, găsim $\lim\limits_{x\to 1} u(x)=-\frac{5}{4}$.

Analog tabelele

x	$1-\varepsilon$	1	$1+\varepsilon$
$\lvert x^2+x-1\rvert$	$1-\delta$	1	$1+\delta$
$\ln\lvert x^2+x-1\rvert$	$-$	0	$+$

x	$1-\varepsilon$	1	$1+\varepsilon$
x^2-3x+2	$+$	0	$-$

arată că funcţia v: $[1-\varepsilon,\ 1)\cup(1,\ 1+\varepsilon]\to R$ definită prin $v(x)=\frac{\ln|x^2+x-1|}{x^2-3x+2}$ are tot valori negative. În plus, deducem că $\lim\limits_{x\to 1} v(x)=-3$.

Scanned with OKEN Scanner

Baza u fiind strict negativă, v fiind strict negativ, existența lui u^v impune $v=-n$, $n\in N$. Dar mulțimea $E=\{x|\ x\in[1-\varepsilon,\ 1)\cup(1,\ 1+\varepsilon],\ v(x)=-n,\ n\in N\}$ este cel mult discretă (sau vidă sau formată din puncte izolate). Astfel, 1 nu poate fi punct de acumulare pentru E și deci problema limitei în 1 pentru u^v nu are sens. De altfel în manuale (*vezi* [1], [2]) se arată numai că „dacă $f\geqslant 0$ și dacă puterea $[\lim_{x\to x_0} f(x)]^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ are sens, atunci funcția f^g are limită în x_0 și $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=[\lim_{x\to x_0} f(x)]^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$".

107. Primitive „elementare"

I. Fie funcția $f:(a,\ b)\to R$, $(a,\ b)\subset R$. Funcția F este primitiva lui f pe $(a,\ b)$, dacă oricare ar fi $x\in(a,\ b)$, se satisface $F'_s(x)=f_s(x)$, $F'_d(x)=f_d(x)$; indicii s, d indică valorile la stînga, respectiv la dreapta.

Dacă f este continuă în $x\in(a,\ b)$, atunci $F'(x)=f(x)$.

II. O funcție $f:(a,\ b)\to R$ este elementară, dacă este obținută prin compuneri de funcții elementare sau ca rezultat al operațiilor aditivă și multiplicativă cu funcții elementare.

Clase de funcții elementare se consideră următoarele funcții, definite pe mulțimea maxim posibilă: funcții întregi — polinoame, exponențiale, funcții raționale și iraționale, funcții logaritmice, funcții circulare (trigonometrice) directe și inverse, funcții hiperbolice.

Rezultă deci că derivata unei funcții elementare este tot o funcție elementară. În cazul existentei primitivelor nu se mai satisface o proprietate analogă; spre exemplu, se știe [1], [2] că următoarele primitive nu sînt funcții elementare:

$$\int e^{-x^2}\,dx,\ \int \sin x^2\,dx,\ \int \cos x^2\,dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx,\ \int \frac{dx}{\ln x}\ \text{etc.}$$

Este natural să se pună întrebarea dacă există un algoritm prin care să se stabilească dacă primitiva unei funcții elementare date este tot o funcție elementară sau nu. Răspunsul la această întrebare este negativ și fundamentarea poate fi găsită în: D. Richardson, *Some undecidable problems involving elementary functions of a real variable*, J. Simbolic Logic, 33(1968), 514—520.

III. Ca procedee de calcul în determinarea primitivelor se reținprocedeul integrării prin părți și schimbarea variabilei de integrare (metoda substituției).

1°. Să se determine primitivele $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Soluție. Se face schimbarea variabilei $t=x^4$; $x^3dx=\frac{1}{4}\,dt$ și $F(x(t))=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Luînd $\sqrt{1+t^2}=u-t$, rezultă $t=\frac{u^2-1}{2u}$, $dt=\frac{u^2+1}{2u^2}\,du$ și în noua variabilă, primitivei îi corespunde $\varphi(u)=\int\frac{du}{u}=\ln u$.

Revenind, se obțin primitivele $x \to \ln(x^4+\sqrt{1+x^8})+c$. Observăm că în acest caz primitiva poate fi definită pe întreag R.

2°. Aceeași problemă pentru $\int \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$.

Soluție. Observăm că în acest caz domeniul maxim de existență a primitivei este intervalul $(-1, +1)$. Integrînd prin părți, rezultă

$F(x)=x \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}+4\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$. Se descompune în fracții simple:

$$\frac{x^2}{1-x^4} \equiv \frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}+\frac{Cx+D}{1+x^2};$$

atribuind domeniului de definiție succesiv, prin prelungire continuă, punctele $x=1$, $x=-1$, se determină

$$A=\left.\frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)}\right|_{x=1}=\frac{1}{4},$$

$$B=\left.\frac{x^2}{(1-x)(1+x^2)}\right|_{x=-1}=\frac{1}{4}.$$

Pentru $x=0$, din identitate rezultă $0=A+B+D$ și $D=-\frac{1}{2}$; amplificînd identitatea cu x și trecînd la limită pentru $x \to \infty$, se obține $0=-A+B+C$ $C=0$. În final

$$\frac{x^2}{1-x^4} \equiv \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)-\frac{1}{2(1+x^2)}$$

și o primitivă este

$$F(x)=x \ln \frac{1-x^2}{1+x}+\ln \frac{1+x}{1-x}-2 \operatorname{arctg} x.$$

3°. Să se verifice că funcțiile

$$x \to F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$x \to G(x)=\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$$

sînt primitive ale funcției $x \to f(x)=\frac{1}{1+\cos^2 x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Pot fi folosite ambele funcții F și G pentru a calcula integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ cu ajutorul formulei Leibniz—Newton? $\left(a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Soluție. Se observă că funcțiile

$F:\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\to R$, $G:\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\to R$ sînt derivabile. De asemenea

$$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{2\cos^2 x}{1+\cos^2 x}}}\left(\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\right)'=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}}}\frac{-\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x\frac{-2\cos x\sin x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}}{1+\cos^2 x}=\frac{1}{1+\cos^2 x},\quad \forall x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$G'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{2+\operatorname{tg}^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{1+\cos^2 x},\quad \forall x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Deci $F'(x)=G'(x)=f(x)$, $\forall x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, iar f este continuă. De aceea F și G sînt primitive ale lui f (diferă cel mult printr-o constantă) și pot fi ambele folosite pentru calculul integralei din problemă.

Din $F(x)=G(x)+C$, $\forall x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru $x=\frac{\pi}{4}$ găsim $C=0$, deoarece $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. Rezultă $F=G$.

108. Fie $x\to F(x)=\frac{x+1}{x^2-x+1}$.

1) Să se arate că formula de medie după Lagrange aplicată funcției F pe $[0, 1]$ este satisfăcută pentru un singur punct intermediar $t\in(0, 1)$.

2) Să se determine $f(z)=\int_1^z \frac{F(x)}{x}\,dx$ și să se calculeze $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

Soluție. 1) Din formula lui Lagrange $F(1)-F(0)=F'(t)(1-0)$, rezultă $1=F'(t)$. Deoarece ultima ecuație devine $t^4-2t^3+4t^2-1=0$, pentru $P(t)=t^4-2t^3+4t^2-1$ se aplică șirul lui Rolle: ($P'(t)=0$ are rădăcina reală $t=0$, pe care o eliminăm)

t	$-\infty$		0		1		∞
$P(t)$	$+$		$-$		$+$		$+$

Rezultă că există $t_1\in(0, 1)$, unic, care satisface $F'(t_1)=1$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Cu descompunerea în fracții simple, $\frac{x+1}{x(x^2-x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{2-x}{x^2-x+1}$, rezultă că

$$f(z)=\ln x\Big|_1^z+\int_1^z\frac{2-x}{x^2-x+1}\,dx=\ln z-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)\Big|_1^z+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_1^z=$$

$$=\ln\frac{z}{\sqrt{z^2-z+1}}+\sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right),\ \text{iar}\ \lim_{z\to\infty}f(z)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

109. Pentru șirul

$$n\to u_n(x)=\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{2n-1}}{1-x+x^2-\ldots+(-1)^{2n+p-1}x^{2n+p-1}},\quad x\geqslant 0,\ x\neq 1,\ p\in N,\ \text{dat, se cere:}$$

1) Să se determine funcția

$$x\to f_p(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x);$$

2) Să se arate că dacă $g(t)=\int_2^t f_1(x)dx$, $t\in(2,\infty)$, atunci $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^\varepsilon}=0$, oricare ar fi $\varepsilon>0$;

3) Să se integreze ecuația diferențială

$x(1-x^2)y'+py(1-x^2)-2xy=0$; $f_p(x)$ (de la punctul 1)) este o soluție particulară a acestei ecuații?

Soluție. 1) $u_n(x)=\frac{(1-x^{2n})(1+x)}{[1-(-1)^p x^{2n+p}](1-x)}$; pentru $0<x<1$, $x^{2n}\to 0$ și deci $u_n(x)\to\frac{1+x}{1-x}$; pentru $x>1$, $x^{2n}\to\infty$ și rezultă $u_n(x)\to\frac{(-1)^p(1+x)}{x^p(1-x)}$. S-a obținut

$$f_p(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in[0,\ 1),\\[2ex] \dfrac{(-1)^p(1+x)}{x^p(1-x)}, & x\in(1,\infty).\end{cases}$$

2) Pentru $p=1$ se obține $f_1(x)=-\frac{1+x}{x(1-x)}$ și $g(t)=-\int_2^t\frac{1+x}{x(1-x)}\,dx$; folosind teorema lui l'Hospital

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^\varepsilon}=\lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{1+t}{t(1-t)}}{\varepsilon t^{\varepsilon-1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{\varepsilon t^\varepsilon(t-1)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\varepsilon t^\varepsilon}=0.$$

3) Ecuația este cu variabile separabile

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2dx}{1-x^2}-p\int\frac{dx}{x}+\ln C$, sau $\ln y=\ln\frac{C(1+x)}{(1-x)x^p}$; $y(x)=\frac{(1+x)C}{(1-x)x^p}$ devine $f_p(x)$, dacă $C=(-1)^p$; rezultă restricțiile $f_{2k+1}:(1,\infty)\to R$, $f_{2k}:[0,1)\to R$.

Scanned with OKEN Scanner

110. Fie intervalul $I=(0, a)$, unde $a\in(0, 1)$. Să se găsească toate funcţiile continue $f: I\to R$ care satisfac respectiv

1) $f(xy)=xf(y)+yf(x)$
2) $f(xy)=xf(x)+yf(y)$

(*The Amer. Math. Monthly*, 1972)

Soluţie. 1) Fie $g(x)=f(x)/x$. Rezultă $g(xy)=g(x)+g(y)$ şi este cunoscut că aceasta implică $g(x)=C\log x$. Astfel $f(x)=C\,x\log x$.

2) Să arătăm că $f(x)=0$, $\forall x\in I$. Pentru aceasta ne servim de faptul că, produsul a două elemente din I aparţine lui I.

Înlocuirile $y=x$, x^2, x^3 ne dau

$$f(x^2)=2xf(x),$$
$$f(x^3)=xf(x)+x^2f(x^2)=(x+2x^3)f(x),$$
$$f(x^4)=xf(x)+x^3f(x^3)=(x+x^4+2x^6)f(x)\ldots$$

Pe de altă parte $x^4=x^2x^2$ şi deci

$$f(x^4)=2x^2f(x^2)=4x^3f(x).$$

Din aceasta rezultă că $f(x)=0$, exceptînd eventual cazurile cînd se verifică ecuaţia $2x^6+x^4+x=4x^3$. Cu alte cuvinte $f(x)=0$, excepţie făcînd cel mult un număr finit de puncte x din I. Observăm însă că ipoteza $f(t)\neq 0$ implică $f(t^2)\neq 0$ şi astfel ar exista o infinitate de puncte în care $f(x)\neq 0$; rămîne că $f(x)=0$, $\forall x\in I$.

111. Se consideră $2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)+f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=x$.

1) Să se determine $f(x)$.
2) Să se calculeze $f^{(n)}(x)$.
3) Să se cerceteze convergenţa şirului $a_n=\frac{1}{f^{(n)}(-1)}$.
4) Să se determine primitiva funcţiei

$$x\to g(x)=\sqrt{f(x)}.$$

Soluţie. 1) Dacă $\frac{x-2}{x+1}=t$, atunci $2f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2+t}{1-t}$; dacă înlocuim pe t cu $\frac{1}{t}$, atunci $2f\left(\frac{1}{t}\right)+f(t)=-\frac{1+2t}{1-t}$. Amplificînd prima ecuaţie cu -2 şi adunînd la a doua, rezultă $f(t)=-\frac{1}{3}\frac{4t+5}{t-1}$.

2) $f'(x)=3(x-1)^{-2}$; $f''(x)=3(-1)2!\,(x-1)^{-3}$; prin inducţie completă rezultă, $f^{(n)}(x)=\frac{3(-1)^{n-1}n!}{(x-1)^{n+1}}$, deoarece f este indefinit derivabilă.

Scanned with OKEN Scanner

3) $f^{(n)}(-1)=\frac{3n!(-1)^{n-1}}{2^{n+1}(-1)^{n+1}}=\frac{3n!}{2^{n+1}}=a_n^{-1}$.

Deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{n+1}<1$, $n>1$, rezultă că $(a_n)_{n\in N}$ este descrescător, iar din $a_n>0$, rezultă că este mărginit inferior; înseamnă că este convergent, $a_n\to a$. (Se poate arăta că $a=0$, trecînd la limită în relaţia $a_{n+1}=\frac{2}{n+1}a_n$.)

4) Se determină primitiva

$\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sqrt{\frac{4x+5}{1-x}}\,dx$ pentru $x\in\left[-\frac{5}{4},1\right)$.

Făcînd schimbarea de variabilă $z=\sqrt{\frac{4x+5}{1-x}}$, rezultă $x=\frac{z^2-5}{z^2+4}$, iar $\frac{18}{\sqrt{3}}\int\frac{z^2dz}{(z^2+4)^2}$ se integrează prin părţi şi rezultă $\int g(x)dx=-\frac{9}{\sqrt{3}}\frac{z}{z^2+4}+\frac{9}{2\sqrt{3}}\cdot$ $\cdot\operatorname{arctg}\frac{z}{2}+C$, unde $z=\sqrt{\frac{4x+5}{1-x}}$.

112. Fie ecuaţia $f(a-x)=f'(x)$, $a\in R$, unde f este o funcţie derivabilă de două ori pe R.

1) Să se determine soluţia particulară care satisface $f(0)=0$, $f'(0)=1$; să se calculeze:

2) $S=\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)f\left((n-k)\frac{\pi}{n}\right)$;

3) $P=\prod_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$;

4) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P}$.

Soluţie. 1) Derivînd în raport cu x, $-f'(a-x)=f''(x)$; folosind şi ecuaţia rezultă $-f'(a-x)=-f(a-a+x)$. Din cele două egalităţi rezultă ecuaţia diferenţială: $f''+f=0$ cu soluţia generală $f(x)=A\cos x+B\sin x$; cu condiţiile iniţiale din enunţ rezultă soluţia particulară $f(x)=\sin x$.

2) $f\left(\frac{k\pi}{n}\right)f\left(\pi-\frac{k\pi}{n}\right)=\sin^2\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{2k\pi}{n}$,

$S=\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}+\frac{1}{2}$. Se calculează $S_1=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}$, utilizînd, spre exemplu, $S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$; $S_1+iS_2=\sum_{k=1}^{n-1}z^k$, unde $z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$.

Rezultă că $S_1+iS_2=\frac{z^n-1}{z-1}=z^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{z^{\frac{n}{2}}-z^{-\frac{n}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}=z^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{2\sin\pi}{2\sin\frac{\pi}{n}}=0$. Deci $S_1=0$ şi $S=\frac{n}{2}$.

3) Considerăm descompunerea în factori $z^n-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-z_k)$, $z_k=$ $=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ și folosim limita $\lim_{z\to 1}\frac{z^n-1}{z-1}$; $n=\lim_{z\to 1}\frac{z^n-1}{z-1}=$ $=\prod_{k=1}^{n-1}|1-z_k|=\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{\pi k}{n}\left|\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right|=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$; deci $P=\frac{n}{2^{n-1}}$.

4) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\frac{1}{2}$.

113. Se dă polinomul

$$y_n(x)=\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{x}{1!}+1,\ x\in R,\ n\in N.$$

1) Să se arate că $y_n(x)$ nu are rădăcini multiple.

2) Considerînd că dacă $\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y(x)$, atunci și $\lim_{n\to\infty}y_n'(x)=y'(x)$, pentru $x\in R$, se cere să se determine $y(x)$.

Soluție. 1) Se verifică relația $y_n(x)-y_n(x)=\frac{x^n}{n!}$, $x\in R$, $n\in N$. Condiția ca $y_n(x)$ să aibă rădăcini multiple este ca $y_n(x)$ și $y'_n(x)$ să aibă rădăcini comune. Din relația verificată rezultă că singura rădăcină comună posibilă este $x=0$; dar $y_n(0)\neq 0$.

2) Trecînd la limită după $n\to\infty$ în relația verificată pentru $x\in R$, rezultă $y(x)-y'(x)=0$; se separă variabilele, $\frac{dy}{y}=dx$ și integrînd se obține soluția $y(x)=Ce^x$. Deoarece $y_n(0)=1$, $\forall n\in N$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}y_n(0)=y(0)=1$; Cu această condiție se obține $y(x)=e^x$.

139. Se consideră ecuația diferențială $xy'+(x-p)y=0$, $p\in N$, dat.

1) Să se determine soluția $y=f(x)$ care satisface condiția inițială $y(1)=\frac{1}{e}$, pentru $x\in[0,\infty)$.

2) Să se reprezinte grafic funcția $x\to y=f(x)$.

3) Să se calculeze aria mărginită de graficul funcției $x\to y=f(x)$ și de axa Ox, $x\geqslant 0$.

Soluție. 1) Se separă variabilele $\frac{dy}{y}=\left(\frac{p}{x}-1\right)dx$ și se integrează; $\ln y=\ln x^p-x+C_1$, sau $y=Cx^pe^{-x}$. Cu condiția inițială, rezultă $C=1$ și deci $f(x)=x^pe^{-x}$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, graficul are asimptota orizontală $y=0$. $f'(x)=x^{p-1}e^{-x}(p-x)$ și pentru $p>1, f'(0)=0$; $f(0)=0$. Funcția f are un punct de maxim în $x=p$; $f(p)=p\ e^{-p}$. Tabelul de variație și graficul (fig. 140):

x	0		p		∞
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$f(p)$	↘	0

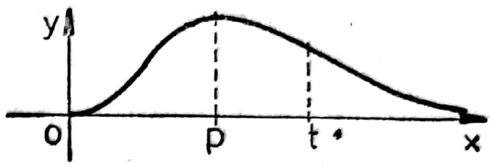


Fig. 140.

3) Fie arbitrar, $t>0$; se calculează

$$A(t)=\int_0^t f(x)dx=-t^p\ e^{-t}+p\int_0^t x^{p-1}e^{-x}dx=-e^{-t}(t^p+pt^{p-1}+p(p-1)t^{p-2}+\ldots+$$

$$+\ldots p!t+p!)+p!$$ și apoi $A=\lim_{t\to\infty} A(t)=p!$.

114. Se consideră ecuația diferențială

$$(1-x^2)y''-2xy'=0.$$

1) Să se determine soluția generală (integrala generală), folosind substituția $y'=u$.

2) Să se arate că $x\to\operatorname{argth} x$ este soluție a ecuației și să se afle pentru ce valori ale constantelor arbitrare, rezultă din soluția generală. (*Examen Cambridge, text modificat.*)

Soluție. 1) Cu substituția specificată, ecuația devine $(1-x^2)\frac{du}{dx}-2xu=0$, care este o ecuație diferențială cu variabile separabile: $\frac{du}{u}=\frac{2xdx}{1-x^2}$ și $u=\frac{C_1}{1-x^2}$. Integrînd încă o dată ecuația $y'=\frac{C_1}{1-x^2}$ rezultă $y=C_1\int\frac{dx}{1-x^2}+C_2$, sau $y=\frac{C_1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C_2$.

2) Deoarece $\operatorname{th} x=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, iar ecuația $y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ determină explicitarea lui x sub forma $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$, rezultă $x\to\operatorname{arg\,th} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. Ultima funcție admite pe $(-1, 1)$ derivate de orice ordin; derivînd și înlocuind în ecuația dată se constată verificare și deci $\operatorname{arg\,th} x$ este soluție.

Soluția $y=\operatorname{arg\,th} x$ se obține pentru $C_1=1$, $C_2=0$.

115. *Sume Riemann-Darboux*

I. Pentru $[a, b]\subset R$, submulțimea $d_n=\{x_0=a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=b\}$ este o diviziune; $d_n\in\mathscr{D}$, unde $\mathscr{D}$ este mulțimea diviziunilor inte valului $[a, b]$ (mulțimea submulțimilor cel mult numărabile din $[a, b]$, care conțin și punc-

tele a, b). Norma unei diviziuni d_n este $\gamma(d_n)=\max\limits_{i\in\overline{0,\ n-1}}(x_{i+1}-x_i)$. Se consideră $\xi_i\in[x_i,\ x_{i+1}]$, $i\in\overline{0,\ n-1}$; $\sigma_{d_n}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\,(x_{i+1}-x_i)$ este suma Riemann atașată funcției f pe $[a,\ b]$ pentru diviziunea d_n și punctele intermediare $(\xi_i)_{i\in\overline{0\ n-1}}$. Dacă $f:[a,\ b]\to R$ este mărginită și se alege ξ_i încît $f(\xi_i)=\inf f(x)$, $x\in[x_i,\ x_{i+1}]$, $i\in\overline{0,\ n-1}$, atunci $\sigma_{d_n}=s_{d_n}$ și se numește *suma inferioară Darboux* a funcției f, corespunzătoare diviziunii d_n a intervalului $[a,\ b]$. Analog, $S_{d_n}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}M_i(x_{i+1}-x_i)$, unde $M_i=\sup\limits_{x}f(x)$, $x\in[x_i,\ x_{i+1}]$ este *suma superioară Darboux*.

1°. Se dă $x\to f(x)=\sin x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Să se calculeze sumele Darboux pentru o diviziune uniformă d_n a lui $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $n\in N$, dat.

2) Să se arate prin calcul că $S_{dn}-s_{dn}\to 0$ pentru un șir de diviziuni uniforme $(d_n)_{n\in N}\subset\mathcal{D}$, avînd șirul normelor $\gamma(d_n)\to 0$.

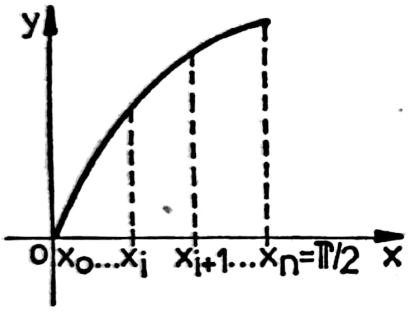


Fig. 141.

Soluție. 1) Deoarece funcția este strict crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, rezultă $\inf\limits_{x}f(x)=f(x_i)$, $x\in[x_i,\ x_{i+1}]$, $\sup\limits_{x}f(x)=f(x_{i+1})$, $x\in[x_i,\ x_{i+1}]$, $\gamma(d_n)=\frac{\pi}{2n}$ și $s_n=\frac{\pi}{2n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{2n}$, $S_n=\frac{\pi}{2n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sin\frac{(i+1)\pi}{2n}$ (fig. 141).

2) Se observă că $S_n=s_n+\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2}$; deci $S_n-s_n=\frac{\pi}{2n}\to 0$ pentru $n\to\infty$ (deoarece $(d_n)_{n\in N}$ sînt diviziuni uniforme, $(\gamma(d_n)\to 0)\Leftrightarrow(n\to\infty)$).

II. Funcția f: $[a,\ b]\to R$ este integrabilă Riemann pe $[a,\ b]$, dacă $(\exists I\in R)$ $(\forall(d_n)_{n\in N}\in\mathcal{D})\wedge(\gamma(d_n)\to 0)\wedge(\forall\,\xi_i\in[x_i,\ x_{i+1}],\ i\in\overline{0,\ n-1})\Rightarrow(\sigma_{d_n}\to I)$;

$I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ este integrala Riemann a funcției f pe $[a,\ b]$. Se satisface $s_{d_n}\leqslant I\leqslant S_{d_n}$, $\forall d_n\in\mathcal{D}$.

III. Dacă f: $[a,\ b]\to R$, f — continuă pe $[a,\ b]$, atunci există $\xi\in[a,\ b]$, încît $\int\limits_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$. (Formulă de medie pentru cazul cînd f — continuă.)

2°. Fie $x\to g(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2}$.

1) Să se calculeze g', pornind de la definiția derivatei.

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se aproximeze prin lipsă și prin adaos $g(x)=\operatorname{arctg} x$ în $x=4$.

3) Să se stabilească o formulă de aproximare pentru π, astfel ca eroarea absolută să fie mai mică decît 10^{-3}.

Soluție. 1) Fie $x_0\in R$, $x_0\neq 0$, arbitrar.

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{1+t^2}}{x-x_0}=\lim_{x_0\to x_0}\frac{(x-x_0)\frac{1}{1+\xi^2}}{x-x_0}=\lim_{\xi\to x}\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{1}{1+x_0^2};$$

$$(\xi\in[x,\ x_0] \text{ sau } \xi\in[x_0,\ x])$$

Cum $x_0\in[a,\ b]$, arbitrar, rezultă că $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$;

2) $g(4)=\int_0^4\frac{dt}{1+t^2}$; oricare ar fi $d_n\in\mathscr{D}([0,\ 4])$ se satisface $s_{d_n}\leqslant g(4)\leqslant S_{d_n}$. În particular, pentru $d=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ rezultă că

$$1\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}\right)<g(4)<1\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right),\ \text{adică}\ \frac{73}{85}<\int_0^4\frac{dt}{1+t^2}<\frac{9}{5};$$

3) Fie o diviziune uniformă $d_n\in\mathscr{D}([0,\ 1])$; observăm că $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ și $s_{d_n}<\frac{\pi}{4}<S_{d_n}$. Deoarece $t\to f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ este descrescătoare pe $[0,\ 1]$, rezultă

$$S_{d_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}f(t_i)+1\right)$$

$$s_{d_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(t_{i+1})=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}f(t_i)+\frac{1}{2}\right)$$

și din relația pentru eroarea absolută

$\frac{\pi}{4}-s_{d_n}<S_{d_n}-s_{d_n}=\frac{1}{2n}<10^{-3}$ se obține rangul minim corespunzător n_0 al diviziunii d_n:

$$\pi-4s_{d_n}<\frac{2}{n}<10^{-3}\ \text{implică}\ n>n_0=2000.$$

Ca formulă de aproximare se poate lua

$$\pi\approx\frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{2}\right),\quad n>2000.$$

Observație. Ultima relație evidențiază viteza slabă a șirului sumelor integrale către integrală.

3°. Fie $x\to f(x)=\ln(1+x)$. Se cere:

1) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

2) Să se determine limita şirului

$$n \to a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \ldots (n+n)},$$

utilizînd rezultatul de la 1).

3) Să se cerceteze comportarea funcţiei e^F într-o vecinătate a lui $x=0$, unde F este o primitivă a funcţiei f.

Soluţie. 1) $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = ((x+1)\ln(1+x)-x) \Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1.$

2) Se determină $b_n = \ln a_n = \ln \frac{1}{n} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)} =$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$; b_n este o sumă integrală pentru o diviziune uniformă $d_n \in \mathcal{D}([0, 1])$ a funcţiei $x \to f(x) = \ln(1+x)$. Deci $\lim_{n\to\infty} b_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx =$

$= 2\ln 2 - 1$ şi $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{e}$.

3) Deoarece $F(x) = (x+1)\ln(1+x) - x$, se obţine $g(x) = (x+1)^{x+1}e^{-x}$. Domeniul de definiţie este $x \in (-1, \infty)$, iar $g(0) = 1$. Din condiţiile $g'(0) = 0$, $g''(0) = 1 > 0$ rezultă că $x = 0$ este punct de minim local al funcţiei g.

4°. Se dă şirul $n \to A_n = \int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,dx$, f — continuă pe $[0, \pi]$. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

Soluţie. Funcţia $x \to |\sin nx|$ are perioada $T = \frac{\pi}{n}$ şi $\int_0^{\pi} |\sin nx|\,dx =$

$= n \int_0^{\pi/n} \sin nx\,dx = 2.$

Se transcrie şirul A_n, aplicînd o formulă de medie,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} f(x)|\sin nx|\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} |\sin nx|\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\,dx = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k), \text{ unde } \xi_k \in \left[\frac{k\pi}{n}, (k+1)\frac{\pi}{n}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $A_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left(k+1\,\frac{\pi}{n} - \frac{k\pi}{n}\right)$ este o sumă Riemann, $n \in N$, arbitrar, rezultă că $A_n \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

5°. Pentru $x \to f(x) = \int_0^x \ln\frac{1-t}{1+t}\,dt$ se cere:

1) să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\arcsin x^2}$;

2) să se determine $f(x)$, calculînd integrala;

3) să se determine limita şirului

$$n \to a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{2n-k}{2n+k}.$$

Soluţie. 1) Deoarece $f(x)\to 0$ pentru $x\to 0$ şi $f'(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ (*vezi* ex. 115,2°) se aplică teorema lui l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\arcsin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{1-x^2}}{1} = -1.$$

2) $f(x) = \int_0^x \ln\frac{1-t}{1+t}\,dt = \left(t\ln\frac{1-t}{1+t} - \ln(1-t^2)\right)\Big|_0^x = x\ln\frac{1-x}{1+x} - \ln(1-x^2).$

3) Şirul $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{2n-k}{2n+k} = 2\,\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{1-\frac{k}{2n}}{1+\frac{k}{2n}}$ este o sumă integrală pentru o diviziune uniformă $d_n \in \mathcal{D}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ şi deci

$$a_n \to 2\int_0^{1/2}\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx = 2\left(x\ln\frac{1-x}{1+x} - \ln(1-x^2)\right)\Big|_0^{1/2} = 2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{3}{4}\right) =$$

$= \ln\frac{16}{27}$, cînd $n\to\infty$.

116. Fie şirul

$$n \to a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2},$$

1) Verificînd că $\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}=\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}-\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}$, să se cerceteze monotonia şi să afle limita şirului.

2) Să se studieze $x\to f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2}$ şi să se arate că $a_{n-1}+\frac{\pi}{2}>\int_0^{n+1} f(x)\,dx>a_n$, $n\in N$.

3) Să se determine primitiva funcţiei f.

Soluţie. 1) Se aplică funcţia tangentă şi rezultă

$$\frac{1}{2k^2}=\frac{\frac{k}{k+1}-\frac{k-1}{k}}{1+\frac{k(k-1)}{k(k+1)}};$$

$$a_n=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}-\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}\right)=\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+2}.$$

Deoarece $a_{n+1}-a_n>0$, $\forall n\in N$, şirul $(a_n)_{n\in N}$ este crescător; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{\pi}{4}$.

2) Funcţia f este definită pentru $x\in R-\{0\}$; $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in R$, $x\neq 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$. Se calculează $f'(x)=\frac{-4x}{1+4x^4}$, $f''(x)=\frac{12x^4-1}{(1+4x^4)^2}$. Urmează tabelul şi graficul (fig. 142):

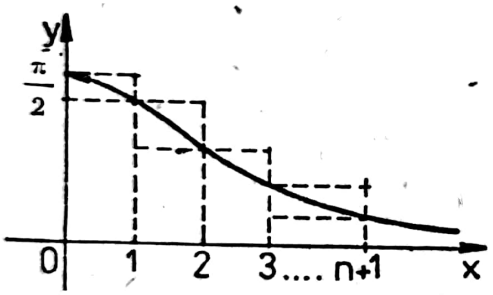


Fig. 142.

x	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$		∞
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$		$\searrow$		0
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Fie o diviziune $d=\{1, 2, \ldots, n+1\}$, n — arbitrar, dar fixat, $n\in N$. Pentru $x\in(k-1, k]$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}\leqslant f(x)<\operatorname{arctg}\frac{1}{2(k-1)^2}\text{ şi deci}$$

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}>\int_0^{n+1} f(x)dx>\sum_{k=1}^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2};$$

majorantul şi minorantul sînt sumele superioară şi inferioară Darboux ale lui f, corespunzătoare diviziunii d.

3) Integrînd prin părţi

$$\int\operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2}\,dx=x\operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2}+4\int\frac{x^2dx}{1+4x^4};$$

folosim descompunerea

$$\frac{x^2}{1+4x^4}=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2x^2-2x+1}-\frac{x}{2x^2+2x+1}\right)$$

şi rezultă

$$\int \operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2}\,dx=x\operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{2x^2-2x+1}{2x^2+2x+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-2x^2}+C.$$

117. Fie $E_n(x)=xC_n^0+\frac{x^2}{2}C_n^1+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^n$, $x\in R$.

Se cere:

1) să se restrîngă $E(x)$;

2) să se rezolve ecuaţia $E_n(x)=0$ şi să se specifice numărul rădăcinilor reale;

3) să se calculeze: $\int_0^1 E_n(x)E_n(-x)dx$.

Soluţie. 1) Deoarece $E_n'(x)=C_n^0+xC_n^1+\ldots+x^nC_n^n$, rezultă $E_n'(x)=(1+x)^n$; integrînd, $E_n(x)=\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}+C$. Deoarece $E(0)=0$, se obţine $E(x)=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}$.

2) Soluţiile ecuaţiei $E_n(x)=0$ sînt:

$$x_k=-1+\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1},\quad k\in\{0,1,\ldots,n\}.$$

Dacă $n=2m+1$, atunci ecuaţia are două soluţii reale, $x=0$, $x=-2$; dacă $n=2m$, ecuaţia are o singură soluţie reală, $x=0$.

3) $E_n(-x)=\frac{(1-x)^{n+1}-1}{n+1}$. Deci

$$A_n=\frac{1}{(n+1)^2}\int_0^1(1-(1+x)^{n+1}-(1-x)^{n+1}+(1-x^2)^{n+1})dx=$$

$$=\frac{1!}{(n+1)^2}-\frac{2^{n+2}+1}{(n+1)^2(n+2)}+\frac{1}{(n+1)^2}\int_0^1(1-x^2)^{n+1}dx.$$

Integrala $I_{n+1}=\int_0^1(1-x^2)^{n+1}dx$ se calculează printr-o formulă de recurenţă; observăm că

$$I_{n+1}=x(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1+2(n+1)\int_0^1(1-x^2)^nx^2dx \text{ şi } I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+3}I_n.$$

118. Se consideră

$$(x, n) \to f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}, \quad x \in R, \quad n \in N.$$

1) Să se arate că şirul $(f_n(x))_{n\in N}$ este mărginit, independent de $x \in R$.

2) Să se reprezinte graficul funcţiei f_n pentru $n \in N$, arbitrar.

3) Pentru $n \in N$ arbitrar, să se calculeze aria mărginită de grafic, axa Ox şi $x=a$, $x=b$, unde $x=a$ este abscisa punctului de intersecţie a graficului cu asimptota sa, iar $x=b$ este abscisa punctului de extrem al funcţiei.

Soluţie. 1) Pentru şirul de funcţii considerat, $(f_n(x))_{n\in N}$, $x \in R$ are loc implicaţia:

$$((\forall n \in N) \wedge (\forall x \in R)) \to |f_n(x)| = f_n(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}-n\right)^2} \leqslant 1.$$

Observaţie. Proprietatea evidenţiată este proprietatea de mărginire uniformă a unui şir de funcţii: fie $f_n: E \to R$, $n \in N$, $E \subset R$; şirul $(f_n(x))_{n\in N}$ este mărginit uniform pe E, dacă

$$(\exists M > 0)\ ((\forall n \in N) \wedge (\forall x \in R) \to |f_n(x)| \leqslant M).$$

2) Pentru $n \in N$, arbitrar, f_n este definită pe R; $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+n^2}$, deci $y = \frac{1}{1+n^2}$ este asimptotă orizontală.

$$f_n'(x) = \frac{2x(1-nx)}{(x^2+(1-nx)^2)^2} \text{ şi } f_n'(x) = 0 \text{ pentru } x = 0,\ x = \frac{1}{n}.$$

Urmează tabelul de variaţie şi graficul (fig. 143):

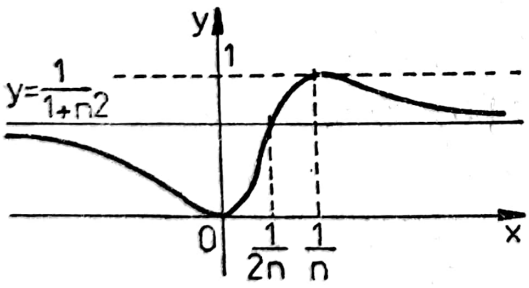


Fig. 143.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	•	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$\frac{1}{1+n^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{1+n^2}$

3) Punctul de intersecţie al asimptotei cu graficul are abscisa $a = \frac{1}{2n}$, deoarece $b = \frac{1}{n}$, rezultă pentru calcularea ariei:

$$A = \int_{1/2n}^{1/n} \frac{x^2 dx}{(1+n^2)x^2-2nx+1} = \frac{1}{1+n^2} \int_{1/2n}^{1/n} \left(1 + \frac{2nx-1}{(1+n^2)x^2-2nx+1}\right) dx = \frac{1}{2n(n^2+1)} +$$

$$+\frac{n}{(n^2+1)^2}\ln(x^2(n^2+1)-2nx+1)\Big|_{1/2n}^{1/n}+\frac{n^2-1}{(n^2+1)^2}\operatorname{arctg}((n^2+1)x-n)\Big|_{1/2n}^{1/n}=$$

$$=\frac{1}{2n(n^2+1)}+\frac{n}{(n^2+1)^2}\ln\frac{4}{n^2+1}+\frac{n^2-1}{(n^2+1)^2}\cdot\operatorname{arctg} n.$$

119. Se consideră funcţia

$$x\to f(x;\ a)=\left(\frac{2-\cos^2 a-2|\sin a|}{1+\sin^2 a}\right)^{\frac{\pi}{4\operatorname{arctg} x}},$$

unde $a\in R$, parametru.

1) Să se determine valorile lui a pentru care f este definită ca funcţie reală de $x\in R$.

2) Să se cerceteze existenţa $\lim\limits_{x\to 0} f(x;\ x)$.

3) Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^{\pi/2} f(1;\ a)\,da.$$

Soluţie. 1) f ia valori reale, dacă $A>0$, $A\neq 1$, unde $A=\frac{(1-|\sin a|)^2}{1+\sin^2 a}$; adică $a\neq k\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x;\ x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{2|\sin x|}{1+\sin^2 x}\right)^{\frac{\pi}{4\operatorname{arctg} x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2|\sin x|\pi}{4\operatorname{arctg} x}}=$

$=e^{-\frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{\operatorname{arctg} x}}$, $l_s=e^{\frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{\sin x}{\operatorname{arctg} x}}=e^{\frac{\pi}{2}}$, $l_d=e^{\frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\sin x}{\operatorname{arctg} x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$. Deoarece $l_s\neq l_d$, nu există $\lim f(x;\ x)$.

3) $\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{2\sin a}{1+\sin^2 a}\right)da=\frac{\pi}{2}+2\int_0^1\frac{dt}{2-t^2}$, unde s-a făcut schimbarea de variabilă $t=\cos a$.

$\int_0^1\frac{dt}{2-t^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\Big|_0^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$ şi deci $\int_0^{\pi/2} f(1;\ a)\,da=\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

120. Se consideră $x\to f(x)=\operatorname{arctg} x-\arcsin x$.

Se cere:

1) reprezentarea grafică a funcţiei f;

2) să se arate (prin calcularea unei limite) că $x=0$ este rădăcină triplă pentru f;

3) să se calculeze aria D, unde

$$D=\{(x,\ y)|\ 0<y<f(x),\ x\in(a,\ b)\subset(-1,\ 1),\ a<0,\ b<0\},$$

pentru cazurile $a=-b$, $a\neq -b$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. 1) $x\in[-1, 1]$ este domeniul de definiţie; pentru determinarea rădăcinilor ecuaţiei $f'(x)=0$ se rezolvă grafic ecuaţia $g(x)=h(x)$, unde $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $h(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Unica soluţie este $x=0$ (rădăcină dublă) (fig. 144). Urmează tabelul de variaţie şi graficul funcţiei f (fig. 145):

x	-1		0		1
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{4}$

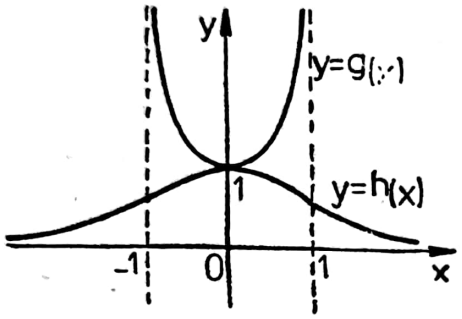


Fig. 144.

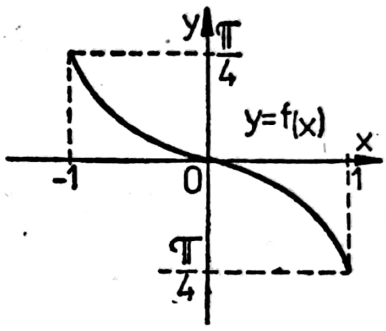


Fig. 145.

2) Dacă $f(x_0)=0$, $u(x_0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{u(x)}=l$, $l\neq 0$, $l<\infty$, atunci rădăcina comună $x=x_0$ are acelaşi ordin de multiplicitate pentru ambele funcţii; se ia $u(x)=x^p$, $p\in N$ şi se calculează

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{px^{p-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-(1+x^2)}{px^{p-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-2x}{p(p-1)x^{p-2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2}{p(p-1)x^{p-3}}=-\frac{1}{2},\ \text{dacă } p=3.$$

Deci $x=0$ este rădăcină triplă a funcţiei f.

3) Dacă $a=-b$, atunci aria $D=2\int\limits_0^b|f(x)|\,dx=-2\int\limits_0^b(\operatorname{arctg}x-\arcsin x)dx=$

$=\ln(1+b^2)+2\sqrt{1-b^2}+2b(\arcsin b-\operatorname{arctg} b)-2$ (s-a efectuat integrarea prin părţi).

Dacă $a\neq -b$, cu notaţiile $\alpha=min(|a|, b)$, $\beta=max(|a|, b)$

$$\text{aria } D=2\int_0^{\alpha}|f(x)|\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|\,dx;$$

primitiva este cea de la cazul anterior.

§ 2. TRIGONOMETRIE. GEOMETRIE

121. Să se rezolve ecuaţiile:

1) $\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x=0$;

2) $2\sin x+\operatorname{tg} 2x=0,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi$;

3) $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} x$;

4) $5\cos x+4\sin x-3\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+5=0$.

Soluţii. 1) Se impune $\cos x\neq 0$; apoi ecuaţia se transcrie $\frac{1+\sin x}{\cos x}=0$. Se observă însă că $1+\sin x=0$, $\cos x\neq 0$ nu pot să aibă loc simultan. De aceea ecuaţia nu are soluţii.

2) Existenţa membrului stîng impune $\cos 2x\neq 0$, adică $x\neq\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Deoarece ecuaţia se transcrie $\frac{2\sin x(\cos 2x+\cos x)}{\cos 2x}=0$, sîntem conduşi la $\sin x(\cos 2x+\cos x)=0$, $x\in[0, 2\pi]-\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$. Din $\sin x=0$ deducem $x\in\{0,\ \pi,\ 2\pi\}$. Din $\cos 2x+\cos x=0$, adică $\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$, găsim $x\in$ $\in\left\{\pi/3,\ \pi,\ \frac{5\pi}{3}\right\}$.

3) Pentru existenţa ambilor membri ai ecuaţiei se pune condiţia $\cos x\sin x\neq 0$. Apoi ecuaţia se aduce la forma echivalentă $(\sin x+\cos x)(\sin x-$ $-\cos x-1)=0$. Din $\sin x+\cos x=0$ găsim $\operatorname{tg} x=-1$, adică $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$. Apoi observăm că $\sin x-\cos x=1$ implică $\cos x\sin x=0$. De aceea ecuaţia iniţială are numai soluţiile $x=-\pi/4+k\pi$, $k\in Z$.

4) Utilizăm substituția $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Mai întîi constatăm că $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$ sînt soluții. Apoi, pentru $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in Z$, ecuația se transcrie în forma $5t^2+10t-3=0$. Rezultă $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{-5+2\sqrt{10}}{5}$, adică $x=2\operatorname{arctg}\frac{-5+2\sqrt{10}}{5}+2l\pi$, $l\in Z$, și $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{-5-2\sqrt{10}}{5}$, adică $x=2\operatorname{arctg}\frac{-5-2\sqrt{10}}{5}+2m\pi$, $m\in Z$.

122. Presupunem că trinomul real $T(x)=x^2+px+q$ are rădăcinile reale distincte x_1 și x_2.

1) Punem $x_1=\operatorname{tg}\alpha$, $x_2=\operatorname{tg}\beta$. Să se arate că expresia $E=\sin^2(\alpha+\beta)+\frac{p}{2}\sin 2(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)+\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\left|\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\right|$ nu depinde de p.

2) Să se determine perechile de numere reale (p, q) pentru care $T(x)=0$ poate admite rădăcinile $x_1=\cos\varphi$, $x_2=\sin\varphi$.

Soluție. 1) Deoarece $x_1\neq x_2$, $x_1, x_2\in R$, se satisface $p^2-4q>0$. Apoi se observă că $\left|\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\right|=|\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta|=|x_1-x_2|=\sqrt{p^2-4q}$, adică $\left|\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}=1$. Cînd $q=1$ se satisface $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$, adică $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi$ și deci $E=2$. Pentru $q\neq1$ se obține $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{p}{q-1}$ și apoi succesiv $E-1=$

$=\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=[\sin(\alpha+\beta)+\frac{p}{2}\cos(\alpha+\beta)]^2+$

$+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\cos^2(\alpha+\beta)=[\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cos(\alpha+\beta)]^2+$

$+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{4}(1+q)^2\cdot\frac{p^2}{p^2+(q-1)^2}+\frac{1}{4}(4q-p^2)\cdot\frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}=q$, adică $E=q+1$

În concluzie, $E=\begin{cases}2 & \text{pentru } q=1\\ q+1 & \text{pentru } q\neq1\end{cases}$; separarea după valorile lui q provine din procedura de rezolvare și deci ea este neesențială.

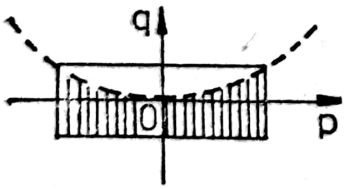


Fig. 146.

2) Prin ipoteză $p^2-4q>0$, $x_1=\cos\varphi$, $x_2=\sin\varphi$, $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$. Din $\cos\varphi+\sin\varphi=-p$ găsim $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=-p/\sqrt{2}$, adică $-1\leqslant-p/\sqrt{2}\leqslant1$ și deci $-\sqrt{2}\leqslant p\leqslant\sqrt{2}$. Pe de altă parte $\sin\varphi\cos\varphi=q$ implică $\sin 2\varphi=2q$ și deci $-1/2\leqslant q\leqslant1/2$. În felul acesta punctele (p, q) trebuie să aparțină mulțimii (fig. 146) caracterizată prin $p^2-4q>0$, $p\in[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $q\in[-1/2, 1/2]$.

123. Se consideră funcția f definită prin

$$f(x)=\frac{\sin x+2\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+2\cos 2x+\cos 3x},$$

Scanned with OKEN Scanner

1) Pentru ce valori ale lui x se poate exprima $f(x)$ prin $\operatorname{tg} x$? Să se explicite exprimarea.

2) Utilizînd exprimarea de la punctul precedent să se rezolve ecuația $f(x)=0$.

Soluție. 1) Se observă că $\sin x+2\sin 2x+\sin 3x=2\sin 2x\cos x+2\sin 2x=$ $=2(1+\cos x)\sin 2x$ și $\cos x+2\cos 2x+\cos 3x=2\cos 2x\cos x+2\cos 2x=$ $=2(1+\cos x)\cos 2x$. De aceea existența lui $f(x)$ impune $\cos 2x\neq 0$ și $1+\cos x\neq 0$, adică $x\in(2k+1)\frac{\pi}{4}$, $k\in Z$ și $x\neq(2l+1)\pi$, $l\in Z$. În aceste condiții $f(x)=\operatorname{tg} 2x$.

Pe de altă parte, $\operatorname{tg} x$ nu există pentru $x=(2m+1)\frac{\pi}{2}$, $m\in Z$; în aceste puncte $f(x)$ nu se poate exprima prin $\operatorname{tg} x$. Mai precis

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, & x\in E-\left\{(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\ m\in Z\right\},\\[2ex] 0, & x=(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\ m\in Z,\end{cases}$$

unde $E=R-(\{2k+1)\pi/4,\ k\in Z\}\cup\{(2l+1)\pi,\ l\in Z\})$.

2) Se observă că $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=0$ are pe $E-\{(2m+1)\pi/2,\ m\in Z\}$ soluțiile $x=$ $=2l\pi$, $l\in Z$. De aceea soluțiile ecuației $f(x)=0$ sînt elementele reuniunii $\{2l\pi,\ l\in Z\}\cup\{(2m+1)\frac{\pi}{2},\ m\in Z\}$.

124. O matrice reală pătratică care satisface condiția ${}^tAA=I$ se numește *matrice ortogonală*. Aceste matrice au următoarele proprietăți:

(1) $\det A=\pm 1$,

(2) ${}^tA=A^{-1}$,

(3) dacă A și B sînt ortogonale, atunci AB este o matrice ortogonală.

Problemă. (I) Să se arate că orice matrice ortogonală de ordinul doi cu determinantul $+1$ poate fi scrisă în forma

$$T(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Apoi să se verifice relația $T(\theta_1)T(\theta_2)=T(\theta_2)T(\theta_1)=T(\theta_1+\theta_2)$ și să se calculeze $T^n(\theta)$, $n\in N$.

(II) Să se verifice că matricea

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$$

este ortogonală.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. (I) Fie $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o matrice ortogonală de ordinul doi cu determinantul $+1$. Deoarece ${}^t\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ este echivalentă cu $a^2+c^2=1$, $ab+cd=0$, $b^2+d^2=1$ şi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$, problema se reduce la a rezolva sistemul

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ ab+cd=0 \\ b^2+d^2=1 \\ ad-bc=1. \end{cases}$$

Se observă că dacă punem $a=\cos\theta$, $c=\sin\theta$, $\theta\in R$, atunci prima ecuaţie este identic satisfăcută. Analog, ecuaţia a treia are familia de soluţii $b=\cos\varphi$, $d=\sin\varphi$, $\varphi\in R$. Se impune ca acestea să verifice ecuaţia a doua şi ecuaţia a patra, adică

$$\cos(\theta-\varphi)=0,\ \sin(\theta-\varphi)=-1.$$

Rezultă $\varphi=\theta-\frac{3\pi}{2}\pmod{2\pi}$ şi deci $b=-\sin\theta$, $d=\cos\theta$ c.c.t.d.

Prin inducţie se găseşte $T^n(\theta)=\begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, $n\in N$.

(II) Se poate folosi faptul că ${}^t(ABC)={}^tC\,{}^tB\,{}^tA$.

125. Ecuaţii trigonometrice liniare

Considerăm ecuaţia (în R),

$$a\cos x+b\sin x=c;\ abc\neq 0,$$

numită *ecuaţia liniară în cos x şi sin x*.

(I) Se observă că există un număr r şi un număr φ astfel încît $a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\varphi)$. Într-adevăr, $r=\sqrt{a^2+b^2}$, iar φ este soluţia sistemului $\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\varphi\in(0,2\pi)-\{\pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2\}$. De aceea ecuaţia dată este echivalentă cu $\cos(x-\varphi)=\frac{c}{r}$, iar aceasta din urmă are soluţiile $x=\varphi\pm\arccos\frac{c}{r}+2k\pi$, $k\in Z$, numai dacă $-1\leqslant\frac{c}{r}\leqslant 1$, adică $a^2+b^2\geqslant c^2$.

Exemple. 1) Fie ecuaţia $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{2}$. Deoarece $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos(x-\pi/6)$, ecuaţia se transcrie $\cos(x-\pi/6)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. De aceea $x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Fie ecuația $\sin(\pi\cos x)-\cos(\pi\cos x)=1$. Înmulțind ambii membri cu $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ecuația ia forma echivalentă $\sin\left(\pi\cos x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Deci $\pi\cos x-\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi$ sau $\cos x=\frac{1}{4}+\frac{(-1)^k}{4}+k$, $k\in Z$. Pentru $k=0$ și $k=\pm1$, obținem $\cos x=\frac{1}{2}$, $\cos x=\pm1$; deci $x=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi$, $x=n\pi$, $m, n\in Z$. Pentru $k\notin\{0, \pm1\}$ numărul $\frac{1}{4}+\frac{(-1)^k}{4}+k$ nu este cuprins între -1 și $+1$ și deci egalitatea $\cos x=\frac{1}{4}+\frac{(-1)^k}{4}+k$ nu este posibilă.

(II) Să comentăm și cazul cînd facem substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Avem $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ cu condiția ca $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in Z$; într-adevăr t nu este definit pentru $\frac{x}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$.

Despărțim discuția în două:

(1) Să presupunem că ecuația admite soluțiile $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$. Deoarece $\cos(2k+1)\pi=-1$, $\sin(2k+1)\pi=0$ și deci $a+c=0$, ecuația se reduce la $a\cos x+b\sin x+a=0$ sau $2\cos\frac{x}{2}\left(a\cos\frac{x}{2}+b\sin\frac{x}{2}\right)=0$. Rezultă că pe lîngă soluțiile $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$ mai are și $x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{b}\right)+l\pi$, $l\in Z$.

(2) Presupunem că ecuația nu admite soluțiile $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$, adică $a+c\neq0$. Rezultă $(a+c)t^2-2bt+c-a=0$, iar această ecuație de gradul doi are soluții reale numai dacă discriminantul este pozitiv sau nul, adică $a^2+b^2\geqslant c^2$.

Precizări. (1) Aceleași observații se fac pentru orice ecuații în care utilizăm substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

(2) Ecuația liniară în $\operatorname{tg}x$ și $\operatorname{ctg}x$, adică $a\operatorname{tg}x+b\operatorname{ctg}x=c$ se reduce la o ecuație liniară în $\cos2x$ și $\sin2x$.

126. Conuri. Ecuații omogene

(I) Fie R^n spațiul euclidian cu n dimensiuni și x, y două puncte din R^n. Mulțimea punctelor de forma $(1-s)x+sy$, $s\in[0, 1]$, este segmentul de dreaptă care unește punctul x cu punctul y și se notează cu xy.

O mulțime A de puncte din R^n se numește *convexă* dacă pentru oricare două puncte ale sale x și y segmentul xy care le unește este inclus în A (fig. 147).

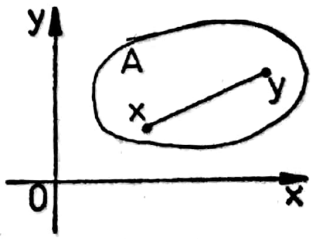


Fig. 147.

Fie x_0 un punct fix din R^n. O mulțime nevidă B de puncte din R^n se numește *con cu vîrful în* x_0 dacă odată cu punctul x conține și punctul $t(x-x_0)$, oricare ar fi $t>0$

Scanned with OKEN Scanner

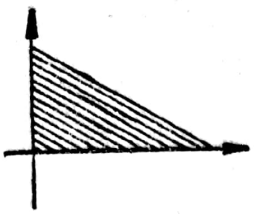


Fig. 148.

(fig. 148). Cu alte cuvinte, mulțimea nevidă B este un con cu vîrful în x_0 dacă și numai dacă odată cu x conține întreaga semidreaptă care unește pe x_0 cu punctul x, cu excepția eventual a vîrfului x_0.

Un con se numește *convex* dacă este o mulțime convexă.

Exemple. 1) Mulțimea $B=\{x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n,\ x_1\geqslant 0\}$ este un con cu vîrful în origine.

2) Mulțimea $A=\{x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n,\ x_n=2\}$ este convexă, dar nu este un con. Într-adevăr, dacă $x=(x_1, \ldots, x_n)\in A$, adică $x_n=2$, și $y=(y_1, \ldots, y_n)\in A$, adică $y_n=2$, atunci $(1-s)x+sy=((1-s)x_1+sy_1, \ldots, (1-s)x_n+sy_n)\in A$ deoarece $(1-s)x_n+sy_n=(1-s)\cdot 2+s\cdot 2=2$. Pe de altă parte $x=(2, \ldots, 2)\in A$, pe cînd $tx=(2t, \ldots, 2t)\notin A$ pentru $t\neq 1$.

3) Mulțimea $B=\{x=(x_1, x_2, x_3)\in R^3,\ x_1\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_2^2\leqslant x_1x_3\}$ este un con convex cu vîrful în origine.

Într-adevăr, se constată că dacă $x=(x_1, x_2, x_3)\in B$, adică $x_1\geqslant 0$, $x_3\geqslant 0$, $x_2^2\leqslant x_1x_3$, atunci $(tx_2)^2\leqslant (tx_3)(tx_3)$, $\forall t>0$ și deci $tx=(tx_1, tx_2, tx_3)\in B$. În plus, $(0, 0, 0)\in B$. Aceasta înseamnă că B este un con cu vîrful în origine.

Fie $x=(x_1, x_2, x_3)\in B$, adică $x_1\geqslant 0$, $x_3\geqslant 0$, $x_2^2\leqslant x_1x_3$ și $y=(y_1, y_2, y_3)\in B$, adică $y_1\geqslant 0$, $y_3\geqslant 0$, $y_1^2\leqslant y_1y_3$. Deoarece $x_1y_3+y_1x_3\geqslant 2\sqrt{x_1y_3y_1x_3}\geqslant 2x_2y_2$ rezultă că $\forall s\in[0, 1]$ avem $((1-s)x_2+sy_2)^2\leqslant ((1-s)x_1+sy_1)((1-s)x_3+sy_3)$ și deci punctul $(1-s)x+sy=((1-s)x_1+sy_1,\ (1-s)x_2+sy_2,\ (1-s)x_3+sy_3)$ aparține lui B, adică B este o mulțime convexă. Dealtfel B (fig. 149) este porțiunea din primul octant mărginită de planele $x_1=0$, $x_3=0$ și suprafața conică $x_2^2=x_1x_3$, care are ecuația canonică $\frac{x_1'^2}{2}+\frac{x_2'^2}{1}-\frac{x_3'^2}{2}=0$, unde $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_3'-x_1')$, $x_2=x_2'$, $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_3'+x_1')$.

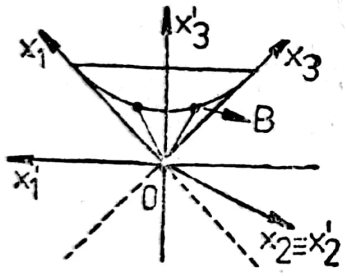


Fig. 149.

(II) Fie B un con din R^n care își conține vîrful. Dacă $n=1$, atunci conul B se reduce la o semidreaptă; dacă $n=2$, atunci conul B se reduce la un unghi plan; dacă $n=3$, atunci conul B mai poartă numele și de *unghi solid*.

Fie un unghi solid dat în spațiul cu trei dimensiuni. Se consideră o sferă de rază R, cu centrul în vîrful unghiului solid și se notează cu σ aria porțiunii din sferă cuprinsă în unghi; se constată că raportul $\frac{\sigma}{R^2}$ este independent de raza sferei și de aceea acest raport se atribuie ca măsură a unghiului solid.

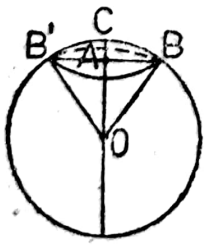


Fig. 150.

Exercițiu. Ce măsură are unghiul solid care ia naștere prin rotirea unui unghi plan, de măsură $\pi/6$, în jurul uneia dintre laturile sale?

Soluție (fig. 150). Fie sfera de rază R cu centrul în vîrful O al unghiului solid. Deoarece $\sphericalangle AOB=\frac{\pi}{6}$ rezultă $AB=\frac{R}{2}$, $OA=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ și $AC=R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Aria calotei pe care se sprijină unghiul

solid este $2\pi R \cdot AC = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. De aceea măsura unghiului solid cu vîrful în O este $\frac{2\pi R^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{R^2} = 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(III) Fie S un con din R^n cu vîrful în origine și $f: S \to R$ o funcție reală. Dacă există un număr real p astfel încît $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t\, f(x, x_2, \ldots, x_n)$, $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$, atunci f se numește *funcție omogenă* iar p se numește *grad de omogenitate*.

Dacă f este o funcție omogenă, atunci ecuația $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ se numește ecuația omogenă. Dacă o astfel de ecuație admite o soluție $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pe S, atunci ea va admite și soluțiile $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$, $t > 0$. De asemenea se observă că dacă $x_i \neq 0$, atunci ecuația omogenă este echivalentă cu o ecuație în $n-1$ necunoscute $\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}$.

În unele probleme de trigonometrie apar funcții omogene în $\cos x$ și $\sin x$ cărora li se atașează ecuații omogene în $\cos x$ și $\sin x$. Studiul soluțiilor unor asemenea ecuații se poate face în felul următor: se verifică dacă $\cos x = 0$ conduce la soluții ale ecuației omogene; apoi, în ipoteza $\cos x \neq 0$, se face substituția $t = \operatorname{tg} x$ care transformă ecuația omogenă în $\cos x$ și $\sin x$ într-o ecuație echivalentă în $t = \operatorname{tg} x$, reducînd astfel dificultățile de natură trigonometrică la dificultăți de natură algebrică.

Exemple. 1) Fie ecuația $\cos^2 2x = 5\cos^3 x \sin x - \cos^4 x$, omogenă în $\cos x$ și $\sin x$ deoarece $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Se observă că $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, nu sînt soluții ale acestei ecuații. De aceea putem împărți în ambii membri cu $\cos^4 x$, găsind $5 \operatorname{tg} x - 1 = (1 - \operatorname{tg}^2 x)^2$ sau $(\operatorname{tg} x - 2)(\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1) = 0$. Din $\operatorname{tg} x = 2$ rezultă $x = \operatorname{arctg} 2 + l\pi$, $l \in Z$; ecuația $\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$ are numai soluția reală $\operatorname{tg} x = a \in (1/2, 1)$ și deci $x = \operatorname{arctg} a + m\pi$, $m \in Z$.

2) Fie ecuația $5\sin^4 x - 10\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 0$. Deoarece $\cos x \neq 0$, ecuația dată este echivalentă cu $5\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$, iar aceasta are soluțiile $x = \pm\frac{\pi}{10} + k\pi$, $k \in Z$, și $x = \pm\frac{3\pi}{10} + l\pi$, $l \in Z$ (*vezi* problema 128).

127. Se consideră ecuația

$$3 + \sin^2 x \cos^2 x - 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + a(\sin^6 x + \cos^6 x) = 0.$$

1) Să se determine valorile lui $a \in R$ pentru care ecuația admite soluții; să se determine soluțiile pentru $a = -9$.

2) Să se verifice afirmația:
dacă $(u, v) \to P_n(u, v)$ este un polinom și termenii săi se pot grupa în polinoame omogene de forma $P_n(u, v) = \sum_{j=1}^{p} E_{n-2k_j}(u, v)$, $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leqslant \frac{n}{2}$, unde $E_{n-2k_j}(u, v)$ este o expresie omogenă de gradul $n-2k_j$ în u și v, atunci ecuația $P_n(\sin x, \cos x) = 0$ este echivalentă cu o ecuație omogenă de gradul

n în $\sin x$ şi $\cos x$, $E_n(\sin x, \cos x)=0$. Ţinînd seama de afirmaţie, să se aducă ecuaţia din enunţ la echivalenta omogenă şi să se reia punctul 1) în acest caz.

Soluţie. 1) Ecuaţia devine $(5-3a)\sin^2 2x+4(a+1)=0$, sau $\sin^2 2x=-\frac{4(a+1)}{3a-5}$; condiţia de existenţă a soluţiei este $0\leqslant\frac{4(a+1)}{3a-5}\leqslant 1$, de unde rezultă $a\in[-9, -1]$. Pentru $a=-9$ ecuaţia devine

$$\sin 2x=\pm 1 \text{ şi } x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in Z, \text{ este soluţia.}$$

2) Ecuaţia se transcrie sub forma

$$3(\sin^2 x+\cos^2 x)^3+(\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^4 x-2\cos^4 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)+$$
$$+a(\sin^6 x+\cos^6 x)=0, \text{ sau } (a+1)\sin^6 x+(a+1)\cos^6 x+8\sin^4 x\cos^2 x+$$
$$+8\sin^2 x\cos^4 x=0.$$

Deoarece $\cos x\neq 0$, se transcrie ecuaţia sub forma

$$(\operatorname{tg}^2 x+1)((a+1)\operatorname{tg}^4 x+(7-a)\operatorname{tg}^2 x+a+1)=0.$$

Discuţia după $a\in R$ se reduce la a impune ca ecuaţia $(a+1)u^2+(7-a)u+1+a=0$ să aibă rădăcini pozitive:

$$\Delta=-(3a^2+22a-45)\geqslant 0,\ P=1>0,\ S=\frac{a-7}{a+1}\geqslant 0, \text{ sau } a\in\left[-9, \frac{5}{3}\right]\cap$$
$$\cap\{(-\infty, -1)\cup[7, \infty)\}=[-9, -1).$$

Se observă că ecuaţia admite soluţie şi pentru $a=-1$, deci $a\in[-9, -1]$. Pentru $a=-9$, ecuaţia devine $-8(u^2-2u+1)=0$, sau $u=1$, rezultă $\operatorname{tg} x=\pm 1$, $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$.

Verificarea afirmaţiei: deoarece $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $P_n(\sin x, \cos x)=\sum_{j=1}^{p}E_{n-2k_j}(\sin x, \cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)^{k_j}$, adică $P_n(\sin x, \cos x)=E_n(\sin x \cos x)$ — polinom omogen de gradul n în $\sin x$ şi $\cos x$.

Menţionăm că afirmaţia rămîne valabilă şi pentru alte tipuri de ecuaţii algebrice.

128. Ecuaţii polinomiale ale căror rădăcini sînt valori ale unor funcţii trigonometrice

În nota „*Equations with trigonometric values as roots*, *The Amer. Math. Monthly* 66(1959), 52–53, Kenneth W. Wegner a precizat cele 64 de ecuaţii polinomiale ireductibile, cu coeficienţi întregi, avînd gradele 2, 3, 4, 5, 6 şi ale căror rădăcini sînt de forma $\pm\sin\alpha$, $\pm\cos\alpha$, $\pm\operatorname{tg}\alpha$, $\pm\operatorname{ctg}\alpha$, $\pm\sec\alpha$, $\pm\operatorname{cosec}\alpha$, unde α este un număr raţional de grade, subliniind că acestea sînt singurele posibile. Dintre acestea 14 sînt de gradul doi, 8 sînt de gradul trei, 18 sînt de gradul patru, 4 sînt de gradul cinci şi 20 sînt de gradul şase. Nu există nici una de gradul şapte.

Scanned with OKEN Scanner

Lăsînd deoparte cele 6 ecuaţii de gradul doi care se referă la 30°, 45° şi 60°, celelalte 58 se obţin din următoarele 22 prin schimbarea rădăcinilor cu opusele lor, cu inversele şi cu opusele inverselor.

Ecuaţii	*Rădăcini*
(1) $4x^2+2x-1=0$	$\sin 18°$, $-\sin 54°$
(2) $x^2-4x+1=0$	$\operatorname{tg} 15°$, $\operatorname{tg} 75°$
(3) $x^2+2x-1=0$	$\operatorname{tg} 45°/2$, $-\operatorname{tg} 135°/2$
(4) $8x^3-6x+1=0$	$\sin 10°$, $\sin 50°$, $-\sin 70°$
(5) $8x^3+4x^2-4x-1=0$	$\sin 90°/7$, $-\sin 270°/7$, $\sin 450°/7$
(6) $5x^4-10x^2+1=0$	$\pm\operatorname{tg} 18°$, $\pm\operatorname{tg} 54°$
(7) $16x^4-16x^2+1=0$	$\pm\sin 15°$, $\pm\sin 75°$
(8) $16x^4+8x^3-16x^2-8x+1=0$	$\sin 6°$, $-\sin 42°$, $-\sin 66°$, $\sin 78°$
(9) $x^4-4x^3-14x^2-4x+1=0$	$\operatorname{tg} 9°$, $-\operatorname{tg} 27°$, $-\operatorname{tg} 63°$, $\operatorname{tg} 81°$
(10) $16x^4-20x^2+5=0$	$\pm\sin 36°$, $\pm\sin 72°$
(11) $8x^4-8x^2+1=0$	$\pm\sin 45°/2$, $\pm\sin 135°/2$
(12) $x^4+8x^3+2x^2-8x+1=0$	$\operatorname{tg} 15°/2$, $\operatorname{tg} 75°/2$, $-\operatorname{tg} 105°/2$, $-\operatorname{tg} 165°/2$
(13) $x^4+4x^3-6x^2-4x+1=0$	$\operatorname{tg} 45°/4$, $-\operatorname{tg} 135°/4$, $\operatorname{tg} 225°/4$, $-\operatorname{tg} 315°/4$
(14) $32x^5-16x^4-32x^3+12x^2+6x-1=0$	$\sin 90°/11$, $-\sin 270°/11$, $\sin 450°/11$, $-\sin 630°/11$, $\sin 810°/11$
(15) $3x^6-27x^4+33x^2-1=0$	$\pm\operatorname{tg} 10°$, $\pm\operatorname{tg} 50°$, $\pm\operatorname{tg} 70°$
(16) $64x^6-96x^4+36x^2-3=0$	$\pm\sin 20°$, $+\sin 40°$, $\pm\sin 80°$
(17) $64x^6-112x^4+56x^2-7=0$	$\pm\sin 180°/7$, $\pm\sin 360°/7$, $\pm\sin 540°/7$
(18) $7x^6-35x^4+21x^2-1=0$	$\pm\operatorname{tg} 90°/7$, $\pm\operatorname{tg} 270°/7$, $\pm\operatorname{tg} 450°/7$
(19) $x^6-12x^5+3x^4+40x^3+3x^2-12x+1=0$	$\operatorname{tg} 5°$, $\operatorname{tg} 25°$, $-\operatorname{tg} 35°$, $-\operatorname{tg} 55°$, $\operatorname{tg} 65°$, $\operatorname{tg} 85°$
(20) $x^6-8x^5-13x^4+48x^3-13x^2-8x+1=0$	$\operatorname{tg} 45°/7$, $-\operatorname{tg} 135°/7$, $\operatorname{tg} 225°/7$, $\operatorname{tg} 405°/7$, $-\operatorname{tg} 495°/7$, $\operatorname{tg} 585°/7$
(21) $64x^6-32x^5-96x^4+48x^3+32x^2-16x+1=0$	$\sin 30°/7$, $\sin 150°/7$, $-\sin 330°/7$, $\sin 390°/7$, $\sin 510°/7$, $-\sin 570°/7$
(22) $64x^6+32x^5-80x^4-32x^3+24x^2+6x-1=0$	$\sin 90°/13$, $-\sin 270°/13$, $\sin 450°/13$ $-\sin 630°/13$, $\sin 810°/13$, $-\sin 990°/13$.

Pentru exemplificare, arătăm cum se poate obţine ecuaţia (19). Se porneşte de la identitatea

$$(3\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha.$$

Ţinînd seama că $\operatorname{tg}15°=2-\sqrt{3}$, găsim ecuaţia

$$(3x^2-1)(2-\sqrt{3})=x^3-3x$$

cu rădăcinile $\operatorname{tg}5°$, $\operatorname{tg}65°$ şi $-\operatorname{tg}55°$. Analog, ţinînd seama că $\operatorname{tg}75°=2+\sqrt{3}$, obţinem ecuaţia

$$(3x^2-1)(2+\sqrt{3})=x^3-3x$$

cu rădăcinile $\operatorname{tg}25°$, $\operatorname{tg}85°$ şi $-\operatorname{tg}35°$. Înmulţind aceste ecuaţii membru cu membru se obţine ecuaţia (19).

Scanned with OKEN Scanner

129. 1) Să se determine întregii k, m, n pentru care

$$\frac{\pi}{4} = k \operatorname{arctg} \frac{m}{n}.$$

(*The Amer. Math. Monthly.* 1972)

Soluţie. Evident $k \neq 0$. De aceea ecuaţia dată se transcrie în forma $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4k} = \frac{m}{n}$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4k} < \frac{\pi}{2}$. Se ştie însă că, pentru r raţional, singurele valori raţionale ale lui $\operatorname{tg} r\pi$ sînt 0 şi ± 1. Deoarece $m=0$ şi $k \in Z-\{0\}$ nu pot avea loc simultan, rămîn numai soluţiile $(k, m, n)=(1, i, i)$ sau $(-1, i, -i)$, unde $i \in Z-\{0\}$.

2) Să se determine numerele raţionale r pentru care există numere raţionale a, b, şi c astfel încît

$$a \sin 2\pi r + b \cos 2\pi r = c.$$

Soluţie. Presupunem că cel puţin unul dintre numerele $\sin 2\pi r$ şi $\cos 2\pi$ nu este raţional, dar există a, b, c, raţionale, nu toate nule, astfel încît

$$a \sin 2\pi r + b \cos 2\pi r = c.$$

Să zicem că $\sin 2\pi r$ nu este raţional. Rezultă că

$$(a^2+b^2) \sin^2 2\pi r - 2ac \sin 2\pi r + c^2 - b^2 = 0,$$

adică $\sin 2\pi r$ este rădăcina unui trinom în care termenul liniar nu se anulează şi în care suma coeficienţilor este pătratul unui număr raţional şi anume $(a-c)^2$. Se ştie însă că (esenţial) trinoamele care au ca rădăcină sinusul (iraţional) unui multiplu raţional de 2π şi care au termenul liniar nenul sînt $4x^2 \pm 2x - 1$ şi $x^2 \pm 2x - 4$. Dintre acestea numai primul are suma coeficienţilor egală cu pătratul unui număr raţional. Astfel, putem presupune $a-c=\pm 1$ şi $ac=1$. Rezultă $c^2 \pm c - 1 = 0$, care nu are soluţii raţionale.

Rămîne că valorile raţionale ale lui r trebuie căutate printre acelea pentru care $\sin 2\pi r$ şi $\cos 2\pi r$ sînt raţionale. Se ştie însă că pentru r raţional, singurele valori raţionale ale lui $\sin 2\pi r$ şi $\cos 2\pi r$ sînt 0, $\pm 1/2$ sau ± 1. Rezultă $r = \frac{m}{2}$, $m \in Z$, sau $r = \frac{2k+1}{4}$, $k \in Z$.

130. 1) Să se exprime $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$ în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ şi $\operatorname{tg}\gamma$.

2) Să se deducă $\operatorname{tg} 3\alpha$ în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$.

3) Să se arate că într-un triunghi nedreptunghic suma tangentelor celor trei unghiuri este egală cu produsul acestor tangente.

Soluţie. 1) Pentru $\alpha+\beta+\gamma \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, succesiv găsim $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\sin\gamma\sin\alpha - \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta}$.

Scanned with OKEN Scanner

Apoi, pentru $\alpha, \beta, \gamma \neq (2l+1)\pi/2$, $l \in Z$, prin împărțirea numărătorului și numitorului cu $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$, obținem

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}.$$

2) Dacă în relația precedentă punem $\alpha=\beta=\gamma$, atunci găsim

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

3) Dacă $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, atunci $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=0$. În plus, dacă α, β, γ sînt unghiurile unui triunghi nedreptunghic, atunci $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma$ au sens și identitatea de la 1) arată că $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

131. Se dă ecuația

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

cu rădăcinile $\operatorname{tg}\frac{A}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{4}$ și $\operatorname{tg}\frac{C}{4}$. Să se arate că dacă A, B și C sînt unghiurile unui triunghi, atunci a, $-b$, c, $-d$ sînt simultan de același semn, iar $a+b=c+d$.

Soluție. Evident $a\neq 0$. Deoarece $\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}=\frac{\pi}{4}$, $A>0$, $B>0$, $C>0$, rezultă

$$0<\sum \operatorname{tg}\frac{A}{4}=-\frac{b}{a},\quad 0<\sum \operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}=\frac{c}{a},$$

$$0<\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}=-\frac{d}{a},$$

și astfel a, $-b$, c, $-d$ sînt simultan pozitive sau simultan negative.

Pe de altă parte, din $\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}=\frac{\pi}{4}$ găsim

$$\frac{\sum \operatorname{tg}\frac{A}{4}-\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}}{1-\sum \operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}}=1.$$

Ținînd seama de relațiile lui Viete deducem $a+b=c+d$.

132. Fie funcția $\theta \to f(\theta)=\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} 4\theta$.

1) Să se arate că, în afară de două, punctele de pe cercul trigonometric corespunzătoare valorilor lui θ pentru care f nu este definită sînt vîrfurile unui octogon regulat. Să se afle aria acestui octogon.

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se verifice că punctele de pe cercul trigonometric corespunzătoare soluțiilor ecuației $f(\theta)=-1$ sînt vîrfurile unui hexagon regulat.

Soluție. 1) Se impune $\cos\theta=0$ și $\cos 4\theta=0$. Rezultă $\theta=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$ și $\theta=(2l+1)\frac{\pi}{8}$, $l\in Z$.

Numerele $\theta=(2l+1)\frac{\pi}{8}$, $l\in Z$, formează o progresie aritmetică cu rația $\frac{\pi}{4}$ și cu primul termen egal cu $\frac{\pi}{8}$. De aceea punctele corespunzătoare de pe cercul trigonometric determină octogonul regulat $ABCDEFGH$ (fig. 151).

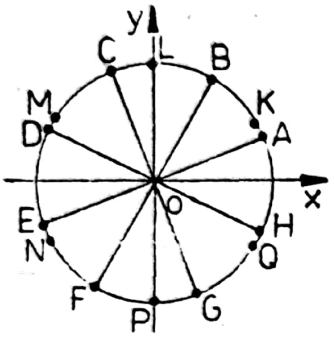


Fig. 151.

Deoarece $l_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_8=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ sînt respectiv latura și apotema octogonului regulat în funcție de raza cercului circumscris, ținînd seama că pentru cercul trigonometric se ia $R=1$, găsim aria $(ABCDEFGH)=$ $=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

2) Avem de rezolvat ecuația $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}4\theta=-1$, $\theta\neq(2k+1)\pi/2$, $k\in Z$, $\theta\neq(2l+1)\frac{\pi}{8}$, $l\in Z$. Deoarece $\operatorname{tg}\theta\neq 0$, ecuația este echivalentă cu $\operatorname{tg}4\theta=-\operatorname{ctg}\theta=$ $=\operatorname{tg}(\pi/2+\theta)$. Rezultă $\theta=\frac{\pi}{6}+m\frac{\pi}{3}$, $m\in Z$. Aceste valori ale lui θ formează o progresie aritmetică cu primul termen $\pi/6$ și cu rația $\pi/3$. De aceea punctele soluție de pe cercul trigonometric formează hexagonul regulat $KLMNPQ$ (fig. 151).

133. Fie $x\to S_n(x)=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^2x+\operatorname{ctg}^3x-\ldots+(-1)^{n-1}\operatorname{ctg}^n x$. Se cere:
1) Să se rezolve ecuația $S_n(x)=0$.

2) Să se rezolve ecuația $S(x)=\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin 2x}{\sin\left(x+(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)}$, unde $S(x)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, $m\in Z$.

Soluție. 1) Ca sumă a unei progresii geometrice, ecuația $S_n(x)=0$ se transcrie

$$\operatorname{ctg}x\cdot\frac{1-(-1)^n\operatorname{ctg}^n x}{1+\operatorname{ctg}x}=0.$$

I) $n=2k$. Primul factor, $\operatorname{ctg}x=0$ implică $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$; din al doilea factor se obține $\frac{1-\operatorname{ctg}^{2k}x}{1+\operatorname{ctg}x}=0$ și este echivalent cu $(1-\operatorname{ctg}x)(1+\operatorname{ctg}^2x+\ldots$ $\ldots+\operatorname{ctg}^{2k-2}x)=0$, care mai are soluțiile $x=\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, corespunzătoare ecuației $\operatorname{ctg}x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

II) $n=2k+1$. Se regăsesc soluțiile ecuației $\operatorname{ctg} x=0$, $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$; al doilea factor $\frac{1+\operatorname{ctg}^{2k+1}x}{1+\operatorname{ctg} x}=0$, se transcrie sub forma $1-\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}^2 x-\ldots+\operatorname{ctg}^{2k}x=0$ și nu admite soluții reale.

2) Dacă progresia geometrică cu o infinitate de termeni (seria geometrică) este convergentă, atunci există $S(x)$; restricția este $|\operatorname{ctg} x|<1$, adică $x\in\left(\frac{\pi}{4}+k'\pi, \frac{3\pi}{4}+k'\pi\right)$. Se obține deci $S(x)=\frac{\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg} x}$, $x\in\left(\frac{\pi}{4}+k'\pi, \frac{3\pi}{4}+k'\pi\right)$. Ecuația devine $\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sqrt{2}\sin x\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin\left(x+(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)}$, $m\in Z$ și admite soluția $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, corespunzătoare lui $\cos x=0$, independent de m; ecuația obținută după eliminarea factorului $\cos x$, comportă discuție după m, deoarece $\sin\left(x+(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)$ ia valori distincte în funcție de valorile lui $2m+1\in\{c_j|j\in\{1, 2, \ldots, 8\}\}$, unde c_j sînt clasele de resturi (mod. 8). Valorile posibile sînt deci

I). $2m+1\in\mathcal{M}_8+1$, adică $2m+1=8p+1$, cînd $\sin\left(x+(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ și ecuația $\frac{1}{\sin x+\cos x}=\frac{2\sin x(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}$, sau $\operatorname{tg} 2x=-1$ cu soluțiile $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k_1\pi}{2}$, $k_1\in Z$; dintre acestea, satisfac restricțiile $x=\frac{3\pi}{8}+k\pi$, $k\in Z$.

II). $2m+1\in\mathcal{M}_8+3$, adică $2m+1=8p+3$, $\sin\left(x+(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ și ecuația devine $\frac{1}{\sin x+\cos x}=\frac{2\sin x(\sin x-\cos x)}{\cos x-\sin x}$, sau $1=-2\sin x(\sin x+\cos x)$, $\cos 2x-\sin 2x=2$, care nu admite soluții $\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\sqrt{2}!?\right)$.

III). $2m+1\in\mathcal{M}_8+5$, adică $2m+1=8p+5$, cînd $\sin\left(x+(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ și ecuația $\frac{1}{\sin x+\cos x}=\frac{2\sin x(\sin x-\cos x)}{-(\sin x+\cos x)}$ sau $\cos 2x+\sin 2x=2$, care nu admite soluții.

IV). $2m+1\in\mathcal{M}_8+7$, adică $2m+1=8p+7$, cînd $\sin\left(x+(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ și rezultă ecuația $\frac{1}{\sin x+\cos x}=\frac{2\sin x(\sin x-\cos x)}{-(\cos x-\sin x)}$ sau $\operatorname{tg} 2x=1$ cu soluțiile $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k_2\pi}{2}$, $k_2\in Z$, dintre care satisfac restricția numai $x=\frac{5\pi}{8}+k\pi$.

Scanned with OKEN Scanner

134. Se dau sumele

$$S_1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\cos ka\cos(k+1)a},\quad S_2=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin ka\,\sin(k+1)a}$$ și se cere:

1) Să se calculeze $E(a)=\frac{S_1}{S_2}$; 2) Să se exprime $E(a)$ numai în funcție de $\operatorname{tg} a$.

Soluție. 1) Presupunem satisfăcute condițiile de existență și folosim identitățile $\frac{\sin a}{\cos ka\cos(k+1)a}=\operatorname{tg}(k+1)a-\operatorname{tg} ka$, $-\frac{\sin a}{\sin ka\,\sin(k+1)a}=\operatorname{ctg}(k+1)a-\operatorname{ctg} ka$; rezultă $S_1=\frac{1}{\sin a}(\operatorname{tg} na-\operatorname{tg} a)$, $S_2=-\frac{1}{\sin a}(\operatorname{ctg} na-\operatorname{ctg} a)$, iar $E(a)=-\frac{\operatorname{tg} na-\operatorname{tg} a}{\operatorname{ctg} na-\operatorname{ctg} a}$.

2) $E(a)=\frac{\sin(n-1)a\cdot\sin na\cdot\sin a}{\cos na\cdot\cos a\cdot\sin(n-1)a}=\operatorname{tg} na\ \operatorname{tg} a$.

Din relația

$$\cos na+i\sin na=C_n^0\cos^n a+iC_n^1\cos^{n-1}a\sin a-C_n^2\cos^{n-2}a\sin^2 a-\ldots$$

rezultă pentru exprimarea factorului $\operatorname{tg} na$:

dacă $n=2m$

$$\operatorname{tg} 2ma=\frac{C_{2m}^1\operatorname{tg} a-C_{2m}^3\operatorname{tg}^3 a+\ldots+(-1)^{m-1}C_{2m}^{2m-1}\operatorname{tg}^{2m-1}a}{1-C_{2m}^2\operatorname{tg}^2 a+\ldots+(-1)^mC_{2m}^{2m}\operatorname{tg}^{2m}a};$$

dacă $n=2m+1$

$$\operatorname{tg}(2m+1)a=\frac{C_{2m+1}^1\operatorname{tg} a-C_{2m+1}^3\operatorname{tg}^3 a+\ldots+(-1)^mC_{2m+1}^{2m+1}\operatorname{tg}^{2m-1}a}{1-C_{2m+1}^2\operatorname{tg}^2 a+\ldots+(-1)^mC_{2m+1}^{2m}\operatorname{tg}^{2m}a}.$$

Înlocuind expresia factorului $\operatorname{tg} na$ în funcție de $\operatorname{tg} a$, se obține $E(a)$ numai în funcție de $\operatorname{tg} a$.

135. Se consideră sistemul

$$\begin{gathered}(1+\sin 2a)\sin x+\sin y+\sin z=0\\ |\sin a|\sin x+\sin a\sin y+|\cos a|\sin z=0\\ \cos a\sin x+|\cos a|\sin y+\sin a\sin z=0,\quad a\in[0,\ \pi].\end{gathered}$$

1) Să se determine valorile lui a pentru care sistemul admite și soluții nebanale.

2) Să se rezolve sistemul în condițiile de la 1).

Soluție. 1) Cu notațiile $u=\sin x$, $v=\sin y$, $w=\sin z$, sistemul devine liniar omogen în u, v, w; fiind omogen, este compatibil (admite soluția banală). Ca să admită și soluții nebanale se impune condiția

$$D(a)=\begin{vmatrix}1+\sin 2a & 1 & 1\\ |\sin a| & \sin a & |\cos a|\\ \cos a & |\cos a| & \sin a\end{vmatrix}=0;$$

în acest caz sistemul devine nedeterminat.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $a\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, deoarece $|\sin a|=\sin a$, $|\cos a|=\cos a$, rezultă $D(a)=$ $=-\frac{1}{2}\sin 4a$; $D(a)=0$ pentru $a=\frac{k\pi}{4}$, $k\in Z$.

Pe intervalul considerat se află soluțiile $a=0$, $a=\frac{\pi}{4}$. Pentru $a\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $|\sin a|=$ $=\sin a$, $|\cos a|=-\cos a$ și $D(a)=-2\cos^2 a(\cos a+\sin a)^2$; ecuația $D(a)=0$ are soluțiile $a=k_1\pi+\frac{\pi}{2}$, $a=\frac{3\pi}{4}+k_2\pi$, $k_1, k_2\in Z$, iar pe $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ se găsesc soluțiile $a=\frac{\pi}{2}$, $a=\frac{3\pi}{4}$.

2) I) Pentru $a=0$, sistemul devine
$u+v+w=0$, $w=0$, $u+v=0$, sau $\sin z=0$, $\sin x+\sin y=0$; soluțiile sînt $(x, y, z)=(m\pi+(-1)^{m+1}y, y, n\pi)$, $y\in R$; $m, n\in Z$.

II) Pentru $a=\frac{\pi}{4}$ rezultă sistemul
$2u+v+w=0$, $u+v+w=0$, $u+v+w=0$, sau $\sin x=0$, $\sin y+\sin z=0$ cu soluțiile $(x, y, z)=(m\pi, n\pi+(-1)^{n+1}z, z)$, $z\in R$; $m, n\in Z$.

III) Pentru $a=\frac{\pi}{2}$ sistemul are soluțiile de forma I,

IV) Pentru $a=\frac{3\pi}{4}$ sistemul are soluții de forma II.

136. Fie P un poligon convex și R poligonul ale cărui vîrfuri sînt mijloacele laturilor lui P. Divizînd (ciclic) toate laturile lui P în raportul $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$, $\theta\in(-\pi/2, \pi/2)$, se formează un nou poligon Q.

1) Să se exprime aria Q în funcție de aria P, aria R și θ.

2) Să se găsească $\min$ aria Q.

3) Să se determine θ astfel ca aria Q să fie media aritmetică a ariilor lui P și R.

Soluție. 1) Notăm $s=\sin^2\theta$, $c=\cos^2\theta$ și observăm că $s+c=1$,

Considerăm un triunghi ABC. Pe segmentul AB luăm un punct D, iar pe AC luăm punctul E așa ca $AD:DB=s:c$ și $CE:EA=s:c$. Deoarece $s+c=1$ găsim aria $(ADE)=s$ aria $(ABE)=sc$ aria (ABC).

Fie $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ poligonul convex P și $B_0B_1\ldots B_{n-1}$ poligonul Q așa ca B_i să fie între A_i și A_{i+1}, și $A_iB_i:B_iA_{i+1}=s:c$. Cu observația precedentă găsim

$$\text{aria}\,(B_iA_{i+1}B_{i+1})=sc\ \text{aria}\,(A_iA_{i+1}A_{i+2})$$

și prin însumare după i obținem

$$\sum_{i=0}^{n-1}\text{aria}\,(B_iA_{i+1}B_{i+1})=sc\sum_{i=0}^{n-1}\text{aria}(A_iA_{i+1}A_{i+2})=\text{aria}\,P-\text{aria}\,Q.$$

Scanned with OKEN Scanner

Luînd $s=c=\frac{1}{2}$ găsim

$$\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\text{aria}\,(A_iA_{i+1}A_{i+2})=\text{aria}P-\text{aria}\,R.$$

De aici deducem

$$\text{aria}\,Q=(1-4sc)\,\text{aria}\,P+4sc\,\text{aria}\,R,$$

adică

$$\text{aria}\,Q=(\text{aria}\,P)\cos^2 2\theta+(\text{aria}\,R)\sin^2 2\theta.$$

2) Deoarece $\text{aria}\,Q=\text{aria}\,R+(\text{aria}\,P-\text{aria}\,R)\cos^2 2\theta$, rezultă că $\min_{\theta}\text{aria}\,Q=\text{aria}\,R$ se atinge pentru $\theta=\pm\frac{\pi}{4}$.

3) Să presupunem că

$$\frac{1}{2}\,\text{aria}\,P+\frac{1}{2}\,\text{aria}\,R=(\text{aria}\,P)\cos^2 2\theta+(\text{aria}\,R)\sin^2 2\theta.$$

Găsim

$$(\text{aria}\,P)\left(\cos^2 2\theta-\frac{1}{2}\right)+(\text{aria}\,R)\left(\sin^2 2\theta-\frac{1}{2}\right)=0$$

sau

$$(\text{aria}\,P-\text{aria}\,R)\left(\cos^2 2\theta-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Rezultă $\theta=\pm\frac{\pi}{8},\ \pm\frac{3\pi}{8}$.

137. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC şi înălţimea AD, dusă din vîrful A. Fie M, N proiecţiile lui D pe AB, respectiv AC.

1) Să se arate că $BMNC$ este un patrulater inscriptibil.

2) Să se calculeze aria patrulaterului $BMNC$ şi aria cercului de diametru AD în funcţie de $BC=a$ şi de unghiul $\sphericalangle ABC=\alpha$.

3) Să se determine unghiul α astfel încît raportul dintre aria patrulaterului $BMNC$ şi aria cercului de diametru AD să fie egal cu un număr pozitiv λ. Discuţie.

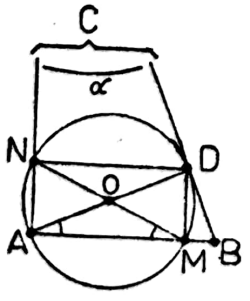


Fig. 152.

Soluţie. (fig. 152). 1) Se observă că $\sphericalangle BCA=\sphericalangle NDA$ ca unghiuri cu laturile perpendiculare; apoi $\sphericalangle NDA=\sphericalangle NMA$, deoarece $NDMA$ este un dreptunghi. Rezultă $\sphericalangle BCA=\sphericalangle NMA$ şi deci $BMNC$ este inscriptibil.

O altă variantă de soluţie este să se ţină seamă că $\Delta ABC\sim\Delta ANM$, MN fiind antiparalelă la BC.

2) Avem $AC=a\cos\alpha$, $AB=a\sin\alpha$, $a\cdot AD=AB\cdot AC$. Deci $AD=a\sin\alpha\cos\alpha$ şi $A_{cerc}=\frac{\pi a^2}{16}\sin^2 2\alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte $AM=AD\cos\alpha=a\sin\alpha\cos^2\alpha$, $AN=AD\sin\alpha=a\sin^2\alpha\cos\alpha$ și deci $A_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}a^2\sin^3\alpha\cos^3\alpha$. Cu acestea găsim aria $(BMNC)$ = aria (ABC) − aria $(AMN)=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{a^2}{2}\sin^3\alpha\cos^3\alpha=$
$=\frac{a^2}{4}\sin 2\alpha\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)$.

3) Unghiul α se determină din egalitatea

$$\frac{a^2}{4}\sin 2\alpha\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)=\lambda\frac{\pi a^2}{16}\sin^2 2\alpha.$$

Deoarece $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ rezultă ecuația $4\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)=\pi\lambda\sin 2\alpha$. Notînd $t=\sin 2\alpha$, ajungem la ecuația $t^2+\pi\lambda t-4=0$, care are rădăcini reale distincte, deoarece $\Delta=\pi^2\lambda^2+16>0$. Evident, de la această ecuație convine numai rădăcina pozitivă, căreia îi impunem condiția

$$0<\frac{a^2}{4}\left(-\pi\lambda+\sqrt{\pi^2\lambda^2+16}\right)\leqslant 1;\text{ rezultă }\lambda\geqslant\frac{3}{\pi}.$$

Pentru aceste valori ale lui λ se obține $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\left(-\pi\lambda+\sqrt{\pi^2\lambda^2+16}\right)$, care se satisface pentru $\alpha=\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{1}{2}\left(-\pi\lambda+\sqrt{\pi^2\lambda^2+16}\right)+\frac{k\pi}{2}$, unde se ia $k=0$. Observăm că la aceeași concluzie se ajunge ținînd seamă că ecuația în t admite numai o rădăcină pozitivă (suma $S=-\pi\lambda<0$, iar produsul $P=-4<0$); fie $t_1>0$. Prin relațiile $f(0)\cdot f(1)<0$ cu $f(1)=0$ se impune condiția ca $t_1\in(0,\ 1]$ și rezultă $\lambda\geqslant\frac{3}{4}$; s-a notat cu $f(t)$ valoarea trinomului pentru $t\in R$.

138. 1) Ce relație există între laturile unui triunghi dacă între unghiuri avem relația

(I) $x\cos\frac{A-B}{2}=y\cos\frac{A+B}{2}$, $x,\ y\in R$,

(II) $\sin A\sin B=3\sin^2\frac{C}{2}$.

2) Să se arate că dacă într-un triunghi este satisfăcută relația $a^4=[4p(p-c)-a^2]\cos C$, atunci triunghiul este isoscel.

(Gh. Vernic)

Soluție. 1) (I) Înmulțind ambii membri cu $\cos\frac{C}{2}$ și ținînd seama că $A+B+C=\pi$, relația se scrie în forma echivalentă $x\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\frac{y}{2}\sin C$, adică $x(\sin A+\sin B)=y\sin C$. Deoarece $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ găsim $x(a+b)=yc$.

(II) Utilizînd teorema sinusurilor și relația $\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos C}{2}$, găsim $2ab(1+\cos C)=3c^2$. Pe de altă parte $2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$ (teorema cosinusului). De aceea $(a+b)^2=(2c)^2$ și deci $a+b=2c$, adică c este media aritmetică a laturilor a și b.

2) Succesiv avem $\cos C=\frac{a^2}{4p(p-c)-a^2}$, $\frac{1-\cos C}{1+\cos C}=\frac{2p(p-c)-a^2}{2p(p-c)}$, $\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{2p(p-c)-a^2}{2p(p-c)}$, $\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}=\frac{2p(p-c)-a^2}{2p(p-c)}$. Ultima egalitate este echivalentă cu $2(p-a)(p-b)=2p(p-c)-a^2$; înlocuind $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, găsim $b^2=c^2$, adică $b=c$ și deci triunghiul este isoscel.

139. Fie a, b, c; p, r, R, I, H respectiv lungimile laturilor, semiperimetrul, raza cercului înscris, raza cercului circumscris, centrul cercului înscris și ortocentrul triunghiului ABC.

1) Să se arate că $bc+ca+ab\geqslant(AI+BI+CI)^2$, cu egalitate dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2) Presupunem că triunghiul ABC nu este obtuzunghic. Să se demonstreze că $s^2\geqslant 2R^2+8Rr+3r^2$ sau, echivalent, $a^2+b^2+c^2\geqslant(AH+BH+CH)^2$ cu egalitate dacă și numai dacă triunghiul este echilateral sau isoscel dreptunghic.

(*The Amer. Math. Monthly*, 1972)

Soluție. 1) Au loc următoarele relații:

$$\Sigma ab-(\Sigma AI)^2=4R^2\left[\Sigma\sin A\sin B-4\left(\sum\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\sum\sin\frac{A}{2}\right)\right]=16R^2\left[3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sum\sin\frac{A}{2}\right]=$$

$$=4Rr\left(3-2\sum\sin\frac{A}{2}\right)\geqslant 4Rr\left[3-2\left(2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+1-2\sin^2\frac{A+B}{4}\right)\right]\geqslant 0$$

(trinom în $\sin\frac{A+B}{2}$), cu egalitate dacă și numai dacă ABC este un triunghi echilateral.

2) Notăm $\alpha=\pi-2A$, $\beta=\pi-2B$, $\gamma=\pi-2C$. Avem $\Sigma a^2-(\Sigma AH)^2=4R^2\left[\sum\cos^2\frac{\alpha}{2}-\left(\sum\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]\geqslant 0$, adică prima parte este adevărată.

Dacă $A=\frac{\pi}{2}$, atunci $\sum\cos^2\frac{\alpha}{2}=2$ și $\left(\sum\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=1+\sin\beta$. Astfel egalitatea are loc numai pentru

$$\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{4}=\frac{\gamma}{2}.$$

Dacă $A\neq\pi/2$, atunci intervin inegalitățile

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}-1/2\right)\left(\sin\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0,\quad 2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant 1$$

Scanned with OKEN Scanner

a 1

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}-1/2\right)\left(\sin\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0,\quad \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\leqslant 1.$$

De aceea egalitatea are loc numai pentru triunghiul echilateral.

140. Se cere:

1) Să se rezolve ecuația $\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{\sin 2t}+\frac{1}{\sin 3t}$;

2) Să se arate că $\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$, unde $A_1A_2\ldots A_7$ este un heptagon regulat.

3) Să se transcrie ecuația de la 1), utilizînd substituția $2\sin t=x$. Să se deducă că latura heptagonului regulat înscris într-un cerc de rază 1 este soluție a ecuației $x^6-7x^4+14x^2-7=0$. Ce reprezintă (în heptagon) celelalte soluții pozitive?

4) Să se arate că $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{4}$, $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$.

5) Să se exprime $\sin 7t$ prin funcții de argument simplu; folosind substituția $2\sin t=x$ să se deducă ecuația de la 3) din $\sin 7t=0$.

6) Să se rezolve $z^6+z^5+\ldots+z+1=0$; să se arate că prin substituția $2-x^2=z+\frac{1}{z}$ această ecuație coincide cu cea de la 3).

(N. Mihăileanu)

Soluție. 1) Se impune $t\notin\left\{k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{2\pi}{3}\,\middle|\,k\in Z\right\}$. Deoarece $\frac{1}{\sin 2t}+\frac{1}{\sin 3t}=\frac{\sin 3t+\sin 2t}{\sin t(\sin 4t+\sin 2t)}$, ecuația devine $\sin 3t=\sin 4t$, adică $4t=(-1)^m 3t+m\pi$, $m\in Z$; soluțiile sînt $t=(2n+1)\frac{\pi}{7}$, $n\in Z-\left\{\frac{7m-1}{2}\,\middle|\,m=\text{impar}\right\}$.

2) În heptagonul regulat (înscris într-un cerc de rază R) $A_1A_2=2R\sin\frac{\pi}{7}$ și corespunde unghiului la centru $\alpha=\frac{2\pi}{7}$; analog, $A_1A_3=2R\sin\frac{2\pi}{7}$ și $A_1A_4=2R\sin\frac{3\pi}{7}$. Deoarece $t=\sin\frac{\pi}{7}$ este soluție a ecuației de la 1), se verifică $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$, adică $\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$.

3) Cu substituția $\sin t=\frac{x}{2}$ și deci $\sin 2t=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$, $\sin 3t=\frac{x}{2}(3-x^2)$, ecuația de la 1) devine $\frac{1}{x}-\frac{1}{3x-x^3}=\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$, sau $x^6-7x^4+14x^2-7=0$.

Din 1) și 2) rezultă că celelalte două soluții pozitive corespund diagonalelor heptagonului A_1A_3 și A_1A_4.

4) Cu substituția $x^2=y$, ecuația de la 3) devine $y^3-7y^2+14y-7=0$ și are rădăcinile $y_j=x_j^2$; deoarece $x_1=2\sin\frac{\pi}{7}$, $x_2=2\sin\frac{2\pi}{7}$, $x_3=2\sin\frac{3\pi}{7}$, cu relațiile lui Viete pentru ecuația în y, rezultă egalitățile din enunț.

5) Cu formula lui Moivre, $(\cos t+i\sin t)^n=\sum_{j=0}^{n} i^j C_n^j \cos^{n-j} t \sin^j t$ se exprimă $\sin 7t=7\cos^6 t\sin t-35\cos^4 t\sin^3 t+21\cos^2 t\sin^5 t-\sin^7 t$; eliminînd factorul $\sin t$ și făcînd substituția $2\sin t=x$ în ecuația $\frac{\sin 7t}{\sin t}=0$, rezultă ecuația de la 3).

6) Ecuația din enunț este echivalentă ecuației $\frac{z^7-1}{z-1}=0$, $z\neq 1$, și are soluțiile $z_k=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$, pentru $k\in\{1, 2, \ldots, 6\}$. Deoarece ecuația din enunț este simetrică, cu substituția $y=z+\frac{1}{z}$ rezultă ecuația $y^3+y^2-2y-1=0$; cu substituția $y=2x^2$ rezultă ecuația de la 3).

141. Se consideră $x\to f(x)=\sin 9x$.

1) Să se descompună f în factori de gradul întîi în $\sin x$.

2) Să se scrie ecuația algebrică în $t=\operatorname{tg} x$, echivalentă ecuației $f(x)=0$ și să i se expliciteze soluțiile.

3) Să se calculeze $P=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$.

4) Se consideră nonagonul regulat $A_1A_2\ldots A_9$ înscris în cercul de rază $R=1$. Să se calculeze $S=A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_1A_4^2+A_1A_5^2$.

Soluție. 1) Se folosește descompunerea (*vezi* probl. 159) $\sin 9x=2^{18}(-1)^9 C_9 e^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{18} x_k}\prod_{k=1}^{18}\sin\frac{x-x_k}{2}$, unde $x_k=\frac{k\pi}{9}$, $k\in\{1, 2, \ldots, 18\}$ sînt soluțiile ecuației $\sin 9x=0$, cuprinse în intervalul $(0, 2\pi]$; $C_9=\frac{1}{2i}$, deoarece $\sin 9x=\frac{e^{i9x}-e^{-i9x}}{2i}=\frac{1}{2i}\frac{z^{18}-1}{z^9}$. Se observă că $\sum_{k=1}^{18} x_k=\frac{\pi}{9}\sum_{k=1}^{18} k=19\pi$ și deci $e^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{18} x_k}=e^{i\frac{19\pi}{2}}=-i$; deoarece $\sin\frac{x-(9+k)\frac{\pi}{9}}{2}=-\cos\frac{x-\frac{k\pi}{9}}{2}$, rezultă că $\sin 9x=-2^8\prod_{k=1}^{9}\sin\left(x-\frac{k\pi}{9}\right)=-2^8\prod_{k=1}^{9}\left(\cos\frac{k\pi}{9}\sin x-\sin\frac{k\pi}{9}\cos x\right)$.

2) Ecuația în $t=\operatorname{tg} x$ poate fi obținută din descompunerea de la punctul 1). Altă variantă se bazează pe utilizarea formulei lui Moivre,

$$\sin 9x=C_9^1\cos^8 x\sin x-C_9^3\cos^6 x\sin^3 x+C_9^5\cos^4 x\sin^5 x-C_9^7\cos^2 x\sin^7 x+C_9^9\sin^9 x;$$

pentru $\cos x\neq 0$, rezultă $t^9-36t^7+126t^5-84t^3+9t=0$.

Rădăcinile ecuației sînt $t=\operatorname{tg}\frac{k\pi}{9}$, $k\in\{1, 2, \ldots, 9\}$; eliminînd soluția $t=0$, rămîne ecuația $t^8-36t^6+126t^4-84t^2+9=0$ și deoarece $\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{k\pi}{9}\right)=-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{9}$ soluțiile ultimei ecuații sînt $\pm\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}, \pm\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}, \pm\operatorname{tg}\frac{3\pi}{9}, \pm\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9}$.

3) Observăm că ecuația $u^4-36u^3+126u^2-84u+9=0$ are soluțiile $u_j=\operatorname{tg}^2\frac{j\pi}{9}$, $j\in\{1, 2, 3, 4\}$; se calculează $P^2=\prod_{j=1}^{4}\cos^2\frac{j\pi}{9}=\prod_{j=1}^{4}\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{j\pi}{9}}=$

$=\prod_{j=1}^{4}\frac{1}{1+u_j}$, ținînd seamă de relațiile lui Viete. Rezultă $P^2=\frac{1}{2^8}$ și deci $P=\frac{1}{16}$.

4) Latura nonagonului $A_1A_2=2\sin\frac{\pi}{9}$, iar lungimile diagonalelor $A_1A_3=2\sin\frac{2\pi}{9}$, $A_1A_4=2\sin\frac{3\pi}{9}$, $A_1A_5=2\sin\frac{4\pi}{9}$;

$$S=4\left(\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{3\pi}{9}+\sin^2\frac{4\pi}{9}\right)$$ și deci

$$S=4\sum_{j=1}^{4}\frac{\operatorname{tg}^2\frac{j\pi}{9}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{j\pi}{9}}=4\sum_{j=1}^{4}\frac{u_j}{1+u_j}.$$ Cu relațiile lui Viete, rezultă $S=9$.

142. Ecuația binomă

Fie $x\to f(x)=x^n-a$, $n\in N$; $x, a\in C$; $f(x)=0$ este ecuația binomă.

1°. Se consideră $x\to f(x)=x^n-1$, $x\in R$.

1) Să se rezolve ecuația $f(x)=0$.

2) Să se arate că $\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=0$, $\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$.

3) Să se descompună $f(x)$ în factori reali de grad minim.

Soluție. 1) Deoarece $1=\cos 0+i\sin 0$, din $x^n-1=0$ rezultă $x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ unde, spre exemplu, $k\in K=\{1, 2, \ldots, n\}$.

2) Din relațiile lui Viete rezultă că $\sum_{k=1}^{n}x_k=-\frac{a_1}{a_0}=0$ și deci $\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=0$, $\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$.

Alt procedeu. Dacă se consideră $z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, atunci $\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}z^k=z\cdot\frac{1-z^n}{1-z}=z^{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{z^{n/2}-z^{-n/2}}{z^{1/2}-z^{-1/2}}=\left(\cos\frac{n+1}{n}\pi+\right.$ $\left.+i\sin\frac{n+1}{n}\pi\right)\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}=0$; din egalitate rezultă concluzia.

Scanned with OKEN Scanner

3) Pentru $n=2m$, $x_k=\cos\frac{2k\pi}{2m}+i\sin\frac{2k\pi}{2m}\in R$, dacă $\sin\frac{2k\pi}{2m}=0$; deoarece $\frac{2k\pi}{2m}\in(0,2\pi]$, rădăcinile reale sînt $x_m=-1$, $x_{2m}=+1$. Observînd că $x_{2m-p}=\bar{x}_p$, rezultă $f(x)=x^{2m}-1=(x^2-1)\prod_{p=1}^{m-1}(x-x_p)(x-\bar{x}_p)=(x^2-1)\prod_{p=1}^{m-1}(x^2-2\cos\frac{p\pi}{m}x+1)$; $\bar{x}_p$ este conjugatul complex al lui x_p. Pentru $n=2m+1$, $x_k=\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2m+1}$ și raționînd analog cazului anterior rezultă $x_{2m+1}=1$, $x_{2m+1-p}=\bar{x}_p$ și deci

$$f(x)=x^{2m+1}-1=(x-1)\prod_{p=1}^{m}(x-x_p)(x-\bar{x}_p)=(x-1)\prod_{p=1}^{m}(x^2-2\cos\frac{2p\pi}{2m+1}x+1).$$

Observație. Ecuația binomă poate avea cel mult două rădăcini reale; într-adevăr, $x_k=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, $\alpha=\arg a$. Observăm că $\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}=0$, unde $\frac{\alpha+2k\pi}{n}\in(0,2\pi]$, dacă există valori $k\in\{1,2,\ldots n\}$ pentru care $\frac{\alpha+2k\pi}{n}\in\{\pi,2\pi\}$, deci cel mult două valori.

2°. Se consideră $z^5-a=0$, $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$. Să se determine $\alpha\in[0,2\pi)$ astfel ca una dintre rădăcinile ecuației să aibă imaginea situată pe prima bisectoare în primul cadran din $R^2\equiv C$; pentru valoarea α determinată, să se afle toate rădăcinile ecuației.

Soluție. Deoarece $|a|=1$, rezultă $z_k=\cos\frac{\alpha+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{5}$, $k\in\{0,1,2,3,4\}=K$; $(z_k)=(x_k,y_k)\in\{(x,y)|y=x,x>0\}$, dacă $\arg z_k=\frac{\pi}{4}$, adică $\frac{\alpha+2k\pi}{5}=\frac{\pi}{4}$ sau $\alpha=\frac{5\pi}{4}-2k\pi$, $k\in K$. Singura valoare a lui α, care satisface este $\alpha=\frac{5\pi}{4}$. În acest caz rădăcinile ecuației sînt $z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$, $z_1=\cos\frac{13\pi}{20}+i\sin\frac{13\pi}{20}$, $z_2=\cos\frac{21\pi}{20}+i\sin\frac{21\pi}{20}$, $z_3=\cos\frac{29\pi}{20}+i\sin\frac{29\pi}{20}$, $z_4=\cos\frac{37\pi}{20}+i\sin\frac{37\pi}{20}$.

3°. Să se arate că $(z-a)^n-(z-\bar{a})^n=0$, $a\notin R$, are rădăcini reale.

Soluție. Deoarece $z=\bar{a}$ nu este rădăcină, se scrie (pentru $z\neq\bar{a}$): $\left(\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right)^n=1$, care are soluțiile $u_k=\frac{z-a}{z-\bar{a}}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}=K$, iar $z_k=\frac{a-\bar{a}u_k}{1-u_k}$.

Observație. Din considerente de simplitate a expresiilor, acceptăm relația lui Euler: $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$. Rezultă imediat, $\cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi}$, $\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})$, $\sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})$.

Scanned with OKEN Scanner

Revenind, dacă $a=re^{i\varphi}$, $u_k=e^{i\alpha}$, $\alpha=\frac{2k\pi}{n}$, cu observația că $\bar{a}=re^{-i\varphi}$, se obține $z_k=r\frac{e^{i\varphi}-e^{i(\alpha-\varphi)}}{1-e^{i\alpha}}=r\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}}\frac{e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}-e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}}{e^{-i\alpha/2}-e^{i\alpha/2}}=r\frac{-2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}{-2i\sin\frac{\alpha}{2}}$;

rezultă deci $z_k=r\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}-\varphi\right)}{\sin\frac{k\pi}{n}}$, $k\in K$.

143. Rădăcinile unității

Mulțimea $\{x_k|x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\}$, unde, spre exemplu $k\in\{1, 2, \ldots, n\}$, este mulțimea n-rădăcinilor unității.

1°. Se consideră $z^n-a=0$; a, $z\in C$.

1) Să se exprime rădăcinile z_k ale ecuației în funcție de n-rădăcinile unității.

2) Dacă $z=(x, y)$, să se determine poziția punctelor $(x_k, y_k)=z_k$ în planul $R^2\equiv C$.

Soluție. 1) Dacă $\alpha=\arg a$, $z_0=\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}$, atunci rădăcinile $z_k=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{|a|}\cdot z_0\cdot x_k$, unde $r=\sqrt[n]{|a|}$ este factorul de extensie (contracție), iar $\frac{1}{n}\arg a$ este elementul de rotație, corespunzătoare lui $a\in C$.

2) Deoarece $|z_k|=\sqrt[n]{|a|}$, rezultă că $z_k=(x_k, y_k)$ se situează pe cercul de rază r, cu centrul în origine. Repartizarea pe cerc este determinată de unghiurile $\{\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}|k\in\{1, 2, \ldots, n\}\}$; mulțimea imaginilor rădăcinilor $\{z_k\}$ determină o diviziune uniformă a cercului (în n părți egale), adică determină un poligon regulat cu n laturi, înscrise în cerc (fig. 153).

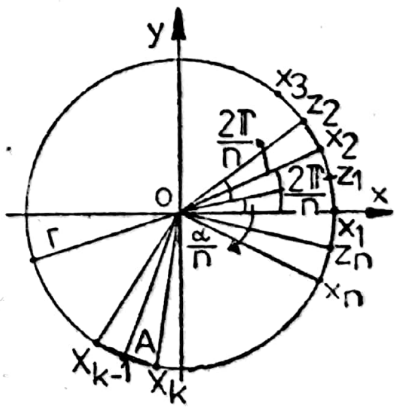


Fig. 153.

2°. Fie $\{x_k\}$ — rădăcinile de ordinul n ale unității. Să se calculeze:

1) $D=\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n \\ x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & \ldots & x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^n & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \end{vmatrix}$

2) $P=\prod_{k=1}^{n}(x_k^2-2x_k\cos\varphi+1)$.

3) aria poligonului convex cu vîrfurile $\{M_k\}$, unde M_k sînt imaginile rădăcinilor x_k, $k\in\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soluţie. 1) Observăm că $x_1^2=x_2$, $x_1^3=x_3\ldots$, $x_1^n=x_n$, apoi adunăm, spre exemplu, elementele celorlalte linii la elementele primei linii şi rezultă:

$$D=(x_1+x_2+\ldots+x_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\ldots 1 \\ x_2 & x_3 & x_4\ldots x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & x_1 & x_2\ldots x_{n-1} \end{vmatrix}=0, \text{ deoarece } \sum_{k=1}^{n} x_k=-\frac{a_1}{a_0}=0.$$

2) Fie $b=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $\bar{b}=\cos\varphi-i\sin\varphi$; se transcrie produsul

$$P=\prod_{k=1}^{n}(b-x_k)(\bar{b}-x_k)=\prod_{k=1}^{n}(b-x_k)\cdot\prod_{k=1}^{n}(\bar{b}-x_k)=(\bar{b}^n-1)(b^n-1),$$

deoarece $x^n-1=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$. Se înlocuieşte $b^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$, $\bar{b}^n=\cos n\varphi-i\sin n\varphi$ şi rezultă $P=2(1-\cos n\varphi)=4\sin^2\frac{n\varphi}{2}$.

3) Fiind poligon regulat, aria $(\{M_k\})=n\cdot\frac{L_n\cdot A_n}{2}=\frac{n}{2}2\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. Pentru a exprima aria în funcţie de x_k, observăm că $L_n=|x_k-x_{k-1}|$, $A_n=\frac{1}{2}|x_k+x_{k-1}|$; deci aria $(\{M_k\})=\frac{n}{4}|x_k^2-x_{k-1}^2|$.

3°. Să se verifice că mulţimea n-rădăcinilor unităţii formează grup multiplicativ abelian; să se evidenţieze un izomorfism între mulţimea rădăcinilor $\{x_k\}$ şi mulţimea indicilor $k\in K$.

Soluţie. Se consideră $M=\left\{x_k \mid x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right\}$ — mulţimea rădăcinilor de ordinul n ale unităţii; fie $k\in\{1, 2, \ldots, n\}$.

I) $\forall x_p, x_q\in M\Rightarrow x_p\cdot x_q=\cos\frac{2\pi}{n}(p+q)+i\sin\frac{2\pi}{n}(p+q)=x_{p+q}$, $3\leqslant p+q\leqslant 2n-1$; dacă $p+q\leqslant n$, atunci $x_{p+q}\in M$, dacă $p+q=n+s\leqslant 2n-1$, atunci $x_{p+q}=x_s\in M$, deoarece $1<s\leqslant n-1$. În concluzie, $M\times M\to M$ prin legea $(\cdot)$.

II) $\forall x_p, x_q, x_s\in M$, se arată că $(x_p\cdot x_q)\cdot x_s=x_p\cdot(x_q\cdot x_s)$; într-adevăr $(x_p\cdot x_q)\cdot x_s=x_{(p+q)+s}$ şi deoarece pe mulţimea indicilor (mulţimea numerelor întregi Z) adunarea este asociativă, rezultă

$$x_{(p+q)+s}=x_{q+(p+s)}=x_p\cdot(x_q\cdot x_s).$$

III) $x_n=1$ este elementul neutru (unitate); $\forall x_p\in M$, $x_p\cdot x_n=\cos(p+n)\cdot\frac{2\pi}{n}+i\sin(p+n)\frac{2\pi}{n}=x_p$, deoarece funcţiile sinus şi cosinus sînt periodice, de perioadă $T=2\pi$; $x_p\cdot x_n=x_n\cdot x_p=x_p$.

IV) $\forall x_p\in M$, $x_{n-p}=\bar{x}_p$ este simetricul lui x_p în M; într-adevăr $x_p\cdot x_p=x_p\cdot x_{n-p}=x_n$.

V) Deoarece înmulţirea este comutativă în C, grupul M este grup abelian. S-a arătat că $x_{p+m\cdot n}=x_p$, $\forall m\in Z$ (din periodicitatea funcţiilor sinus şi cosinus);

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că dacă C_p este o clasă de resturi (modulo n) atunci $\forall r_p \in C_p = \{r_p | r_p = p + m \cdot n,\ m \in Z\} \subset Z$, se satisface $x_{rp} = x_{p+m \cdot n} = x_p$.

Considerînd clasele de resturi (modulo n) $\{C_k | k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ și $k_j \in C_j$, rezultă că mulțimea indicilor K, corespunzătoare mulțimii M este $K = \{k_1\ k_2, \ldots, k_n\}$, $k_j \in C_j$.

Deoarece $\forall k_i,\ k_i \in K$ se satisface $x_{k_i + k_j} = x_{k_i} \cdot x_{k_j}$, ultima egalitate determină un izomorfism al grupurilor $\{M, \cdot\}$ și $\{K, +\}$; ultimul grup poate fi înlocuit prin $\{Z, +(\text{modulo } n)\}$ cu condiția ca din fiecare clasă de echivalență C_j să se ia cîte un reprezentant.

4°. Se consideră polinoamele $P(x) = x^{nm_1} + x^{nm_2+1} + \ldots + x^{nm_n+n-1}$, $Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$. Să se arate că P este divizibil prin Q; $n, m_1, \ldots, m_n \in N$.

Soluție. Pentru a arăta că $P : Q$ este suficient să arătăm că $Q(x_k) = 0 \Rightarrow P(x_k) = 0$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Deoarece $T(x) = Q(x)(x-1) = x^n - 1$, rezultă că $\{x_k\}$ — rădăcinile ecuație $Q(x) = 0$, sînt rădăcini de ordin n ale unității, $x_k \neq 1 : Q(x_k) = 0$. Deoarece $x_k^n = 1$ se obține

$$P(x_k) = 1 + x_k + \ldots + x_k^{n-1} = Q(x_k) = 0,\ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

În concluzie, $P : Q$.

144. Fie $z^n - a = 0$, $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, cu rădăcinile z_k. Să se determine:

1) ecuația care are rădăcinile $t_k = z_k + z_{k+1}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

2) ecuația cu rădăcinile $t_k = \sum_{j=0}^{p-1} z_{k+j}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p < n$;

3) identificînd $R^2 \equiv C$, să se determine poziția imaginilor rădăcinilor pentru 1), 2).

Soluție. 1) Observăm că $z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{a}{n}} x_k$, unde x_k sînt n-rădăcinile unității și deci

$$t_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{a}{n}}(x_k + x_{k+1}) = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{a}{n}} e^{i\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right)}\left(e^{-i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{\pi}{n}}\right) =$$

$$= 2\sqrt[n]{|a|} \cos\frac{\pi}{n} \cdot e^{i\frac{a}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right)}.$$

Deoarece $t_k^n = 2^n |a|\, e^{ia}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n \cdot e^{i(2k+1)\pi} = -2^n a\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n$, rezultă ecuația binomă

$$t^n + 2^n a\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n = 0.$$

2) Procedînd analog lui 1), rezultă

$$t_k = 2\sqrt[n]{|a|}\cdot e^{i\alpha/n}\cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}\cdot\left(1+e^{i\frac{2\pi}{n}}+\ldots+e^{i\frac{2\pi}{n}(p-1)}\right)=$$

$$=2\sqrt[n]{|a|}\,e^{i\frac{\alpha}{n}}\cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}\cdot\frac{e^{i\frac{p\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{p\pi}{n}}-e^{i\frac{p\pi}{n}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{n}}-e^{i\frac{\pi}{n}}\right)}=$$

$$=2\sqrt[n]{|a|}\,e^{i\alpha/n}\,e^{i(2k+p-1)\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\sin p\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$ și ecuația binomă $t^n+2^n a(-1)^p\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\right)^n=0$.

Cazul 1) rezultă pentru $p=2$.

3) Rădăcinile t_k se situează pe cercuri cu centrul în origine și de rază $r=2\sqrt[n]{|a|}\,\frac{\sin\frac{p\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$, distanța (unghiulară) dintre imaginile a două rădăcini succesive fiind $\theta=\frac{2\pi}{n}$; față de rădăcina z_k, imaginea rădăcinii t_k a suferit o rotație cu $\theta_p=(p-1)\frac{\pi}{n}$.

145. Pe cercul cu centrul în originea axelor și de rază egală cu unitatea se consideră un punct A, care satisface $\measuredangle AOx=\frac{\pi}{6}$.

1) Să se determine ecuația binomă de grad minim cu coeficienți reali, pentru care punctul A este imaginea uneia dintre rădăcini.

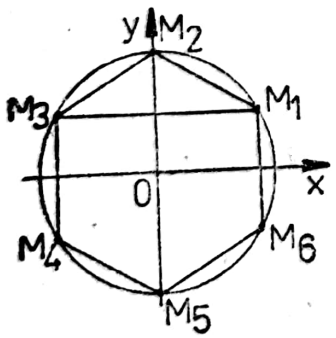


Fig. 154.

2) Dacă M_k sînt imaginile rădăcinilor ecuației determinate la punctul 1), să se calculeze volumul piramidei, avînd ca bază poligonul regulat cu vîrfurile M_k și înălțimea egală cu diagonala mică a poligonului de la bază.

Soluție. 1) Se notează $z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ și se pune condiția să verifice ecuația $z^n-a=0$, deci $a=z_1^n=\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}$; din condiția $\frac{n\pi}{6}=\pi$ rezultă $n=6$ și se obține $z^6+1=0$.

Ecuația $z^6+1=0$ are rădăcinile $z_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}$, $k\in\{0,1,\ldots,5\}$. Deci $l_6=1$, $a_6=\frac{\sqrt{3}}{2}$ și aria $(M_1M_2\ldots M_6)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (fig. 154);

diagonala mică este $M_1M_3 = l_3 = \sqrt{3}$. Volumul este $V = \frac{1}{3} h \cdot A_{bazei} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{2}$.

146. Fie matricea

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{bmatrix}, \quad t \in R.$$

1) Să se găsească valorile proprii ale matricei $A(t)$.

2) Fie z_1, z_2 valorile proprii ale lui $A(t)$. Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ale cărui vîrfuri corespund afixelor $z=0$, $z=z_1$ și $z=z_2$.

Soluție. 1) Avem de găsit soluțiile în C ale ecuației în z,

$$\begin{vmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t - z & 1 - \frac{3}{2}\cos t \sin t \\ -1 + \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t - z \end{vmatrix} = 0, \quad t = \text{arbitrar.}$$

Dezvoltînd membrul stîng ajungem la $2z^2 + z + 1 = 0$. Deci $z_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{7})$.

2) Se știe că dacă a, b, c sînt laturile triunghiului, S este aria și R raza cercului circumscris, atunci $abc = 4RS$. În cazul nostru punem $a = |z_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = |z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c = |z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{7}}{2}$; deoarece înălțimea triunghiului este $h = \frac{1}{4}$ avem $S = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1}{4}$ (fig. 155). De aceea $R = 1$.

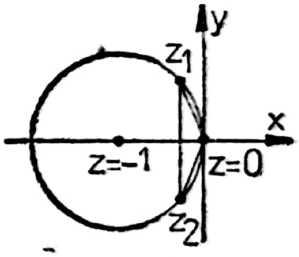


Fig. 155.

147. Funcția $z = x + iy \to Z = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$, $x, y \in R$, este un izomorfism între corpul comutativ al numerelor complexe și corpul comutativ al matricelor de ordinul doi de tipul $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$:

1) Utilizînd izomorfismul și formula lui Moivre să se găsească Z^n, $n \in N$.

2) Fie matricea complexă de ordinul n, $A = [x_{rs} + iy_{rs}]$. Fie B matricea reală de ordinul $2n$ obținută prin înlocuirea elementelor $x_{rs} + iy_{rs}$ prin echivalentele lor matriceale

$$x_{rs} + iy_{rs} \to \begin{bmatrix} x_{rs} & y_{rs} \\ -y_{rs} & x_{rs} \end{bmatrix}.$$

Să se arate că inversa A^{-1} poate fi obținută din B^{-1} inversînd regula precedentă.

Soluție. 1) Fie $z=x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, unde $\rho=|z|$, $\theta=\arg z$. Deoarece $z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$, găsim

$$Z^n=\begin{bmatrix}\rho^n\cos n\theta & \rho^n\sin n\theta\\ -\rho^n\sin n\theta & \rho^n\cos n\theta\end{bmatrix},\quad \forall n\in N.$$

2) Fie $X=[x_{rs}], Y=[y_{rs}]$ și $B=\begin{bmatrix}X & Y\\ -Y & X\end{bmatrix}$ o matrice inversabilă. Fie $B^{-1}=\begin{bmatrix}L & M\\ N & P\end{bmatrix}$ inversa lui B. Relația $BB^{-1}=I_{2n}$ este echivalentă cu $XL+YN=I_n$, $XM+YP=O$, $-YL+XN=O$, $-YM+XP=I_n$. Acestea implică

$$\begin{cases}X(L-P)+Y(N+M)=O\\ -Y(L-P)+X(N+M)=O,\end{cases}$$

adică

$$B.\begin{bmatrix}L-P\\ N+M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O\\ O\end{bmatrix}.$$

De aici, prin înmulțire la stînga cu B^{-1}, găsim $P=L$, $N=-M$. Deci inversa lui B are în mod necesar forma $\begin{bmatrix}L & M\\ -M & L\end{bmatrix}$.

Deoarece $BB^{-1}=I_{2n}$ se reduce la $XL-YM=I_n$ și $XM+YL=0$, rezultă că inversa lui $A=X+iY$ este $A^{-1}=L+iM$.

148. Fie $r_k=e^{2\pi ik/n}$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, rădăcinile complexe ale unității. Se consideră matricea

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & r_1 & \ldots & r_1^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & r_{n-1} & \ldots & r_{n-1}^{n-1}\end{bmatrix}.$$

1) Să se arate că dacă ${}^t\overline{T}$ este conjugata transpusei lui T, atunci ${}^t\overline{T}\,T=nI$.

2) Să se verifice că relațiile $x_l=\sum_{j=0}^{n-1}e^{2\pi ilj/n}\cdot y_j$, $l=0, 1, \ldots, n-1$, implică $y_l=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}e^{-2\pi ilj/n}\cdot x_j$ și $\sum_{l=0}^{n-1}|x_l|^2=n\sum_{e=0}^{n-1}|y_l|^2$.

Soluție. 1) Calcule directe.

2) Se observă că dacă x_l se presupun date, atunci

$$\sum_{j=0}^{n-1}e^{2\pi ilj/n}\,y_j=x_l,\quad l=0, 1, \ldots, n-1,$$

este un sistem liniar neomogen de n ecuații cu n necunoscute $y_0, y_1, \ldots, J_{n-1}$. Dacă punem $X={}^t[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$, ${}^tY=[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]$, atunci sistemul

Scanned with OKEN Scanner

precedent este echivalent cu ecuația matriceală $TY=X$. Se observă însă că $\frac{1'}{n}\overline{T}=T^{-1}$. De aceea găsim $T^{-1}(TY)=T^{-1}X$, adică $Y=T^{-1}X=\frac{1'}{n}TX$. Explicitînd această egalitate matriceală obținem relația corespondentă din enunț.

Se observă că $\sum_{i=0}^{n-1}|x_i|^2={}^t\overline{X}X$ și $\sum_{i=0}^{n-1}|y_i|^2={}^t\overline{Y}Y$. Dar ${}^t\overline{X}X={}^t(\overline{TY})(TY)=$
$={}^t(\overline{TY})(TY)=({}^t\overline{Y}{}^t\overline{T})(TY)={}^t\overline{Y}({}^t\overline{T}T)Y=n{}^t\overline{Y}Y$, c.c.t.d.

149. Geometrie plană și numere complexe

(1) Fie $z=x+iy$ și $\bar{z}=x-iy$ două numere complexe conjugate. Să se arate că ecuația $Dz\bar{z}+\overline{E}z+E\bar{z}+C=0$, unde D și C sînt numere reale, iar E și $\overline{E}$ sînt numere complexe conjugate, reprezintă un cerc sau o dreaptă.

Soluție. Se știe că un element al mulțimii formată din dreptele și cercurile planului este caracterizat printr-o ecuație de forma

$$D(x^2+y^2)+2Ax+2By+C=0.$$

(Pentru $D=0$ avem drepte; pentru $D\neq 0$ avem cercuri.) Pe de altă parte observăm că $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=-\frac{1}{2}i(z-z)$, adică coordonatele unui punct oarecare din plan se pot reprezenta cu ajutorul numerelor complexe conjugate z și $\bar{z}$. De aceea ecuația precedentă este echivalentă cu

$$Dz\bar{z}+\overline{E}z+E\bar{z}+C=0,$$

unde $E=A+iB$ și $\overline{E}=A-iB$. În baza acestor observații rezultă că ecuația din enunț este ecuația unei drepte sau a unui cerc din plan.

(2) Să se stabilească afixul punctului M care împarte segmentul M_1M_2 într-un raport dat λ.

Soluție. Dacă $\frac{MM_1}{MM_2}=\lambda$, atunci se știe că $x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}$, $y=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}$, unde $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ și $M(x, y)$. Astfel afixul lui M este $z=x+iy=$
$=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}+i\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}=\frac{z_1-\lambda z_2}{1-\lambda}$, unde z_1 și z_2 sînt afixele punctelor M_1, respectiv M_2.

Mijlocul segmentului M_1M_2 are afixul $\frac{z_1+z_2}{2}$, iar centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ are afixul $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

(3) Utilizînd proprietățile modulului și identitatea $z_1(z_2-z_3)+z_2(z_3-z_1)+$
$+z_3(z_1-z_2)=0$, să se demonstreze că segmentele care unesc vîrfurile unui triunghi echilateral $M_1M_2M_3$ cu un punct oarecare O din planul triunghiului pot fi laturile unui triunghi.

Soluţie. Fie M_1, M_2 două puncte şi z_1, z_2 afixele corespunzătoare lor. Se ştie că $M_1M_2=|z_2-z_1|$.

Identificăm punctul O cu originea axelor de coordonate şi notăm cu z_1, z_2, z_3, respectiv afixele punctelor M_1, M_2, M_3.

Relaţia $z_1(z_2-z_3)+z_2(z_3-z_1)=z_3(z_2-z_1)$ împreună cu proprietăţile $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, $|ab|=|a|\cdot|b|$ implică $|z_3|\,|z_2-z_1|\leqslant|z_1|\,|z_2-z_3|+|z_2|\,|z_3-z_1|$. Pe de altă parte, triunghiul $M_1M_2M_3$ este echilateral, adică $|z_2-z_1|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$. Deci $|z_3|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

Analog se obţin inegalităţile $|z_2|\leqslant|z_1|+|z_3|$, $|z_1|\leqslant|z_2|+|z_3|$ şi astfel segmentele OM_1, OM_2, OM_3 pot fi laturile unui triunghi.

Precizare. Ecuaţia $|z-z_0|=r$ reprezintă un cerc cu centrul în z_0 şi de rază r.

(4) Fie punctele M_i, $i=1, 2, 3, 4$ şi z_i, $i=1, 2, 3, 4$ afixele corespunzătoare Să se arate că patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $\arg\left(\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}:\frac{z_4-z_3}{z_2-z_3}\right)=180°$.

Soluţie. Se ştie că M_1, M_2, M_3, M_4 sînt pe acelaşi cerc dacă şi numai dacă $\sphericalangle(\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_4})+\sphericalangle(\overrightarrow{M_3M_4},\ \overrightarrow{M_3M_2})=180°$. Pe de altă parte se observă că $\sphericalangle(\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_4})=\arg\frac{z^4-z_1}{z_2-z_1}$, $\sphericalangle(\overrightarrow{M_3M_4},\ \overrightarrow{M_3M_2})=\arg\frac{z_2-z_3}{z^4-z_3}$, iar $\arg\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}+\arg\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3}=\arg\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}-\arg\frac{z_4-z_3}{z_2-z_3}=\arg\left(\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}:\frac{z_4-z_3}{z_2-z_3}\right)$. Cu acestea soluţia devine evidentă.

(5) Presupunem că patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ este inscriptibil. Să se arate că cele şase drepte duse prin mijlocul lui A_pA_q perpendiculare pe A_rA_s (p, q, r, s sînt distincte) sînt concurente.

(The Amer. Math. Monthly, 1971)

Soluţie. Fără a scădea generalitatea, putem considera că patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ este înscris într-un cerc unitate. Dacă identificăm punctele A_i cu numerele complexe a_i, atunci dreapta care trece prin mijlocul segmentului A_pA_q şi este perpendiculară pe A_rA_s este dată de ecuaţia

$$z-a_ra_s\bar{z}=\frac{1}{2}(a_p+a_q)\,\frac{a_pa_q-a_ra_s}{a_pa_q}.$$

Rezolvînd sistemul format cu cele 6 ecuaţii de forma precedentă rezultă că cele 6 drepte se întîlnesc în punctul $\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4)$

(6) Dacă $z=x+iy$, atunci uneori este comodă notaţia $x=Rez$, $y=Imz$.

Fie M_1, M_2, M_3 trei puncte şi z_1, z_2, z_3 afixele corespunzătoare. Să se arate că aria triunghiului $M_1M_2M_3$ se poate exprima în forma

$$\mathscr{A}=\pm\frac{|z_1-z_2|^2}{2}Im\ \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}.$$

Soluţie. Se ştie că $\mathscr{A}=\frac{M_1M_2\cdot M_1M_3\sin(\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3})}{2}$. Dar $M_1M_2=$

$= |z_2 - z_1|$, $M_1M_3 = |z_3 - z_1|$ și $\sin(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = \pm \sin\left(\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \pm \frac{Im \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}}{\left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right|} =$

$= \pm \frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} Im \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$. Simple înlocuiri conduc la formula din problemă.

(7) Fie C mulțimea numerelor complexe și $f: C \to C$ funcția definită prin $f(z) = z + b$. Să se explicitеze $Ref(z)$ și $Imf(z)$. Care este semnificația geometrică a lui f?

Soluție. Punînd $z = x + iy$, $b = b_1 + ib_2$, găsim $X = Ref(z) = x + b_1$, $Y = Im\ f(z) = y + b_2$. De aceea $f: C \to C$ reprezintă o *translație* (fig. 156).

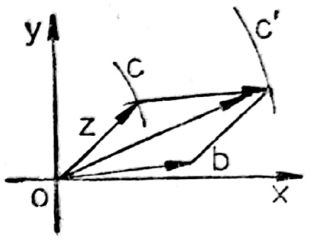


Fig. 156.

(8) Se dă funcția $f: C \to C$ definită prin $f(z) = az$.

(i) Fie $a \in R_+$. Să se explicitеze $Ref(z)$, $Imf(z)$, $|f(z)|$ și $\arg f(z)$. Care este semnificația geometrică a lui f?

(ii) Aceleași întrebări pentru $a \in C$.

Soluție. (i) Dacă punem $z = x + iy$, atunci $X = Ref(z) = ax$, $Y = Imf(z) = ay$; notînd $\rho = |z|$, $\theta = \arg z$, găsim $|f(z)| = |az| = a|z| = a\sqrt{x^2 + y^2} = a\rho$ și $\arg f(z) = \arg a + \arg z = \arg z = \theta$. Astfel $f: C \to C$ revine la o dilatare a planului xOy, dacă $a > 1$, sau la o contracție a acestuia, dacă $0 < a < 1$. Cu alte cuvinte, oricărui punct z i se atașează omoteticul său $f(z)$, f numindu-se *omotetie* (fig. 157).

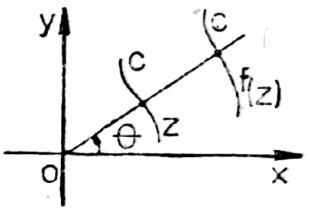


Fig. 157.

(ii) Fie a un număr complex de modul unu și de argument φ, adică $a = e^{\varphi i}$. Punem $z = \rho e^{i\theta}$; atunci $f(z) = \rho e^{i(\varphi + \theta)}$ și deci $|f(z)| = \rho$, $\arg f(z) = \varphi + \theta$. De aceea $f(z)$ se deduce din z printr-o *rotație cu centrul în origine și de unghi* φ (fig. 158).

Fie $a = re^{i\varphi}$, $z = \rho e^{\theta i}$. Rezultă $f(z) = r\rho e^{i(\varphi + \theta)}$ și deci $|f(z)| = r\rho$, $\arg f(z) = \varphi + \theta$. Astfel $f(z)$ se deduce din z printr-o omotetie urmată de o rotație.

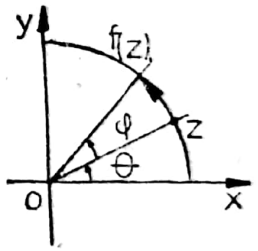


Fig. 158.

(9) Se dă funcția $f: C - \{0\} \to C$ definită prin $f(z) = \frac{1}{z}$. Să se explicitеze $Ref(z)$, $Im\ f(z)$, $|f(z)|$, $\arg f(z)$. Care este semnificația geometrică a lui f?

Indicație. Se procedează ca în exemplele anterioare.

150. În interiorul unui pătrat dat $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABK, BCL, CDM, DAN. Să se demonstreze că mijloacele celor patru segmente KL, LM, MN, NK și mijloacele celor opt segmente AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN sînt cele 12 vîrfuri ale unui dodecagon regulat.

(O.I.M., Jugoslavia, 1977)

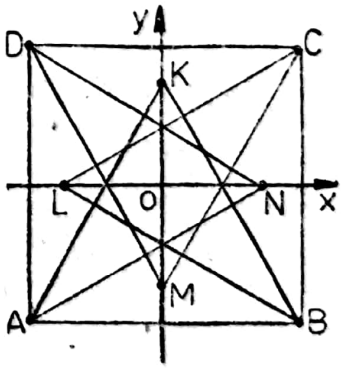


Fig. 159.

Soluție. Fixăm un sistem de axe carteziene cu originea în centrul pătratului de latură $2a$ (fig. 159). Afixele

punctelor C, D, A, B sînt respectiv $a(1+i)$, $a(-1+i)$, $a(-1-i)$, $a(1-i)$. Deoarece înălțimea triunghiului ABK este $a\sqrt{3}$, afixul lui K este $a(\sqrt{3}-1)i$. Analog afixele punctelor L, M, N sînt respectiv $a(1-\sqrt{3})$, $a(1-\sqrt{3})i$, $a(\sqrt{3}-1)$.

Ținînd seama că afixul mijlocului unui segment este semisuma afixelor capetelor segmentului, deducem:

— afixul mijlocului lui AK este $\frac{a}{2}[-1+i(\sqrt{3}-2)]$,

— afixul mijlocului lui KL este $\frac{a}{2}[1-\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i]$, etc.

Scriind aceste afixe sub formă trigonometrică găsim

$$z_k = a\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{k}{12}\pi + i\sin\frac{k}{12}\pi\right), k=1, 3, \ldots, 23.$$

De aceea $z_k^{12} = -a^{12}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{12}$, adică z_k sînt afixele vîrfurilor unui poligon regulat cu 12 laturi.

150 a. 1) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}$, x din R.

2) Utilizînd definiția, să se calculeze derivata funcției $x\to f(x)=\sin x^\circ$.

(Problema se pune în ipoteza că se acceptă definițiile din lucrarea [4] — funcții circulare.)

Soluție. 1) Se știe că $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin \alpha u}{u}=\alpha$. De aceea $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{x}=\frac{\pi}{180}$

2) Avem $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)^\circ-\sin a^\circ}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\cos h^\circ-1}{h}\sin a^\circ+\frac{\sin h^\circ}{h}\cos a^\circ\right)=$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{180}h-1}{h}\sin a^\circ+\frac{\sin\frac{\pi}{180}h}{h}\cos a^\circ\right)=\frac{\pi}{180}\cos a^\circ.$$

151. Se consideră $t\to f(t)=1+x_1\cos t+y_1\sin t+x_2\cos 2t+y_2\sin 2t$; $x_1, y_1, x_2, y_2\in R$.

1) În ipoteza că $f(t)\geqslant 0$ pentru oricare $t\in R$, să se determine mulțimile D_1, $D_2\subset R^2$, $(x_1, y_1)\in D_1$, $(x_2, y_2)\in D_2$.

2) Să se rezolve ecuația $f(t)=0$, pentru $x_1=y_1=x_2=y_2=1$.

Soluție. 1) Deoarece $f(t)\geqslant 0$, $\forall t\in R$, rezultă că și $f(t+\pi)\geqslant 0$; de asemenea, $f(t)+f(t+\pi)\geqslant 0$, sau

$$1+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\left(\frac{x_2\cos 2t}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+\frac{y_2\sin 2t}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right)=1+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cos(2t-\alpha)\geqslant 0.$$

Relația se păstrează și pentru $t=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}$, cînd $1\geqslant\sqrt{x_2^2+y_2^2}$, sau $x_2^2+y_2^2\leqslant 1$;

Scanned with OKEN Scanner

ultima relație arată că $D_2=\{(x_2, y_2)|\ x_2^2+y_2^2\leqslant 1\}$ este interiorul și cercul de rază 1 cu centrul în origine. Analog, $f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\geqslant 0$ și $f(t)+f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\geqslant 0$, adică

$$f(t)+f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=2+x_1(\cos t-\sin t)+y_1(\cos t+\sin t)=$$

$$=2+\sqrt{2}\left(x_1\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+y_1\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2+\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\geqslant 0$$

pentru oricare $t\in R$. Din relația $\sqrt{2}\geqslant -\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ rezultă $x_1^2+y_1^2\leqslant 2$ pentru $t=\frac{7\pi}{4}-\alpha$; mulțimea $D_1=\{(x_1, y_1)|\ x_1^2+y_1^2\leqslant 2\}$ este interiorul și cercul de rază $\sqrt{2}$ cu centrul în origine.

2) Ecuația $1+\cos t+\sin t+\cos 2t+\sin 2t=0$ devine

$$\cos t+\sin t+(\cos t+\sin t)^2+\cos^2 t-\sin^2 t=0,$$

$$(\cos t+\sin t)(1+2\cos t)=0,\ \text{sau}\ \operatorname{tg} t=-1,\ t=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \cos t=-\frac{1}{2},$$

$$t=\pm\frac{2\pi}{3}+2k'\pi,\ k',\ k\in Z.$$

152. Pentru sistemul $a\sin x-b\cos x=c\sin x\cos x$, $a\cos x+b\sin x=\cos 2x$, $a, b, c\in R$, se cere:

1) să se determine $f(a, b, c)=0$, prin eliminarea lui x din sistemul considerat;

2) să se reprezinte curba $f(x, y, 1)=0$, x considerîndu-se variabilă independentă;

3) să se rezolve ecuația $f(\sin x, \cos x, 2)=0$.

Soluție. 1) Se determină $a=c(\sin x^2\cos x+\cos x\cos 2x)$, sau $\frac{a}{c}=\cos^3 x$ și $b=c(\cos 2x\sin x-\sin x\cos^2 x)$, sau $\frac{b}{c}=-\sin^3 x$. S-a obținut $\cos x=\left(\frac{a}{c}\right)^{1/3}$, $\sin x=-\left(\frac{b}{c}\right)^{1/3}$ și deci $1=\left(\frac{a}{c}\right)^{2/3}+\left(\frac{b}{c}\right)^{2/3}$, sau $a^{2/3}+b^{2/3}-c^{2/3}=0$.

2) Se reprezintă funcțiile $x\to y=\pm\sqrt{(1-x^{2/3})^3}$, care au graficele simetrice față de Ox;

Tabelul de variație pentru $y=(1-x^{2/3})^{3/2}$:

$$y'=-\frac{(1-x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}$$

x	-1		0		1
y'	0	$+\quad +\infty$	$\|$	$-\infty\quad -$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

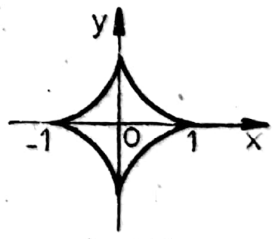


Fig. 160.

Imaginea curbei de ecuație $f(x, y, 1)=0$ este dată în fig. 160.

Scanned with OKEN Scanner

3) $\sin^{2/3}x+\cos^{2/3}x=2^{2/3}$; ridicînd la cub, rezultă $\sin^2 x+\cos^2 x+$ $+3\sin^{4/3}x\cos^{2/3}x+3\sin^{2/3}x\cos^{4/3}x=4$, $\sin^{2/3}x\cos^{2/3}x(\sin^{2/3}x+\cos^{2/3}x)=1$, sau $(2\sin x\cos x)^{2/3}=1$; $\sin 2x=\pm 1$, $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, $k\in Z$.

153. 1) Să se arate că pentru $0<\lambda<1$, cea mai mică rădăcină a ecuației (1) $\sin x=\lambda x$ este funcție descrescătoare de λ.

2) Să se afle cîte rădăcini pozitive ale ecuației (1) există pentru $\lambda=\frac{2}{(4n+1)\pi}$, unde n este întreg.

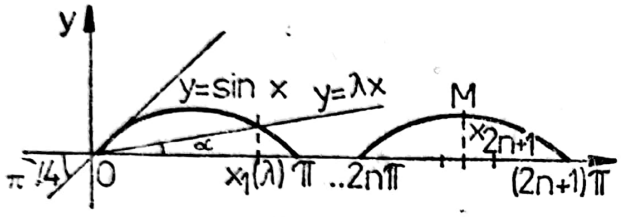


Fig. 161.

(*Cambridge*, 1972)

Soluție (fig. 161). 1) Rădăcina $x_1(\lambda)\in(0,\pi)$ este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației $\sin x=\lambda x$. Deoarece $\alpha\to\lambda=\operatorname{tg}\alpha$, pentru $\alpha\in(0,\pi/4)$, este funcție crescătoare, iar $x_1(\lambda)$ este descrescătoare ca funcție de α (funcție compusă), rezultă implicația $\{(\forall)\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$ cu $\lambda_1<\lambda_2\}\Rightarrow x_1(\lambda_1)>x_2(\lambda_2)$; adică x_1 este descrescătoare ca funcție de λ.

b) Dreapta $y=\frac{x}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ trece prin punctul $M\left(2n\pi+\frac{\pi}{2},1\right)$. Deoarece pe oricare interval $(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $0\leqslant k\leqslant n$ ecuația (1) are două rădăcini (considerînd și rădăcinile $x=0$, $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$), rezultă că numărul rădăcinilor pozitive pe $\left(0,2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ este $N=2n+1$.

Observație. O altă soluție se poate da, observînd că $x_1(\lambda)\in(0,\pi)$ este derivabilă pentru $\lambda\in(0,1)$; se determină $x'(\lambda)=\frac{x(\lambda)}{\cos x-\lambda}$ și se constată că $x'(\lambda)<0$ pentru $\lambda\in(0,1)$.

154. 1) Să se arate că pentru $f:E\to R$, integrabilă pe $[-a,a]\subset E$ se satisface: dacă f este funcție pară, atunci $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$, iar dacă f este funcție impară, atunci $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$.

Soluție. Fie $f(-x)=-f(x)$; $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x+$ $+\int_{a}^{0}f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$ (s-a făcut substituția $x=-t$ în a doua integrală).

Pentru $f(-x)=f(x)$ se procedează analog şi rezultă $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

2) (I) Să se calculeze $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n(x)\cos x\,\mathrm{d}x$, unde P_n este un polinom real.

(II) Să se arate că şirul $n\to I_n=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^n\cos x\,\mathrm{d}x$ este şir Cauchy şi să i se calculeze limita.

Soluţie. (i) Fie polinomul $P_n(x)=\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}x^j$; $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^j\cos x\,\mathrm{d}x=2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{n-2i}\int_{i=0}^{\pi/2} x^{2i}\cos x\,\mathrm{d}x$, deoarece $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{2n+1}\cos x\,\mathrm{d}x=0$ (integrală de funcţie impară) şi $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{2p}\cos x\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\pi/2} x^{2p}\cos x\,\mathrm{d}x$ (integrală de funcţie pară).

Integrînd prin părţi, se obţine formula de recurenţă

$$I_{2i}=\int_{0}^{\pi/2} x^{2i}\cos x\,\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2i}-2i(2i-1)I_{2i-2}$$ şi deci

$$I_{2i}=\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\frac{(2i)_i}{(2i-2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2i-2k}.$$

În concluzie

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(x)\cos x\,\mathrm{d}x=2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{n-2i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\frac{(2i)!}{(2i+2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2i-2k},$$

(ii) Subşirul $(I_{2k-1})_{k\in N}$ este un şir constant, $I_{2k-1}=0$, deoarece $x\to f(x)=x^{2k-1}\cos x$ este funcţie impară; $I_{2k}=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^{2k}\cos x\,\mathrm{d}x$, ca integrală a unei funcţii pare pe un interval echilibrat. Reamintim definiţia şirului Cauchy: $(I_{2k})_{k\in N}$ este şir Cauchy, dacă $(\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon))$ încît $(\forall k,\ m>N(\varepsilon))\Rightarrow$ $\Rightarrow|I_{2k}-I_{2m}|<\varepsilon$. Pentru a arăta, se evaluează modulul

$|I_{2k}-I_{2m}| \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} |x^{2k}-x^{2m}|\,|\cos x|\,dx \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} |x^{2k}-x^{2m}|\,dx$; deoarece $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset$ $\subset [0, 1)$, rezultă $x^{2k} \to 0$ pentru $k \to \infty$ și deci $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))$ încît $(\forall k, m > N(\varepsilon)) \to |x^{2k}-x^{2m}| < \frac{2\varepsilon}{\pi}$; în aceste condiții $|I_{2k}-I_{2m}| < 2 \cdot \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx =$ $= \varepsilon$. A rezultat că $(I_n)_{n \in N}$ este șir Cauchy. Din evaluarea $|I_{2k}| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} |x^{2k}|\,|\cos x|\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2k}\,dx = \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} < \frac{1}{2k+1}$ și cu $\frac{1}{2k+1} \to 0$ pentru $k \to \infty$, rezultă că subșirul $(I_{2k})_{k \in N}$ are limita zero; deoarece $I_{2k-1} = 0$, $k \in N$, rezultă că șirul $(I_n)_{n \in N}$ are limita nulă.

155. Fie o funcție $f: E \to R$, integrabilă, periodică de perioadă T; E este domeniul său maxim de definiție. Se cere:

1) Să se arate că $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx$, oricare ar fi constantele a, b; $(a, a+T)$, $(b, b+T) \subset E$.

2) Dacă graficul $G(f)$ al funcției f admite centrul de simetrie $(c, 0)$ atunci $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = 0$, a — arbitrar; în cazul cînd f nu este periodică, proprietatea se exprimă prin $\int_{c-a}^{c+a} f(x)\,dx = 0$.

3) Să se calculeze $\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx$, unde $f(x) = \ln(\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1})$, iar $a \in R$.

Soluție. 1) Din aditivitatea față de domeniu, $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b+T} f(x)\,dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)\,dx$; deoarece schimbarea variabilei $x = u+T$ implică $\int_{b+T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^a f(u+T)\,du = -\int_a^b f(u)\,du$, rezultă egalitatea cerută.

2) Graficul $G(f)$ al funcției f are centrul de simetrie $(c, 0)$, dacă $\{\forall x \in E,\ x = c-t\} \Rightarrow \{c+t \in E\}$ și $f(a+t) = -f(a-t)$.

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd translația originii în $(c, 0)$ prin $x=c+t$, se obține funcția $t\to\varphi(t)=f(c+t)$, care satisface $\varphi(-t)=-\varphi(t)$; pentru funcția φ este adevărată egalitatea (deoarece φ este funcție impară) $\int_{-a}^{a}\varphi(t)\,dt=0$ și revenind la variabila x, rezultă $\int_{c-a}^{c+a} f(x)\,dx=0$, a — arbitrar, $(c-a, c+a)\subset E$. Dacă în plus f este periodică de perioada T, luînd $a=\frac{T}{2}$ rezultă, ținînd seamă de 1), $0=\int_{c-\frac{T}{2}}^{c+\frac{T}{2}} f(x)\,dx=\int_{b}^{b+T} f(x)\,dx$.

3) Deoarece funcția cosinus este periodică de perioadă 2π, avem $f(x+2\pi)=f(x)$, $\forall x\in R$ și deci f este periodică de perioadă 2π. Se demonstrează că $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ este centru de simetrie pentru $G(f)$; $f\left(-\frac{\pi}{2}-t\right)=\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)+\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)+1}\right)=\ln\left(-\sin t+\sqrt{\sin^2 t+1}\right)=-\ln\left(\sin t+\sqrt{\sin^2 t+1}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)=\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\sqrt{\sin^2 t+1}\right)=\ln\left(\sin t+\sqrt{\sin^2 t+1}\right)$. Din ultimele două egalități rezultă $f\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)=-f\left(-\frac{\pi}{2}-t\right)$.

Deoarece f este periodică de perioadă 2π, iar graficul $G(f)$ admite centrul de simetrie $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, cu 2) rezultă

$$\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\,dx=0,\quad a\in R.$$

156. 1) Fie f o funcție cu derivata continuă pe $[a, b]$. Să se arate că

$$\lim_{t\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cos tx\,dx=0 \text{ și } \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\sin tx\,dx=0.$$

2) Rămîne valabilă afirmația precedentă dacă f este numai continuă pe $[a, b]$?

Soluție. 1) Utilizăm integrarea prin părți:

$$\int_{a}^{b} f(x)\cos tx\,dx=\frac{f(b)\sin tb}{t}-\frac{f(a)\sin ta}{t}-\frac{1}{t}\int_{a}^{a} f'(x)\sin tx\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte f' este mărginită pe $[a, b]$, adică $|f'(x)| \leqslant M$, $\forall x \in [a, b]$ De aceea

$$\left|\int_a^b f(x) \cos tx \, dx\right| \leqslant \frac{|f(b)\sin tb|}{|t|} + \frac{|f(a)\sin ta|}{|t|} + \frac{M}{|t|}\int_a^b |\sin tx| \, dx$$

și deci $\lim\limits_{t\to\infty}\left|\int_a^b f(x) \cos tx \, dx\right| = 0$, adică $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^b f(x) \cos tx \, dx = 0$.

Analog se tratează a doua limită.

2) Răspunsul este afirmativ. Într-adevăr, se știe că dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci există o funcție g cu derivata continuă pe $[a, b]$ astfel încît $\int_a^b |(f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$. Cu aceasta avem

$$\int_a^b f(x) \cos tx \, dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) \cos tx \, dx + \int_a^b g(x) \cos tx \, dx.$$

Deci $\left|\int_a^b f(x) \cos tx \, dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \left|\int_a^b g(x) \cos tx \, dx\right|$ și problema se reduce la cazul 1).

157. Unghiul dintre două curbe

1°. Fie $f, g : [a, b] \to R$, derivabile pe acest interval, iar graficele celor două funcții $G(f)$, $G(g)$ au un punct de intersecție (x_0, y_0), $x_0 \in (a, b)$. Se cere:

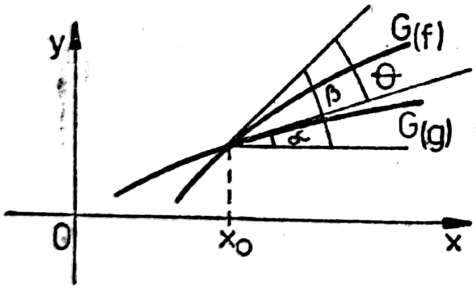


Fig. 162.

1) Să se calculeze unghiul dintre cele două curbe în (x_0, y_0).

2) Care este condiția ca cele două curbe să fie ortogonale în punctul considerat (x_0, y_0)?

Soluție. Punctul de intersecție este (x_0, y_0), unde $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$. Unghiul dintre cele două curbe (graficele $G(f)$, $G(g)$) este unghiul dintre tangentele duse în punctul (x_0, y_0) la cele două curbe, $\theta = \beta - \alpha$ (fig. 162).

Deoarece $\operatorname{tg}\beta = f'(x_0)$, $\operatorname{tg}\alpha = g'(x_0)$, pentru $1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha = 1 + f'(x_0)g'(x_0) \neq 0$ avem $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_2)g'(x_0)}$ și deci $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \in \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Cele două curbe sînt ortogonale, adică $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ dacă și numai dacă $1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha = 1 + f'(x_0)g'(x_0) = 0$.

Dacă, spre exemplu, există o familie de curbe plane de ecuație $y = h(x, m)$, $m \in M \subset R$, $h : [a, b] \to R$, încît pentru fiecare $x_0 \in (a, b)$ există $m_0 \in M$, încît

$G(h)$ [illegible] gonala curbei $G(f)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$, atunci $G(h)$ pentru m [illegible] $b]$ este o familie de curbe ortogonale curbei $G(f)$.

2°. Se dă $x \to f(x) = \frac{1}{x}$ și $x \to g_a(x) = \log_a x$, $a > 1$.

[illegible] se determine curba $G(g_a)$ ortogonală curbei $G(f)$ într-un punct de abscisă dată $x_0 > 0$.

Soluție. Deoarece $y_0 = \frac{1}{x_0} = f(x_0)$, punctul de intersecție este $\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$. Rezultă din calcul $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$, $g_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}$, $g_a'(x_0) = \frac{1}{x_0 \ln a}$; din condiția $g_a'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}$ rezultă că $\ln a = \frac{1}{x_0^3}$, sau $a = e^{1/x_0^3}$. Deci curba $G(g_a)$ ortogonală curbei $G(f)$ în (x_0, y_0) este $g_{a_0}(x) = \log_{a_0} x$, unde $a_0 = e^{1/x_0^3}$. Se observă că condiția $x_0 > 0$ implică $a > 1$.

3°. Se consideră ecuația diferențială $y'' + \omega^2 y = 0$. Se cere:

1) Să se verifice că $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ este soluție a ecuației; x, A, $B \in R$; A, B — constante arbitrare.

2) Să se determine soluția $y = f(x)$, $x \in R$, care satisface condițiile inițiale $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Se consideră $x \to f(x)$, pentru $\omega = 1$.

3) Să se determine familia de curbe (izogonale), $\{G(g_\lambda) | \lambda \in R\}$, care satisface proprietatea că pentru orice punct $(x, y) \in G(f)$ există o curbă $(C) \in \{G(g_\lambda)\}$ care trece prin acest punct și face cu $G(f)$ un unghi egal cu $\frac{\pi}{4}$; să se determine curba $G(g_\lambda)$ ce corespunde punctului $(0, 0) \in G(f)$;

4) Să se determine familia de curbe ortogonale lui $G(f)$, să se traseze graficul curbei ce trece prin $(0, f(0))$ și al restricției $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$.

Soluție. 1) $x \to y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ este indefinit derivabilă pe R; $y'(x) = -\omega A \sin \omega x + \omega B \cos \omega x$, $y''(x) = -\omega^2 A \cos \omega x - \omega^2 B \sin \omega x$ și se verifică direct $y'' + \omega^2 y = 0$, $x \in R$.

2) Condiția $y(0) = 0$ implică $A = 0$, iar $y'(0) = 1$ implică $B = \frac{1}{\omega}$; deci $f(x) = \frac{1}{\omega} \sin \omega x$.

3) Dacă θ este unghiul dintre $G(f)$ și $G(g_\lambda)$ într-un punct arbitrar $(x, y) \in G(f)$, se impune condiția $\operatorname{tg} \theta = \frac{f'(x) - g_\lambda'(x)}{1 + f'(x) g_\lambda'(x)} = 1$; notînd $y'(x) = g_\lambda'(x)$ și înlocuind $f'(x) = \cos x$ rezultă ecuația diferențială $\frac{\cos x - y'}{1 + y' \cos x} = 1$; deci $y = \int \frac{\cos x - 1}{1 + \cos x} dx + \lambda$; deoarece $\int \frac{\cos x - 1}{1 + \cos x} dx = -\int \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = -2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x$, rezultă $\left\{y = x - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \lambda | \lambda \in R\right\}$, unde $g_\lambda(x) = x - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \lambda$.

Scanned with OKEN Scanner

Din condiția $(0, 0)\in G(g_\lambda)$ rezultă $\lambda=0$ și deci curba $G(g_0)$ de ecuație $y=x-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ este izogonală curbei $G(f)$ în $(0, 0)$, unghiul fiind $\theta=\frac{\pi}{4}$.

4) Condiția de ortogonalitate pentru $G(f)$ și o familie de curbe $G(h_\lambda)$ este $f'(x)\cdot h'_\lambda(x)=-1$. Notînd $y'(x)=h'_\lambda(x)$, rezultă ecuația diferențială $y'=-\frac{1}{\cos x}$ cu soluția $y(x)=-\int\frac{dx}{\cos x}+\lambda$. Deoarece $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}$, cu schimbarea variabilei $u=\sin x$ (considerată pe un interval de monotonie al funcției sinus), rezultă

$$y(x)=-\int\frac{du}{1-u^2}+\lambda=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}+\lambda.$$

În concluzie, ecuațiile curbelor ortogonale sînt $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}+\lambda$.

Deoarece $f(0)=0$, se impune $(0, 0)\in G(h_\lambda)$, de unde rezultă $\lambda=0$ și deci curba ortogonală lui $G(f)$ în punctul $(0, 0)$ este $G(h_0)$ de ecuație $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$.

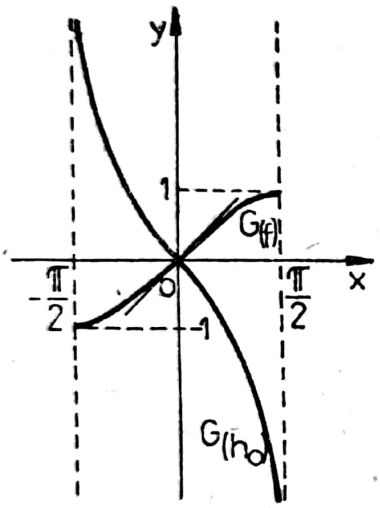


Fig. 163.

Urmează tabelul de variație al funcției h_0 și graficele pentru h_0 și f (fig. 163), cînd $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\pi/2$
$h_0'(x)$		$-$	-1	$-$	
$h_0(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

158. Polinoame trigonometrice

(i) Un sistem de funcții $h_k:[a, b]\to R$, $k\in\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ este sistem fundamental de funcții periodice pe $[a, b]$, dacă sînt satisfăcute proprietățile:

(1) h_k sînt funcții continue pe $[a, b]$,

(2) $h_k(a)=h_k(b)$,

(3) $F(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k h_k(x), \sum_{k=0}^{n}C_k^2>0$, are pe intervalul $[a, b]$ cel mult n rădăcini (a și b se consideră o singură rădăcină).

(ii) Funcția $x\to F(x)$ se numește *polinom generalizat de gradul n* (de funcții periodice).

1°. Se dă $z\to w=e^{iz}$, $z=x+iy$. Se cere:

1) Să se determine $|w|$, $\arg w$ și să se arate că w este funcție periodică de perioadă $T=2\pi$;

2) Să se arate că pentru fiecare $w\in C$ există $x\in[0, 2\pi)$ unic, încît $w=e^{iz}$;

3) Să se verifice că 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\ldots$, $\sin nx$, $\cos nx$ este sistem fundamental de funcții periodice pe $[0, 2\pi]$ și $T_n(x)=\frac{a_0}{2}+$

$+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ este polinom de funcţii periodice, de gradul $2n$ (numit tradiţional *polinom trigonometric de gradul n*).

Soluţie. 1) Deoarece $w=|w|e^{i\arg w}$, rezultă echivalenţa

$$w=e^{iz}\Leftrightarrow\{|w|=e^{-y},\ \arg w=x+2m\pi,\ m\in Z\}.$$

Se calculează $w(z+2\pi)=e^{i(z+2\pi)}=e^{iz}e^{i2\pi}=e^{iz}=w(z)$ şi rezultă că $T=2\pi$ este perioada; sau din $e^{iz}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$, deoarece funcţiile $\sin x$, $\cos x$ au perioade $T=2\pi$.

2) Observăm că $z=x+iy$, $z=-i\ln|w|+\arg w+2m\pi$, $m\in Z$; dacă $x\in[0,\ 2\pi)$ rezultă $m=0$ şi pentru fiecare w rezultă x unic pe $[0,\ 2\pi)$.

3) Funcţiile cu valorile $\{\sin kx\}$, $\{\cos kx\}$, $k\in\{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$, sînt continue pe $[0,\ 2\pi]$ şi se verifică direct că $h_k(0)=h_k(2\pi)$. Cu relaţiile lui Euler şi cu schimbarea variabilei $z=e^{ix}$ rezultă $\cos kx=\frac{z^k+z^{-k}}{2}$, $\sin kx=\frac{z^k-z^{-k}}{2i}$; înlocuind şi grupînd după puterile lui z, rezultă un polinom algebric de gradul $2n$ în z: $T_n(x(z))=\sum_{k=-n}^{n}C_kz^k=\frac{1}{z^n}P_{2n}(z)$, care are cel mult $2n$ rădăcini în C.

Din 2) rezultă că $z\to x$ prin $z=e^{ix}$, $x\in[0,\ 2\pi)$ realizează o corespondenţă biunivocă; presupunînd $P_{2n}(z_j)=0$, $j\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n\}$ vor rezulta $2n$ valori x_j, $z_j\to x_j$, $x_j\in[0,\ 2\pi)$, pentru care $T_n(x_j)=0$.

Consecinţă. Două polinoame trigonometrice $T_n(x)$, $T_n^*(x)$ definite pe $[0,\ 2\pi]$, care au aceleaşi valori în $2n+1$ puncte distincte din $[0,\ 2\pi)$, sînt identice.

159. 1) Să se demonstreze valabilitatea descompunerii:

$$T_n(x)=C_n\,2^{2n}(-1)^ne^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{2n}x_k}\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2},\ \text{unde } T_n(x_k)=0,\ k\in\{1,\ 2,\ \ldots,2n\}.$$

2) Folosind 1) să se descompună polinomul $T_n(x)=\sin nx$

3) (*Matematica v şcole*, 1976) Să se arate că

$$\sin 36x=2^{35}\prod_{k=0}^{36}\sin\frac{x+k\cdot5^\circ}{2}.$$

Soluţie. 1) Prin schimbarea variabilei $z=e^{ix}$, $x\in[0,\ 2\pi)$, rezultă $T_n(x(z))=z^{-n}P_{2n}(z)$; fie z_k — rădăcinile polinomului algebric, $P_{2n}(z_k)=0$, $k\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n\}$ şi $z_k\to x_k$, $T_n(x_k)=0$. Deoarece $P_{2n}(z)=C_{-n}+C_{-n+1}z+\ldots+C_nz^{2n}$, rezultă că $T_n(x(z))=C_nz^{-n}\prod_{k=1}^{2n}(z-z_k)$, sau $T_n(x)=C_ne^{-inx}\prod_{k=1}^{n}(e^{ix}-e^{ix_k})=C_n\prod_{k=1}^{2n}e^{i\frac{x_k}{2}}(e^{i\frac{x-x_k}{2}}-e^{-i\frac{x-x_k}{2}})=C_n(2i)^{2n}e^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{2n}x_k}\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2}$, de unde rezultă concluzia.

Scanned with OKEN Scanner

2) Deoarece pentru $T_n(x)=\sin nx$, prin $z=e^{ix}$, $x\in(0, 2\pi]$, se obține $T_n(x(z))=\frac{z^n-z^{-n}}{2i}=\frac{1}{2i}z^{-n}(z^{2n}-1)$, rezultă că

$$C_n=\frac{1}{2i},\quad T_n(x)=\frac{1}{2i}2^{2n}(-1)^n e^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{2n}x_k}\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2},\ \text{unde } x_k=\frac{k\pi}{n},$$

$k\in\{1, 2, \ldots, 2n\}$ sînt rădăcinile ecuației $\sin nx=0$.

Se calculează $\sum_{k=1}^{2n}\frac{k\pi}{n}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n}k=\frac{\pi}{n}\frac{2n(2n+1)}{2}=(2n+1)\pi$ și se înlocuiește:

$$T_n(x)=i2^{2n-1}(-1)^{n+1}e^{i(2n+1)\frac{\pi}{2}}\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{x-\frac{k\pi}{n}}{2},\ \text{sau}\ \sin nx=2^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{x-\frac{k\pi}{n}}{2}.$$

3) Cu rezultatele de mai sus, $\sin 36x=2^{71}\prod_{k=1}^{72}\sin\frac{x-\frac{k\pi}{36}}{2}=2^{71}\prod_{k=1}^{36}\sin\frac{x-\frac{k\pi}{36}}{2}$

$$\prod_{k=1}^{36}\sin\left(\frac{x-\frac{k\pi}{36}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2^{71}(-1)^{36}\prod_{k=1}^{36}\sin\frac{x-\frac{k\pi}{36}}{2}\cdot\cos\frac{x-\frac{k\pi}{36}}{2}=2^{35}\prod_{k=1}^{36}\sin\left(x-\frac{k\pi}{36}\right)=$$

$$=2^{35}(-1)^{36}\prod_{k=1}^{36}\sin\left(x+\frac{k\pi}{36}\right),\ \text{deoarece}\ \sin\left(\pi+x-\frac{k\pi}{36}\right)=-\sin\left(x-\frac{k\pi}{36}\right)=$$

$$=\sin\left(x+(36-k)\frac{\pi}{36}\right)$$ și s-a redefinit indicele de factorizare.

Altă soluție a punctului 3) (*G.M.* 1/1978).

Soluțiile ecuației $\sin 36x=0$ sînt $x_k=k\cdot 5°$, $k\in\{1, 2, \ldots, 72\}$. Deoarece $\sin 36x=C_{36}^1\cos^{35}x\sin x-C_{36}^3\cos^{33}x\sin^3 x+\ldots-C_{36}^{35}\cos x\sin^{35}x$, rezultă că $\sin 36x=\sin x\ \cos x\ P_{34}(\cos^2 x)$, iar coeficientul lui $\cos^{34}x$ este $a_0=$ $=C_{36}^1+C_{36}^3+\ldots+C_{36}^{35}=2^{35}$.

Restrîngînd pe $[0°, 180°]$, rezultă că $P_{34}(\cos^2 x)$ are soluțiile $k\cdot 5°$, $k\in$ $\in\{1, \ldots, 35\}$; deoarece $\cos^2 x=\cos^2(180°-x)$ rezultă că $P(\cos^2 x)=$ $=2^{35}(\cos^2 x-\cos^2 5°)(\cos^2 x-\cos^2 10°)\ldots(\cos^2 x-\cos^2 85°)$, sau sub formă de produse $P(\cos^2 x)=-2^{35}\prod_{k=1}^{15}\sin(x-k\cdot 5°)\sin(x+k\cdot 5°)$. Înlocuind în descompunerea inițială, rezultă $\sin 36x=-2^{35}\sin x\ \cos x\prod_{k=1}^{35}\sin(x-k\cdot 5°)\cdot\sin(x+k\cdot 5°)$ și apoi relația finală.

160. 1) Să se arate că $\sum_{k=-m}^{m}e^{ikx}=-1+2\,Re\sum_{k=0}^{m}e^{ikx}$.

2) Să se restrîngă expresiile $E(m, x)=-1+\sum_{k=0}^{m}2\cos kx$ și $\sum_{m=0}^{n-1}E(m, x)$.

3) Să se verifice inegalitatea

$$\left|\frac{\sin^2 nx/2}{\sin x/2}+n\right|\leqslant n(n+1),\quad \forall n\in N,\quad \forall x\in R-\{2k\pi,\ k\in Z\}.$$

Soluţie. 1) Se observă că $\sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}=\sum_{k=-m}^{-1} e^{ikx}+1+\sum_{k=1}^{m} e^{ikx}=1+\sum_{k=1}^{m}(e^{ikx}+e^{-ikx})=1+\sum_{k=1}^{m}2\cos kx=-1+2\sum_{k=0}^{m}\cos kx=-1+2\sum_{k=0}^{m} Re\, e^{ikx}=-1+2\ Re\sum_{k=0}^{m} e^{ikx}$; evident, $\sum_{k=-m}^{m}\sin kx\equiv 0$.

2) Avem $\sum_{k=0}^{m} e^{ikx}=\frac{1-e^{i(m+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{-ix/2}-e^{i(m+1/2)x}}{-2i\sin x/2}=e^{i\frac{m}{2}x}\frac{\sin\frac{m+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$, pentru $x\neq 2k\pi$.

Egalînd părţile reale găsim

$$E(m,\ x)=-1+\sum_{k=0}^{m}2\cos kx=\frac{\sin(m+1/2)x}{\sin x/2}.$$

Pe de altă parte, pentru $n\geqslant 1$, deducem $\sum_{m=0}^{n-1} e^{imx}=\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}=\frac{1-\cos nx-i\sin nx}{e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})}$; înmulţind ambii membri cu $e^{ix/2}$ şi egalînd părţile imaginare obţinem

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sin(m+1/2)x=\frac{\sin^2 n\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Deci

$$\sum_{m=0}^{n-1}E(m,x)=\sum_{m=0}^{n-1}\left(-1+\sum_{k=0}^{m}2\cos kx\right)=-n+\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}2\cos kx=\frac{\sin^2 nx/2}{\sin^2 x/2}.$$

3) Identitatea $\frac{\sin^2 n\,x/2}{\sin^2 x/2}+n=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}2\cos kx$ implică $\left|\frac{\sin^2 nx/2}{\sin^2 x/2}+n\right|=\left|\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}2\cos kx\right|\leqslant\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}2|\cos kx|\leqslant\sum_{m=0}^{n-1}2(m+1)=n(n+1)$.

161. Să se arate că

1) dintre toate triunghiurile avînd baza şi perimetrul date, triunghiul isoscel are aria maximă;

2) dintre toate triunghiurile avînd baza şi aria date, triunghiul isoscel are cel mai mic perimetru.

Scanned with OKEN Scanner

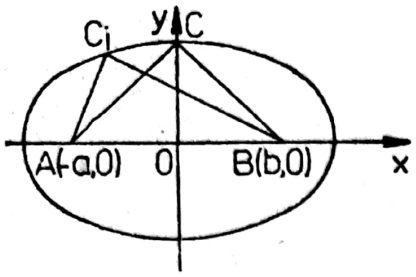


Fig. 164.

Soluţie. 1) Considerăm triunghiul ABC şi un sistem cartezian de axe ca în fig. 164. Proprietatea elipsei ne arată că toate triunghiurile ABC_1 au acelaşi perimetru. De asemenea este evident că triunghiul cu cea mai mare înălţime are cea mai mare arie; aceasta are loc cînd $C_1 \equiv C$, adică ABC este un triunghi isoscel.

2) În baza legii reciprocităţii, un triunghi isoscel are cel mai mic perimetru pentru o bază dată şi o arie dată.

202. Fie un triunghi ABC şi P un punct variabil pe segmentul CA. Se notează cu R şi Q respectiv proiecţiile lui P pe AB şi BC; se notează cu O proiecţia lui B pe AC.

1) Să se determine P astfel încît

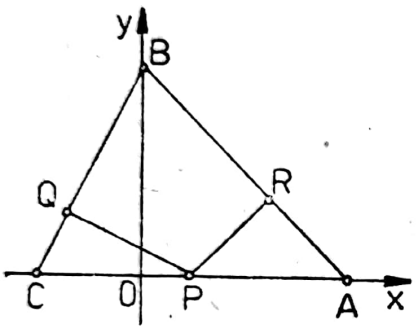


Fig. 165.

$$BC \cdot (CQ+QP)+AB \cdot (PR+RA)= \\ =BC \cdot BQ+BA \cdot BR+OB \cdot CA;$$

discuţie.

2) Să se arate că $PQ+PR=\text{const.}$ dacă şi numai dacă ABC este un triunghi isoscel (să se precizeze şi valoarea constantei).

Soluţie. Se fixează un sistem de coordonate ca în fig. 165 şi se notează cu a abscisa lui A, cu c abscisa lui C şi cu b ordonata lui B.

1) Fie $P(t, 0)$, $c \leqslant t \leqslant a$. Dreapta BC are ecuaţia $bx+cy-bc=0$, iar perpendiculara dusă prin P la BC are ecuaţia $cx-by-ct=0$. Privind lungimile segmentelor ca distanţa de la un punct la o dreaptă, găsim $CQ=\frac{|c^2-ct|}{\sqrt{c^2+b^2}}$, $BQ=\frac{|-b^2-ct|}{\sqrt{c^2+b^2}}$, $PQ=\frac{|bt-bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}$. Schimbînd pe c în a deducem $RA=\frac{|a^2-at|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $BR=\frac{|-b^2-at|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ şi $PR=\frac{|bt-ba|}{\sqrt{b^2+a^2}}$. Pe de altă parte $BC=\sqrt{c^2+b^2}$ şi $AB=\sqrt{a^2+b^2}$. De aceea relaţia din enunţ este echivalentă cu o ecuaţie în t

$$-c(t-c)+b(t-c)+b(a-t)+a(a-t)=|b^2+ct|+|b^2+at|+b(a-c),$$

adică

$$-t(a+c)+c^2+a^2=|b^2+ct|+|b^2+at|. \tag{1}$$

Se observă că

$$|b^2+ct|=\begin{cases} b^2+ct & t<\frac{b^2}{-c} \\ 0 & t=\frac{b^2}{-c} \\ -(b^2+ct) & t>\frac{b^2}{-c} \end{cases} \quad ; \text{ şi } \quad \frac{b^2}{-c}>c,$$

$$|b^2+at|=\begin{cases} b^2+at & t>\frac{b^2}{-a} \\ 0 & t=\frac{b^2}{-a}\ ;\ \frac{b^2}{-a}<a \text{ și } \frac{b^2}{-a}<\frac{b^2}{-c}; \\ -(b^2+at) & t<\frac{b^2}{-a} \end{cases}$$

Pentru reducerea cazurilor posibile, în continuare presupunem $a+c>0$, $c<t<a$.

Dacă unghiul B este obtuz, adică $b^2<(-c)a$, atunci avem ordinea $c<\frac{b^2}{-a}<$ $<\frac{b^2}{-c}<a$. Ecuația (1) nu are soluție pe $\left(c,\ \frac{b^2}{-a}\right]$; pe $\left(\frac{b^2}{-a},\ \frac{b^2}{-c}\right)$ găsim soluția $t=\frac{c^2+a^2-2b^2}{2(a+c)}$ dacă și numai dacă $\frac{-2c}{a}(b^2+a^2)<(a-c)^2<\frac{2a}{-c}(b^2+c^2)$; pe $\left[\frac{b^2}{-c},\ a\right)$ găsim soluția $t=\frac{c^2+a^2}{2}$ dacă și numai dacă $(a-c)^2\geqslant\frac{2a}{-c}(b^2+c^2)$.

Dacă unghiul B este drept, adică $b^2=(-c)a$, atunci $c=\frac{b^2}{-a}<a=\frac{b^2}{-c}$ și ecuația (1) are pe $(c,\ a)$ soluție $t=\frac{c+a}{2}$.

Dacă unghiul B este ascuțit, adică $b^2>(-c)a$, atunci $\frac{b^2}{-a}<c<a<\frac{b^2}{-c}$ și ecuația (1) are pe $(c,\ a)$ soluția $t=\frac{c^2+a^2-2b^2}{2(a+c)}$ dacă și numai dacă $2(b^2+c^2)<$ $<(a-c)^2<2(b^2+a^2)$.

2) Se observă că $PQ+PR=\frac{b(t-c)}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b(a-t)}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}+$ $+b\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}-\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}\right)t=\text{const}$, $\forall t\in[c,\ a]$, dacă și numai dacă $\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}-$ $-\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}=0$, adică $a=-c$. Valoarea constantei este $\frac{2ab}{\sqrt{b^2+a^2}}=d(A;\ CB)$, adică tocmai lungimea înălțimii coborîtă din vîrful A.

162. Să se arate că este imposibil ca 16 drepte distincte să fie așezate într-un plan astfel încît să existe cel puțin șapte puncte prin care să treacă cîte patru drepte și cel puțin patru puncte prin care să treacă cîte șapte drepte.

Soluție. Orice două drepte distincte determină cel mult un punct. Pe de altă parte există $C_{16}^2=120$ perechi de drepte.

Prin fiecare din cele 7 puncte trec C_4^2 perechi de drepte, iar prin fiecare din cele 4 puncte trec C_7^2 perechi de drepte. Rezultă $7C_4^2+4C_7^2=126>120$, ceea ce este contradictoriu.

Scanned with OKEN Scanner

163. Fie ABC un triunghi. Pe laturile BC, CA, AB considerăm respectiv punctele X, Y, Z.

1) Presupunem $BX \leqslant XC$, $CY \leqslant YA$, $AZ \leqslant ZB$. Să se arate că aria $(XYZ) \geqslant \frac{1}{4}$ aria (ABC).

2) Să se arate că min { aria (AZY), aria (BXZ), aria $(CYX)\} \leqslant$ aria $(X\ Y\ Z)$.

(Competiția William Lowell Putnam, S.U.A., 1973)

Soluție. 1) Presupunem că raportăm planul la un reper cartezian. Dacă $A_1(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$, $C(a_3, b_3)$ și $X(x_1, y_1)$. $Y(x_2, y_2)$, $Z(x_3, y_3)$, atunci evident

$$x_1=(1-r)a_2+ra_3,\ y=(1-r)b_2+rb_3,\ r\in[0,\ 1/2],$$

$$x_2=(1-s)a_3+sa_1,\ y_2=(1-s)b_3+sb_1,\ s\in[0,\ 1/2],$$

$$x_3=(1-t)a_1+ta_2,\ y_3=(1-t)b_1+tb_2,\ t\in[0,\ 1/2].$$

Cu acestea avem

$$\text{aria } (XYZ)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_2+r(a_3-a_2) & b_2+r(b_3-b_2) & 1\\ a_3+s(a_1-a_3) & b_3+s(b_1-b_3) & 1\\ a_1+t(a_2-a_1) & b_1+t(b_2-b_1) & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1\\ a_2 & b_2 & 1\\ a_3 & b_3 & 1\end{vmatrix}(1-r-s-t+rs+st+tr)=\left\{\frac{1}{4}+\left[\left(\frac{1}{2}-r\right)\left(\frac{1}{2}-s\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{2}-s\right)\left(\frac{1}{2}-t\right)+\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\frac{1}{2}-r\right)\right]\right\}\text{ aria } \{ABC)\geqslant\frac{1}{4}\text{ aria } (ABC).$$

2) În ipotezele din 1) aria celor trei triunghiuri din colțuri este cel mult $\frac{3}{4}$ aria (ABC). De aceea cel puțin unul dintre aceste triunghiuri are aria cel mult egală cu aria (XYZ).

Celelalte cazuri se soluționează analog.

Evident, se poate da și o soluție analitică.

164. Fie a, b, c laturile unui triunghi, r raza cercului înscris și R raza cercului circumscris. Să se arate că

$$\frac{1}{2rR}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\leqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{1}{4r^2}.$$

(The Amer. Math. Monthly, 1971)

Soluție. Mai întîi observăm că inegalitatea

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\geqslant 0$$

Scanned with OKEN Scanner

este echivalentă cu următoarele două inegalităţi

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\leqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Notînd cu p semiperimetrul, inegalitatea dintre media geometrică şi medie aritmetică ne dă

$$(p-a)(p-b)\leqslant\left(\frac{p-a+p-b}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}.$$

Prin permutări ciclice mai obţinem încă două asemenea relaţii.

Ţinînd seama de relaţiile precedente şi de (aria)$=\frac{abc}{4R}=rp=$ $=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, găsim $\frac{1}{2rR}=\frac{2p}{abc}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\right.$ $+\left.\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\leqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}+\frac{1}{(p-a)(p-b)}\right)=$ $=\frac{p-a+p-b+p-c}{4(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p}{4(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p^2}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p^2}{4p^2r^2}=\frac{1}{4r^2}$, c.c.t.r.d.

165. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri avînd laturile a, b, c, şi a', b', c' respectiv. Notăm cu R raza cercului circumscris lui ABC. Să se arate că

$$\frac{a^2}{a'}+\frac{b^2}{b'}+\frac{c^2}{c'}\leqslant R^2\,\frac{(a'+b'+c')^2}{a'b'c'}.$$

Cînd are loc egalitatea?

(The Amer. Math. Monthly, 1971)

Soluţie. În baza teoremei sinusurilor, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, inegalitatea din problemă este echivalentă cu (1) $a'^2+b'^2+c'^2+2(b'c'\cos 2A+$ $+c'a'\cos 2B+a'b'\cos 2C)\geqslant 0$. Deoarece $A+B+C=\pi$, această inegalitate poate fi scrisă în forma (2) $(a'+b'\cos 2C+c'\cos 2B)^2+(b'\sin 2C-c'\sin 2B)^2\geqslant 0$, ceea ce probează inegalitatea din enunţ.

Evident, prin permutări circulare, ultima inegalitate mai poate fi scrisă încă în alte două forme echivalente. De aceea

$$0<\sin 2A\leqslant 1,\quad 0<\sin 2B\leqslant 1,\quad 0<\sin 2C\leqslant 1,$$

$b'\sin 2C-c'\sin 2B=0$, $c'\sin 2A-a'\sin 2C=0$, $a'\sin 2B-b'\sin 2A=0$, sînt condiţii necesare pentru egalitate. Astfel, dacă (1) este o egalitate, atunci triunghiul ABC este ascuţitunghic şi

$$\frac{a'}{\sin(\pi-2A)}=\frac{b'}{\sin(\pi-2B)}=\frac{c'}{\sin(\pi-2C)},$$

adică $A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul ortic al lui ABC. Se verifică uşor că acestea sînt şi condiţii suficiente pentru ca (2) să fie o egalitate.

Scanned with OKEN Scanner

Cazuri particulare

1) Dacă $a'=b'=c'$, atunci $a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2$ sau $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant 9/4$. Deoarece $\Sigma\sin^2 A=2+2\cos A\cos B\cos C$, avem şi $\cos A\cos B\cos C\leqslant 1/8$.

2) Dacă $a'=a$, $b'=b$, $c'=c$, atunci $abc\leqslant R^2(a+b+c)$ sau echivalent $4\sin A\sin B\sin C=\Sigma\sin 2A\leqslant\Sigma\sin A$. Deoarece $abc=4Rs$, $s=pr$, avem şi $R\geqslant 2r$.

166. Printr-un punct P de pe baza BC a unui triunghi isoscel ABC se duc paralele la laturile egale, care intersectează pe AB şi AC respectiv în M şi N.

1) Să se găsească locul geometric al mijlocului lui MN.

2) Dreapta MN taie dreapta BC în Q. Să se arate că

$$\frac{QB}{QC}=\frac{PB^2}{PC^2},\quad QB\cdot QC=QP^2.$$

Să se construiască P cînd se dă Q.

3) Dacă P este cuprins între B şi C, atunci suma razelor cercurilor circumscrise triunghiurilor PMB şi PNC este constantă.

4) Să se demonstreze că aria triunghiului AMN este medie proporţională între ariile triunghiurilor BPM şi CPN.

(Culegere de probleme, I.P.B., 1974)

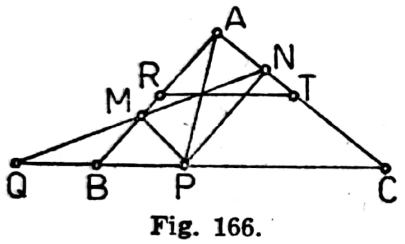


Fig. 166.

Soluţie. 1) Patrulaterul $AMPN$ este un paralelogram. Deoarece diagonalele sale se taie în părţi egale, locul mijlocului segmentului MN este acelaşi cu locul mijlocului segmentului AP, adică linia mijlocie RT a triunghiului ABC (fig. 166).

2) Deoarece $MP\|AC$, rezultă $\frac{BP}{BM}=\frac{PC}{MA}$; deoarece $PN\|AB$, rezultă $\frac{BP}{AN}=\frac{PC}{CN}$. Aceste relaţii implică $\frac{BP^2}{PC^2}=\frac{MB}{MA}\cdot\frac{NA}{NC}$ (1).

Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului ABC şi transversalei QMN ne dă $\frac{MB}{MA}\cdot\frac{QC}{QB}\cdot\frac{NC}{NA}=1$. De aici şi din (1) deducem $\frac{BP^2}{PC^2}=\frac{QB}{QC}$.

Pe de altă parte $\Delta QMB\sim\Delta QPN$ şi deci $\frac{QB}{QP}=\frac{QM}{QN}$; analog $\Delta QPN\sim\Delta QNC$ şi deci $\frac{QP}{QC}=\frac{QM}{QN}$. De aceea $\frac{QB}{QP}=\frac{QP}{QC}$ şi astfel $QB\cdot QC=QP^2$.

Construcţia lui P cînd se dă Q rezultă din $QB\cdot QC=QP^2$ şi teorema catetei.

3) Notăm cu O_1 centrul cercului circumscris triunghiului BPM şi cu O_2 centrul cercului circumscris triunghiului PCN.

Deoarece triunghiurile BPM şi PCN sînt isoscele rezultă că $O_1M\|O_2N$ şi deci $\sphericalangle O_1MP=\sphericalangle O_2NC$. Astfel triunghiurile isoscele O_1MP şi O_2NC sînt

asemenea; $\frac{O_1M}{MP}=\frac{O_2N}{NC}=\frac{O_1M+O_2N}{MP+NC}$. Pe de altă parte $MP=AN$ şi deci $MP+NC=AN+NC=\text{const}$. De aceea şi $O_1M+O_2N=\text{const}$.

4) Din asemănarea triunghiurilor BMP şi BAC, respectiv CNP şi BAC rezultă $\frac{AM}{MB}=\frac{PC}{PB}$, respectiv $\frac{PC}{PB}=\frac{NC}{NA}$. Deci $\frac{AM}{MB}=\frac{NC}{AN}$. În plus $\frac{\text{aria }(AMN)}{\text{aria }(BPM)}=\frac{AM}{BM}$, $\frac{\text{aria }(CPN)}{\text{aria }(AMN)}=\frac{NC}{AN}$. Rezultă $\frac{\text{aria }(AMN)}{\text{aria }(BPM)}=\frac{\text{aria }(CPN)}{\text{aria }(AMN)}$.

167. Ne situăm într-un plan în care considerăm dreptele orientate, distincte, $D_1, D_2, \ldots, D_n$ şi punctul P. Notăm cu d_i distanţa relativă de la P la D_i. Ce legătură analitică trebuie să fie între dreptele D_i pentru ca $\sum_{i=1}^{n} d_i$ să fie independentă de P şi care este semnificaţia geometrică a acestei legături în cazurile $n=2$ şi $n=3$?

Soluţie. Raportăm planul la un sistem cartezian de axe. Atunci dreapta orientată D_i va fi caracterizată prin ecuaţia sa normală $x\cos\varphi_i+y\sin\varphi_i-p_i=0$, unde p_i este distanţa de la origine la D_i, iar φ_i este unghiul dintre axa Ox şi vectorul normal la D_i.

Fie (x_0, y_0) coordonatele punctului P. Avem

$$d(P;\ D_i)=d_i=x_0\cos\varphi_i+y_0\sin\varphi_i-p_i$$

şi deci

$$\sum_{i=1}^{n} d_i=x_0\sum_{i=1}^{n}\cos\varphi_i+y_0\sum_{i=1}^{n}\sin\varphi_i-\sum_{i=1}^{n}p_i.$$

Suma precedentă este independentă de x_0, y_0 dacă şi numai dacă

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\varphi_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}\sin\varphi_i=0$$

(sistem de 2 ecuaţii cu n necunoscute $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$).

Dacă $n=2$, rezultă $D_1\|D_2$ având sensuri opuse; dacă $n=3$, rezultă că D_1, D_2 şi D_3 trebuie să formeze un triunghi echilateral orientat. Aceste consideraţii se pot extinte şi pentru $n\geqslant 3$.

168. 1) Fie un triunghi cu laturile a, b, c şi unghiurile α, β, γ. Să se arate că

$$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

2) Se consideră triunghiul ABC care are laturile a, b, c şi medianele m_a, m_b, m_c. Fie M un punct interior triunghiului şi MA_1, MB_1, MC_1 distanţele de la acest punct la laturile BC, CA şi respectiv AB. Să se arate că

$$\frac{a\cdot MA_1+b\cdot MB_1+c\cdot MC_1}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}<\frac{4}{9}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1) Relația $a<b+c$ implică $2a<a+b+c$ și $2aA<(a+b+c)A$. Evident, au loc și relațiile deduse din acestea prin permutări circulare. Adunînd aceste relații și ținînd seama că $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ găsim

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.$$

Într-un triunghi, la latura mai mare se opune unghiul mai mare. De aceea $(a-b)(\alpha-\beta)\geqslant 0$ și analoagele obținute prin permutări ciclice. Adunînd aceste relații găsim

$$(a-b)(\alpha-\beta)+(b-c)(\beta-\gamma)+(c-a)(\gamma-\alpha)=0.$$

Aceasta însă este echivalentă cu

$$a(3\alpha-\pi)+b(3\beta-\pi)+c(3\gamma-\pi)\geqslant 0,$$

adică cu

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\geqslant \pi/3.$$

2) Se observă că $E=a\cdot MA_1+b\cdot MB_1+c\cdot MC_1=2$ aria $(ABC)=$ $=2\sqrt{p(p-a)}\sqrt{(p-b)(p-c)}<2\frac{p+p-a}{2}\cdot\frac{p-b+p-c}{2}=\frac{a(b+c)}{2}$. Evident, sînt adevărate și relațiile obținute prin permutări ciclice. De aceea $E<$ $<\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$. Pe de altă parte $\Sigma ab\leqslant\Sigma a^2$ și $\Sigma m_a^2=\frac{3}{4}\Sigma a^2$. De aceea este adevărată relația din enunț.

169. 1) Pentru $ad-bc\neq 0$ se consideră funcția $x\to\frac{ax+b}{cx+d}$. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 din domeniul de definiție și y_1, y_2, y_3, y_4 valorile corespunzătoare ale funcției. Să se arate că

$$\frac{y_1-y_3}{y_1-y_4}:\frac{y_2-y_3}{y_2-y_4}=\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}:\frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}.$$

2) Se consideră dreptele $D_m: x=\frac{2}{m}-\frac{y}{m^2}$, unde m este un parametru real nenul. Cîte drepte D_m trec printr-un punct dat al planului? Dacă patru drepte din familia D_m taie pe Ox în puncte care formează o diviziune armonică, ce se poate spune despre punctele corespunzătoare de pe Oy?

Soluție. 1) Calcule directe.

2) Se observă că $D_m: m^2x-2m+y=0$ și ecuația de gradul doi în m are soluții reale numai dacă $1-xy\geqslant 0$.

Ecuația $xy=1$ reprezintă o hiperbolă Γ; prin orice punct al lui Γ trece o singură dreaptă D_m; prin punctele regiunii $xy<1$ trec două drepte distincte D_{m_1}, D_{m_2}, iar prin punctele regiunii $xy>1$ nu trece nici o dreaptă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie dreptele D_{m_i}, $i=1, 2, 3, 4$, care taie pe Ox în puncte de abscise x_i, $i=1, 2, 3, 4$, care formează o diviziune armonică, adică

$$\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}:\frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}=-1.$$

Evident $x_i=\frac{2}{m_i}$. De aceea relaţia precedentă se transcrie

$$\frac{m_1-m_3}{m_1-m_4}:\frac{m_2-m_3}{m_2-m_4}=-1.$$

Dreptele D_{m_i} determină pe Oy punctele de ordonate $y_i=2m_i$. De aceea

$$\frac{y_1-y_3}{y_1-y_4}:\frac{y_2-y_3}{y_2-y_4}=-1$$

şi astfel punctele de pe Oy formează o diviziune armonică.

170. O transversală întîlneşte laturile triunghiului ABC în A', B', C'. Fie A_1, B_1, C_1, conjugatele armonice ale lui A', B', C' în raport cu B şi C, C şi A, A şi B. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente.

Soluţie. Prin ipoteză $\frac{A'B}{A'C}:\frac{B'C}{B'A}:\frac{C'A}{C'B}=1$ şi $\frac{A'B}{A'C}=-\frac{A_1B}{A_1C}$, $\frac{B'C}{B'A}=-\frac{B_1C}{B_1A}$, $\frac{C'A}{C'B}=-\frac{C_1A}{C_1B}$. De aceea $\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=-1$, adică afirmaţia din enunţ este adevărată.

171. 1) Să se construiască triunghiul cu laturile tangente la trei cercuri concentrice date, astfel ca produsul înălţimilor să fie minim.

2) Să se construiască un triunghi cu vîrfurile pe trei cercuri concentrice date, astfel ca suma pătratelor laturilor să fie maximă.

(M. Bărbulescu)

Soluţie. 1) Notăm razele cercurilor respectiv cu r_a, r_b, r_c, laturile triunghiului cu a, b, c, înălţimile triunghiului cu h_a, h_b, h_c. Avem $ah_a=bh_b=ch_c=2S$ şi $ar_a+br_b+cr_c=2S$ (fig. 167). Rezultă $\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=1$.

Pe de altă parte se ştie că produsul este maxim cînd factorii sînt egali, adică $\frac{r_ar_br_c}{h_ah_bh_c}=maxim$ dacă $\frac{r_a}{h_a}=\frac{r_b}{h_b}=\frac{r_c}{h_c}$. Astfel $h_a=3r_a$, $h_b=3r_b$, $h_c=3r_c$, adică problema s-a redus la construcţia unui triunghi căruia i se cunosc înălţimile, construcţie ce este cunoscută.

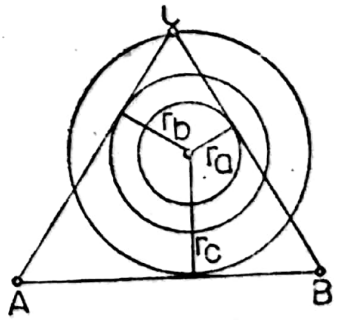


Fig. 167.

2) Fie O centrul cercurilor, r_1, r_2, r_3 razele lor, A, B, C vîrfurile triunghiului şi a, b, c laturile triunghiului. Se ştie că $r_1^2+r_2^2+r_3^2=GA^2+GB^2+GC^2+3OG^2$, unde G este centrul de greutate. Dar $r_1^2+r_2^2+r_3^2=c$ (const.) şi deci $a^2+b^2+c^2=$

$=3c-9OG^2$. De aceea $a^2+b^2+c^2=maxim$ cînd $OG=0$, adică $O\equiv G$. Cu acestea problema se reduce la construcţia triunghiului cînd se cunosc medianele — problemă cunoscută.

172. 1) Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd $\sphericalangle B=\sphericalangle MAC$ şi mediana AM. Discuţie.

2) Să se construiască un triunghi cunoscînd h_a, m_b şi m_c (notaţiile fiind cele cunoscute).

(G.M.B., Gh. Vernic)

Soluţie. 1) Considerăm $\sphericalangle B=\sphericalangle MAC=\alpha$. Construim arcul capabil de unghiul α, ce se sprijină pe AM. Fie centrul cercului corespunzător notat cu O Construim semicercul de diametru OA avînd centrul O_1. Prin M ducem paralela la AC; ea va intersecta cercul de diametru OA în N. AN intersectat cu cercul mare ni-l dă pe B. Unim pe B cu M şi îl determinăm pe C.

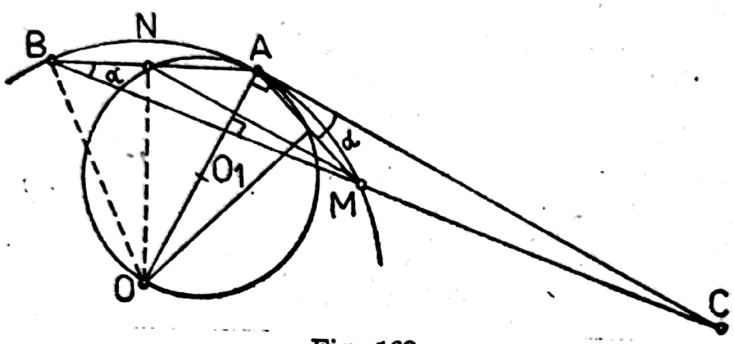


Fig. 168.

Justificare (fig. 168):

ΔOAB — isoscel ($OA=OB$), $ON\perp BA\Rightarrow NA=BN\Rightarrow$ NM linie mijlocie în ΔABC. Condiţia de existenţă este $\alpha\leqslant 45°$; dacă $\alpha>45°$ nu există ΔABC, dacă $\alpha=45°$ rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

2) Se duc două drepte paralele d_1 şi d_2 situate la o distanţă egală cu h_a una de cealaltă. Măsurăm $PC=2m_c$. Se ştie că prelungind mediana unui triunghi cu un segment egal cu ea însăşi, punctul obţinut se va afla pe o paralelă prin A la baza triunghiului, deci $A\in d_1$ şi $BC\subset d_2$. Determinăm centrul de greutate G al triunghiului. Măsurăm $GB=\frac{2}{3}m_b$ şi îl avem pe B. Unim B cu mijlocul M al lui PC şi îl obţinem pe $A\in d_1$. Pentru existenţă trebuie să avem: $h_a<2m_c$; $h_a<2m_b$ (fig. 169).

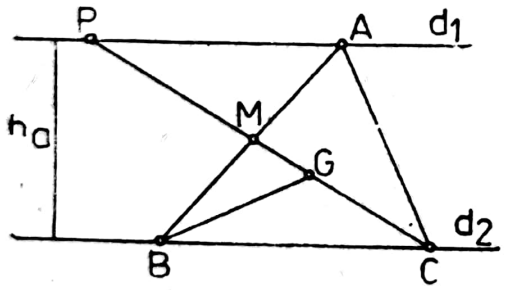


Fig. 169.

173. În triunghiul ABC înscris într-un cerc O, înălţimile AA', BB', CC' se intersectează în H şi mai taie cercul O în A'', B'', C''. Să se arate că

1) AA', BB', CC' sînt bisectoare în triunghiul ortic $A'B'C'$,

2) aria (ABC'')+aria (BCA'')+aria (CAB'')=aria (ABC),

3) $\frac{BA'\cdot CA'}{AA'^2}+\frac{BC'\cdot AB'}{BB'^2}+\frac{AC''\cdot BC'}{CC'^2}=1$,

4) $\frac{B'C'}{AH}+\frac{C'A'}{BH}+\frac{A'B'}{CH}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie (fig. 170). 1) Spre exemplu, deoarece $BC'HA'$ este inscriptibil, rezultă $\sphericalangle A'C'H = \sphericalangle A'BB'$; $\sphericalangle A'BB' = \sphericalangle A'AC$ (laturi perpendiculare), iar din $B'HC'A$ — inscriptibil, se deduce $\sphericalangle A'AC = \sphericalangle B'C'C$. În concluzie, $\sphericalangle A'C'H = \sphericalangle B'C'H$ (CC' este bisectoarea unghiului C').

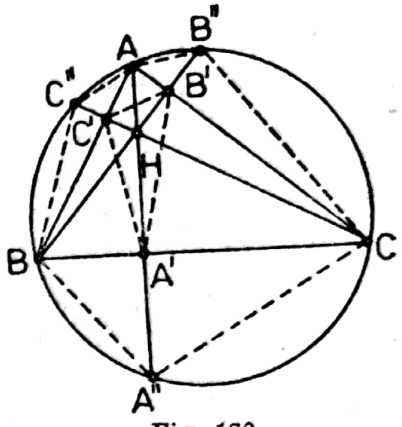


Fig. 170.

2) $\sphericalangle B'BA = \sphericalangle C'CA$ (laturi perpendiculare) şi $\sphericalangle C''CA = \sphericalangle C''BA = \frac{\text{măs}(\overset{\frown}{AC''})}{2}$; deci $\sphericalangle ABB' = \sphericalangle ABC''$. Analog, $\sphericalangle C''AB = \sphericalangle A'AB$; $\Delta HAB = \Delta C''AB$, deoarece în plus au latura AB — comună. Analog, $\Delta HAC = \Delta B''AC$, $\Delta HBC = \Delta A''BC$ şi deci rezultă concluzia.

Formulare echivalentă a punctului 2): să se arate că A'', B'', C'' sînt corespunzător simetricele lui H faţă de laturile triunghiului ABC.

3) Din 2) rezultă $A'A'' \cdot BC + C'C'' \cdot AB + B'B'' \cdot AC = 2$ aria (ABC); deoarece $A'A'' = \frac{BA' \cdot A'C}{AA'}$ (puterea punctului interior A') şi $\frac{BC}{2 \text{ aria}(ABC)} = \frac{1}{AA'}$ se obţine $\frac{A'A'' \cdot BC}{2 \text{ aria } (ABC)} = \frac{BA' \cdot A'C}{AA'^2}$. Procedînd analog cu ceilalţi doi termeni, se obţine rezultatul.

4) Din $\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$ ($B'C'$ antiparalelă la BC) se reţine $B'C' = \frac{BC \cdot AB'}{AB}$, iar din $\Delta AB'H \sim \Delta AA'C$ (dreptunghice, cu un unghi ascuţit egal), $AH = \frac{AB' \cdot AC}{AA'}$. Rezultă $\frac{B'C'}{AH} = \frac{BC \cdot AA'}{AB \cdot AC} = \sin A$; analog, ceilalţi doi termeni şi rezultă $\frac{B'C'}{AH} + \frac{C'A'}{BH} + \frac{A'B'}{CH} = \sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2}\left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2}\right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}$.

174. 1) Să se demonstreze că mijloacele laturilor unui patrulater oarecare sînt vîrfurile unui paralelogram. În ce cazuri acest paralelogram este respectiv romb, pătrat, dreptunghi?

2) Să se arate că într-un patrulater convex segmentul care uneşte mijloacele a două laturi opuse se taie în părţi egale cu segmentul care uneşte mijloacele diagonalelor.

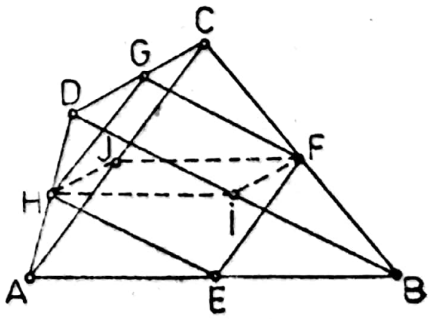


Fig. 171.

Soluţie. 1) Presupunem că patrulaterul este convex (fig. 171). HG este linie mijlocie în triunghiul ADC. De aceea $HG \| AC$ şi $HG = \frac{1}{2} AC$; analog EF este linie mijlocie

în triunghiul ABC, adică $EF \| AC$ și $EF = \frac{1}{2} AC$. Acestea arată că figura $HEFG$ este un paralelogram.

Dacă diagonalele AC și BD sînt egale, atunci $HEFG$ este un romb; dacă $AC = BD$ și $AC \perp BD$, atunci $HEFG$ este un pătrat; dacă $AC \perp BD$, atunci $HEFG$ este un dreptunghi.

Analog se tratează cazul patrulaterului neconvex.

2) Fie H respectiv F mijloacele laturilor opuse AD și BC; iar I respectiv J mijloacele diagonalelor BD și AC. Un raționament analog cu cel de la punctul 1) arată că $HIFJ$ este un paralelogram. De aceea punctul comun segmentelor HF și IJ este mijlocul lor.

175. Fie a, b, c, d lungimile laturilor unui patrulater și S aria sa. Să se arate că dacă $a+c=d+b$ și $S=\sqrt{abcd}$, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Soluție. Fie α și β două unghiuri opuse. Avem $a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos\beta$. Dacă scădem $(a-b)^2=(c-d)^2$, găsim

(1) $2ab(1-\cos\alpha)=2cd(1-\cos\beta)$.

Din $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta=\sqrt{abcd}$ rezultă $4S^2=4abcd=a^2b^2(1-\cos^2\alpha)+c^2d^2(1-\cos^2\beta)+2abcd\sin\alpha\sin\beta$. Utilizînd pe (1) de două ori în membrul drept obținem

$$4abcd=ab(1+\cos\alpha)cd(1-\cos\beta)+cd(1+\cos\beta)ab(1-\cos\alpha)+2abcd\sin\alpha\sin\beta.$$

Simplificînd deducem $4=2-2\cos(\alpha+\beta)$, adică $\alpha+\beta=\pi$.

176. Prin punctul M situat într-un cerc O de rază R, se duc două coarde perpendiculare, care determină patrulaterul înscris $ABCD$.

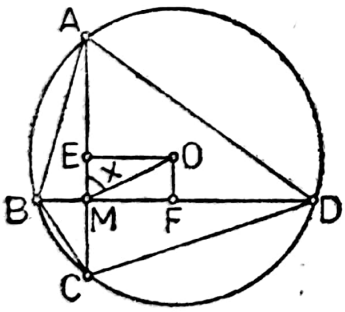


Fig. 172.

1) Să se exprime aria patrulaterului în funcție de R, de unghiul $x=\sphericalangle AMO$ și de $OM=a$; să se afle valoarea lui x pentru care aria este maximă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

2) Să se calculeze perimetrul patrulaterului rezultat la punctul 1).

Soluție (fig. 172). Fie $OE \perp AC$; rezultă $EA=EC$ (rază perpendiculară pe o coardă). Analog, din $OF \perp BD$ rezultă $FB=FD$. Se calculează $OE=a\sin x$, $EA=\sqrt{R^2-a^2\sin^2 x}$, $AC=2EA$. Analog, $OF=a\cos x$, $FD=\sqrt{R^2-a^2\cos^2 x}$, $BD=2FD$.

$$\text{aria}\,(ABCD)=\frac{AC\cdot BD}{2}=2\sqrt{(R^2-a^2\sin^2 x)(R^2-a^2\cos^2 x)}=$$

$$=\sqrt{4R^2(R^2-a^2)+a^4\sin^2 2x}$$

și deoarece $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, aria maximă se obține pentru $x=\frac{\pi}{4}$:

$$\max\ \text{aria}\,(ABCD)=\sqrt{4R^2(R^2-a^2)+a^4}=2R^2-a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Pentru $x=\frac{\pi}{4}$ patrulaterul $ABCD$ devine trapez isoscel, iar triunghiurile AMD, BMC sînt dreptunghice isoscele.

Se calculează $EM=a\cos\frac{\pi}{4}$, $AM=EM+AE=\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2R^2-a^2}$, $MC=AC-AM=AE-EM=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2R^2-a^2}-\frac{a}{\sqrt{2}}$, $AM=MD$, $BM=MC$. Rezultă

$$AD=AM\cdot\sqrt{2}=a+\sqrt{2R^2-a^2},\quad BC=MC\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2R^2-a^2}-a,$$
$$CD=AD=\sqrt{CM^2+MA^2}=\sqrt{2(AE^2+EM^2)}=R\sqrt{2}.$$

177. De aceeaşi parte a unei drepte (d) se dau punctele M, N, (M, N, (d) aparţin aceluiaşi plan), care se proiectează pe (d) în M_1, N_1, iar $MM_1=m$, $NN_1=p$, $M_1N_1=b$; se consideră pe (d) segmentul $BC=a$.

1) Să se determine poziţia lui BC pe (d), încît lungimea liniei poligonale $MBCN$ să fie minimă; să se determine lungimea liniei în cazul de minim.

2) Să se calculeze aria patrulaterului $MBCN$ pentru cazul de la 1).

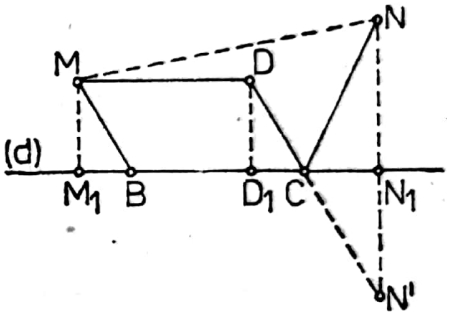


Fig. 173.

Soluţie (fig. 173). 1) Fie o poziţie oarecare a lui BC pe (d) şi paralelogramul $MBCD$. Linia poligonală conţine elementul fix $BC=a$ (ca lungime), care nu influenţează valoarea minimă a lungimii liniei poligonale; deoarece $MB=DC$, se caută $min(DC+CN)$.

Se consideră N', simetricul lui N faţă de (d); $DC+CN=DC+CN'$ şi rezultă că se obţine minim pentru cazul cînd D, C, N' sînt coliniare. Fie D_1 proiecţia lui D pe (d); $N_1D_1=b-a=D_1C+CN_1$. Din asemănare, $\Delta D_1DC\sim\Delta N_1N'C$, rezultă $\frac{DD_1}{N_1N'}=\frac{D_1C}{CN_1}$, sau $\frac{p}{m}=\frac{D_1C}{CN_1}$; sistemul $\begin{cases} D_1C+CN_1=b-a \\ \frac{D_1C}{CN_1}=\frac{p}{m} \end{cases}$ are soluţia $CN_1=\frac{p(b-a)}{p+m}$, $D_1C=\frac{m(b-a)}{p+m}$.

Lungimea minimă a liniei poligonale este

$$L=a+\sqrt{(p+m)^2+(b-a)^2}.$$

2) aria $(MBCN)$ = aria (MM_1N_1N) − aria (MM_1B) − aria (CN_1N) = $\frac{b(m+p)}{2}-\frac{(b-a)(m^2+p^2)}{2(p+m)}=\frac{a(m^2+p^2)+2bpm}{2(p+m)}$.

178. Fie P un punct din interiorul poligonului convex $A_0A_1\ldots A_n$ şi B_{i-1} proiecţia lui P pe $A_{i-1}A_i$. Să se arate că

$$\sum_{i=1}^{n+1}(PB_{i-1}+PB_i)\cos\frac{1}{2}A_i\leqslant\sum_{i=1}^{n+1}B_{i-1}B_i,$$

unde $A_{n+1}\equiv A_0$, $B_{n+1}\equiv B_0$. Cînd are loc egalitatea?

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. Cu notaţiile din fig. 174 avem $B_{i-1}B_i^2=PB_{i-1}^2+PB_i^2-2PB_{i-1}\cdot PB_i\cos P=PB_{i-1}^2+PB_i^2+2PB_{i-1}\cdot PB_i\cos A_i=(PB_{i-1}-PB_i)^2+4PB_{i-1}\cdot PB_i\cos^2\frac{1}{2}A_i\geqslant((PB_{i-1}-PB_i)^2+4PB_{i-1}\cdot PB_i)\cos^2\frac{1}{2}A_i=(PB_{i-1}+PB_i)^2\cos^2\frac{1}{2}A_i$.

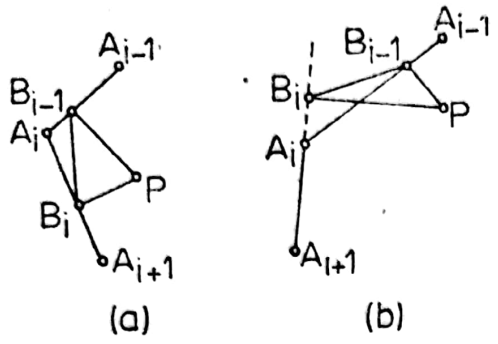


Fig. 174.

Rezultă $B_{i-1}B_i\geqslant(PB_{i-1}+PB_i)\cos\frac{1}{2}A_i$ cu egalitate dacă şi numai dacă $PB_{i-1}=PB_i$. Sumînd după i de la 1 la $n+1$ găsim relaţia din enunţ cu egalitate dacă şi numai dacă $PB_0=PB_1=\ldots=PB_n$.

179. 1) Să se verifice că un triunghi echilateral poate fi înscris într-un pătrat, iar un pătrat poate fi înscris într-un pentagon regulat.

2) Să se arate că pentru $n\geqslant 6$ un poligon regulat cu $n-1$ laturi nu poate fi înscris într-un poligon regulat cu n laturi

3) Care sînt poligoanele regulate ce pot fi înscrise într-un poligon regulat cu n laturi?

Soluţie. 2) Presupunem $n\geqslant 6$. Fie $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ un poligon regulat cu $n-1$ laturi de lungime unu. Presupunem că el este înscris într-un poligon regulat $B_1B_2\ldots B_n$; să zicem că A_i este pe latura B_1B_2, că $0\leqslant A_1B_1\leqslant A_iB_j$, $\forall i, j$, că A_2 este pe latura B_2B_3 etc. Fie $\sphericalangle A_{j+1}A_jB_{j+1}=\alpha_j$ şi $\sphericalangle A_jA_{j+1}B_{j+1}=\beta_j$, pentru $j=1, 2, 3, 4$. Comparînd sumele unghiurilor găsim $\alpha_j=\alpha_{j-1}+2\pi/n(n-1)$ şi $\beta_j=\beta_{j-1}-2\pi/n(n-1)$ pentru $j=2, 3, 4$. Deoarece $\beta_j=2\pi/n-\alpha_j$, $j=1, 2, 3, 4$, avem $\alpha_{j-1}+\beta_j=2\pi(n-2)/n(n-1)$, $\alpha_{j-1}-\beta_j=\alpha_1-\beta_2+4\pi(j-2)/n(n-1)$, $j=2, 3, 4$. Aplicăm acum teorema sinusurilor în $A_iA_{i+1}B_{i+1}$, $i=1, 2, 3, 4$. Pentru $j=2, 3, 4$ obţinem $B_jB_{j+1}\sin\sphericalangle B_{j-1}B_jB_{j+1}=(B_jA_j+A_jB_{j+1})\sin(\pi-2\pi/n)=\sin\alpha_{j-1}+\sin\beta_j=2\sin\frac{1}{2}(\alpha_{j-1}+\beta_j)\cos\frac{1}{2}(\alpha_{j-1}-\beta_j)=2\sin\frac{\pi(n-2)}{n(n-1)}\cos\left\{\frac{2\pi(j-2)}{n(n-1)}+\frac{1}{2}(\alpha_1-\beta_2)\right\}$.

Deoarece poligonul cu n laturi este regulat, membrul stîng din relaţia precedentă este independent de j şi, cum sinusul din dreapta este nenul, trebuie să avem

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{2\pi}{n(n-1)}+\theta\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{n(n-1)}+\theta\right),\quad\theta=\frac{1}{2}(\alpha_1-\beta_2).$$

Deoarece cosinusul nu poate lua de trei ori aceeaşi valoare într-un interval de lungime mai mică decît 2π, aceasta este o contradicţie. Rezultă că ipoteza este falsă.

3) Pentru exemplificare luăm $n=3$, adică considerînd un triunghi echilateral. În acesta pot fi înscrise un triunghi echilateral, un pătrat şi un hexagon.

Scanned with OKEN Scanner

Pentagonul, ca și orice poligon cu șapte sau mai multe laturi, nu poate fi înscris în triunghiul echilateral (verificări directe!).

Soluția pe cazul general o propunem cititorului.

180. Fie P_1, P_2 două poligoane inscriptibile și C_1, C_2 respectiv cercurile circumscrise acestor poligoane. Să se arate că dacă P_1 întîlnește pe P_2, atunci unele vîrfuri ale lui P_1 se află în (sau pe) C_2 și invers.

Soluție. Presupunem că P_1 și P_2 sînt poligoane inscriptibile care se întîlnesc și nici un vîrf al lui P_1 nu se află în sau pe C_2. Atunci sigur C_1 și C_2 nu pot fi interioare unul altuia și nici tangente. Rămîne că C_1 și C_2 se taie în două puncte; fie D secanta comună.

Secanta D împarte planul în două regiuni. În baza ipotezei vîrfurile lui P_1 trebuie să se afle numai într-una din aceste regiuni, iar vîrfurile lui P_2 să se găsească în cealaltă regiune. Deoarece cele două regiuni sînt (evident!) disjuncte, rezultă că P_1 și P_2 nu se întîlnesc, contrar ipotezei.

Rămîne că afirmația din problemă este adevărată.

181. Pe diametrul AB al unui cerc O de rază R se ia un punct exterior C cu $CA=R$. Se construiesc n cercuri cu centrele $O_1, O_2, \ldots, O_n$ pe AB și de raze r_k, admițînd o tangentă comună ce trece prin C. Cercul O_1 este tangent interior în A la cercul O și tangent exterior la cercul O_2; cercul $O_k (2 \leqslant k \leqslant n-1)$ este tangent exterior la cercurile O_{k-1} și O_{k+1}, iar O_n este tangent exterior la O_{n-1} și tangent interior în B la O.

Se cere:

1) Să se arate că $\{r_k | k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ sînt în progresie geometrică, să se determine rația și expresia lui r_k;

2) unghiul θ făcut de AB și de tangenta comună;

3) rația și unghiul θ pentru cazul $CA = p \cdot R$, $p > 0$.

Soluție (fig. 175). 1) Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $\Delta T_{k-1} T_k M_k \sim \Delta T_k T_{k+1} M_{k+1}$, rezultă $\frac{T_k M_k}{T_k T_{k-1}} = \frac{T_{k+1} M_{k+1}}{T_{k+1} T_k}$, sau $\frac{r_k - r_{k-1}}{r_k + r_{k-1}} = \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1} + r_k}$; deci $r_k^2 = r_{k-1} \cdot r_{k+1}$, adică $\{r_k | k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ sînt în progresie geometrică.

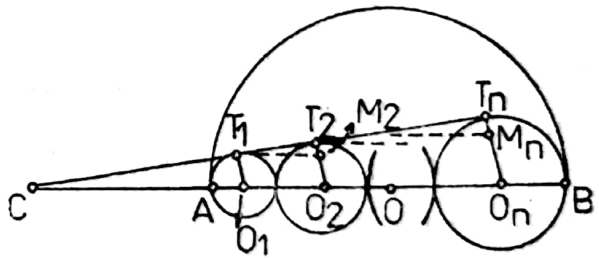


Fig. 175.

Pentru $n \in N$, dat, unghiul $\theta = \sphericalangle ACT_1$ este constant; din restricții geometrice rezultă $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ pentru $n=1$. Deoarece $\sin\theta = \frac{r_1}{r_1 + R}$, se obține $r_1 = \frac{R \sin\theta}{1 - \sin\theta}$; în $\Delta T_1 T_2 M_2$, $\sin\theta = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$ și deci rația $q = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$.

Se obține $r_k = r_1 q^{k-1} = \frac{R \sin\theta (1+\sin\theta)^{k-1}}{(1-\sin\theta)^k}$.

2) Deoarece $\sum_{k=1}^{n} r_k = R$ și $r_k = r_1 q^{k-1}$ rezultă $r_1 \frac{1-q^n}{1-q} = R$, sau $\frac{\sin\theta((1-\sin\theta)^n - (1+\sin\theta)^n)}{-2\sin\theta(1-\sin\theta)^n} = 1$. Cu condiția $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right]$, ecuația devine $\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^n = 3$ și deoarece $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} > 0$ se obține $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \sqrt[n]{3}$, sau $\sin\theta = \frac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{3}+1}$; mai rezultă $q = \sqrt[n]{3}$.

3) Pentru $CA = p \cdot R$ rezultă $q = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \sqrt[n]{\frac{p+2}{p}}$ și $\sin\theta = \frac{\sqrt[n]{\frac{p+2}{p}} - 1}{\sqrt[n]{\frac{p+2}{p}} + 1}$.

182. Fie AC un segment și B un punct al său astfel încît $AB = a$, $BC = b$. Din B se duce o semidreaptă (d) perpendiculară pe AC și pe (d) se consideră un punct D.

1) Să se afle lungimea segmentului BD pentru care triunghiul ADC este isoscel.

2) Să se determine $\measuredangle ADC$ astfel ca $|\measuredangle DAC - \measuredangle DCA|$ să ia valoarea maximă.

3) Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ADC pentru cazul de la 2), să se determine vectorul $\mathbf{OD} + \mathbf{OC} - \mathbf{OA}$.

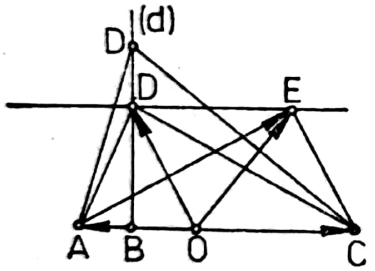


Fig. 176.

Soluție (fig. 176). 1) Triunghiul ACD este isoscel dacă $DC = AC$ sau $AD = AC$, adică $DC = a + b$ și deci $DB = \sqrt{a^2 + 2ab}$, sau $AD = a + b$ și $DB = \sqrt{b^2 + 2ab}$.

2) Dacă $DB = x$, rezultă $\operatorname{tg} A = \frac{x}{a}$, $\operatorname{tg} C = \frac{x}{b}$, $\operatorname{tg}(A - C) = \frac{(b-a)x}{x^2+ab}$. Se notează $f(x) = A - C$, $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{(b-a)x}{x^2+ab}$; $f'(x) = 0$ implică $x = \pm\sqrt{ab}$ — abscisele punctelor posibile de extrem. Cercetînd semnul lui f' pe $(0, \infty)$ rezultă că $x = \sqrt{ab}$ este punct de maxim.

Cu notația $\alpha = \measuredangle ADB$, $\beta = \measuredangle BDC$ se obține $\measuredangle ADC = \alpha + \beta$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{(b+a)x}{x^2-ab}$ implică $\alpha + \beta = \operatorname{arctg}\frac{(b+a)x}{x^2-ab}$. În final, $\lim_{x\to\sqrt{ab}} (\alpha+\beta) = \lim_{x\to\sqrt{ab}} \measuredangle ADC = \frac{\pi}{2}$,

3) Paralelogramele $OCED$ și $OEDA$ sînt romburi egale ($OA = OC = OD$); $\mathbf{OC} + \mathbf{OD} = \mathbf{OE}$, iar $\mathbf{AE} = \mathbf{OE} - \mathbf{OA} = \mathbf{OC} + \mathbf{OD} - \mathbf{OA}$. Fiind diagonale omoloage în romburile egale. $AE = DC$ și deci $|\mathbf{AE}| = DC = \sqrt{b^2 + ab}$.

183. Se consideră un cerc O de diametru $AB = 2R$. Pe semicercul superior se ia un punct arbitrar O_1 și cu centrul în O_1 se duce un cerc care trece prin B și mai intersectează diametrul AB în C. Dreapta AO_1 determină pe O_1 punctele P și D ($AD > AP$), iar tangenta la cercul O în B taie cercul O_1 în E.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că:

1) măs $\overset{\frown}{PC}$ = măs $\overset{\frown}{DE}$; 2) locul geometric al punctului P este un arc de cerc și să se determine elementele cercului (raza și poziția centrului). 3) să se determine valoarea lui $x = \sphericalangle O_1AB$ pentru care aria dreptunghiului $PCDE$ este maximă.

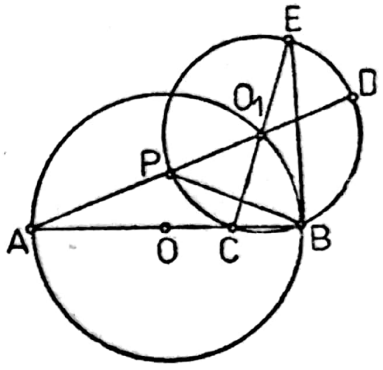


Fig. 177.

Soluție (fig. 177). 1) Deoarece $\sphericalangle CBE = \frac{\pi}{2}$ rezultă că EC este diametru în O_1; arcele $\overset{\frown}{ED}$ și $\overset{\frown}{PC}$ sînt subîntinse de unghiuri la centru egale.

2) Deoarece $\sphericalangle BO_1A = \frac{\pi}{2}$, rezultă că ΔBO_1P — dreptunghic isoscel și deci $\sphericalangle APB = \frac{3\pi}{4}$, independent de poziția lui O_1 pe semicerc. Locul geometric este situat pe cercul O_2, determinat de punctele A, P, B. Fie P se află pe diametrul perpendicular lui AB; din ΔPOB — dreptunghic, se determină $PB = \dfrac{R}{\sin\frac{3\pi}{8}}$, iar din ΔO_2BP — isoscel, unde laturile sînt BP, $O_2P = O_2B = R_2$, $\sphericalangle O_2PB = \frac{3\pi}{8}$, rezultă $R_2 = \dfrac{PB}{2\cos\frac{3\pi}{8}} = \dfrac{R}{\sin\frac{3\pi}{4}} = R\sqrt{2}$. Centrul O_2 se află pe diametrul perpendicular lui AB, la distanța $O_2O = O_2P - OP = R\sqrt{2} - R\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} = R$; deci O_1 este situat pe cercul O.

3) În ΔBO_1E — isoscel, $O_1B = O_1E = r = 2R\sin x$, iar $\sphericalangle O_1BE = \frac{1}{2}$ măs $\overset{\frown}{O_1B} = x = \sphericalangle BEO_1$; rezultă că $\sphericalangle BO_1C = 2\sphericalangle BEC = 2x$ și $\sphericalangle CO_1P = \frac{\pi}{2} - 2x$. Aria $(PCDE) = O_1C \cdot O_1P \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + O_1C \cdot O_1D \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2r^2\cos 2x = 4R^2(\cos 2x - \cos^2 2x)$. Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \cos 2x - \cos^2 2x$ are derivata $f'(x) = 2\sin 2x(2\cos 2x - 1)$ cu rădăcinile $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k'\pi$; unica soluție pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este $x = \frac{\pi}{6}$.

184. Cercul lui Euler

1) Fie ABC un triunghi oarecare. Să arătăm că simetricul ortocentrului H față de una din laturi se află pe cercul circumscris. De asemenea, dacă A_1 este diametral opus lui A, atunci segmentul HA_1 și BC se taie la mijloc.

Observăm că $\sphericalangle HBC = 90° - \sphericalangle C = \sphericalangle CAA' = \sphericalangle CAA_2 = \frac{1}{2}$ măs $\overset{\frown}{A_2A_1C} = \sphericalangle CBA_2$ (fig. 178). În plus, $AA_2 \perp BC$. De aceea $HA' = A'A_2$.

Să arătăm acum că figura HCA_1B este un paralelogram. Pentru aceasta observăm că $BH \perp AC$, $A_1C \perp AC$ implică $BH \| A_1C$. Analog $CH \| A_1B$. Dar într-un paralelogram diagonalele se taie la mijloc.

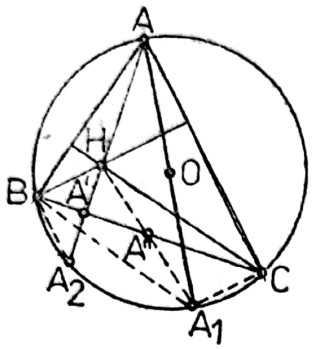


Fig. 178.

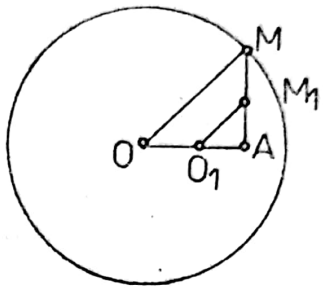


Fig. 179.

2) Fie A un punct fix, iar M un punct variabil pe cercul cu centrul în O și de rază R (fig. 179). Să arătăm că mijlocul M_1 al segmentului AM descrie un cerc.

Deoarece O și A sînt puncte fixe mijlocul O_1 al lui OA este fix. Pe de altă parte $O_1M_1 = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}R = \text{constant}$. Deci M_1 descrie cercul de centru O_1 și rază $\frac{R}{2}$.

3) Ținem seama de rezultatele precedente. În fig. 178 ortocentrul H este un punct fix; dacă M este un punct variabil pe cerc, atunci mijlocul lui HM descrie un cerc. Ne oprim cu M în pozițiile A_2, A_1, A (și analoagele), cînd mijloacele lui HM devin respectiv A', A'', A''' (și analogele). În felul acesta se verifică afirmația: picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor care unesc ortocentrul cu vîrfurile sînt nouă puncte pe același cerc, cu centrul la mijlocul lui HO și raza $\frac{R}{2}$. Acest cerc se numește *cercul lui Euler*.

185. Considerăm familia de cercuri de ecuație

$$C_{\lambda,\mu}: x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y + a\lambda + b\mu + c = 0,$$

unde a, b, c sînt constante date, iar λ, μ sînt parametri.

1) Să se arate că fiecărui punct $M_1(x_1, y_1)$ din plan i se poate atașa un alt punct $M_2(x_2, y_2)$ astfel încît prin cele două puncte să treacă o infinitate de cercuri $C_{\lambda,\mu(\lambda)}$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Fie $M_3(x_3(\lambda), y_3(\lambda))$, $M_4(x_4(\lambda), y_4(\lambda))$ două puncte oarecare de pe cercul $C_{\lambda,\mu(\lambda)}$. Să se arate că oricare ar fi λ dreapta M_3M_4 trece printr-un punct fix I.

3) Să se determine puterea p a punctului I în raport cu $C_{\lambda,\mu(\lambda)}$.

Soluţie. 1) Se impune ca sistemul în λ şi μ,

$$\begin{cases}\lambda(x_1+a)+\mu(y_1+b)+x_1^2+y_1^2+c=0\\ \lambda(x_2+a)+\mu(y_2+b)+x_2^2+y_2^2+c=0\end{cases}$$

să fie compatibil nedeterminat, adică

$$\frac{x_2+a}{x_1+a}=\frac{y_2+b}{y_1+b}=\frac{x_2^2+y_2^2+c}{x_1^2+y_1^2+c}=t.$$

Rezultă $x_2=tx_1+a(t-1)$, $y_2=ty_1+b(t-1)$, unde $t=a^2+b^2+c$.

2) Evident $x_4=tx_3+a(t-1)$, $y_4=ty_3+b(t-1)$, unde $t=a^2+b^2+c$, $x_i=x_i(\lambda)$, $y_i=y_i(\lambda)$, $i=3, 4$. De aceea ecuaţia $\frac{x-x_3}{x_4-x_3}=\frac{y-y_3}{y_4-y_3}$, adică $\frac{x-x_3}{x_3+a}=\frac{y-y_3}{y_3+b}$ reprezintă un fascicul de drepte cu vîrful în $I(-a, -b)$.

3) Puterea punctului I este numărul

$$p=IM_3\cdot IM_4=a^2+b^2-\lambda a-\mu b+a\lambda+b\mu+c=a^2+b^2+c.$$

186. Se dă un cerc cu diametrul AB de lungime $2a$ şi se consideră simetricul C al lui A în raport cu B. Prin C se duce o dreaptă Δ perpendiculară pe AC; apoi prin B se duce o secantă variabilă care întîlneşte pe Δ în P şi cercul în H. Fie $\{Q\}=AH\cap\Delta$ şi $\{K\}$ intersecţia dintre BQ şi cerc. Prin P se duce o paralelă la AB care întîlneşte pe BQ în R; analog prin Q se duce o paralelă la AB care întîlneşte pe BP în M. Să se arate că

1) produsul $CP\cdot CQ$ este constant,

2) punctele P, K, A şi R, A, M sînt respectiv coliniare.

3) Dreapta MK trece printr-un punct fix.

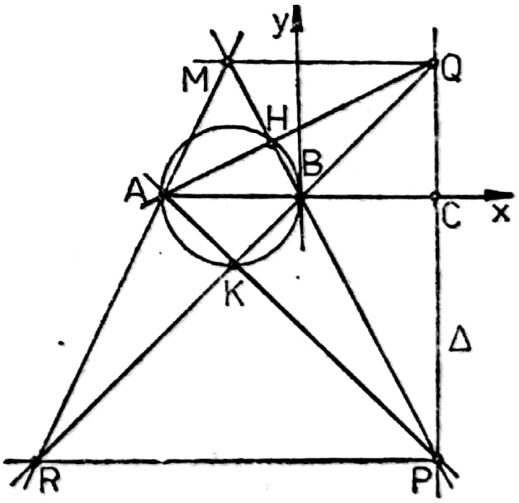


Fig. 180.

Soluţie. Alegem axele ca în fig. 180 Atunci $A(-2a, 0)$, $C(2a, 0)$, cercul are ecuaţia $x^2+y^2+2ax=0$, dreapta Δ este dată de $x=2a$, iar secanta variabilă AP are ecuaţia $y=\lambda x$.

1) Se observă că $P(2a, 2a\lambda)$ şi $H\left(\frac{-2a}{1+\lambda^2}, \frac{-2a\lambda}{1+\lambda^2}\right)$. Deoarece, pentru $\lambda\neq 0$, $AH: y=-\frac{x+2a}{\lambda}$ rezultă $Q\left(2a, \frac{-4a}{\lambda}\right)$. Astfel $CP=2|a\lambda|$ şi $CQ=4\left|\frac{a}{\lambda}\right|$. De aceea (pentru $\lambda\neq 0$) avem $CP\cdot CQ=8a^2$.

2) Pentru $\lambda \neq 0$, ecuația dreptei BQ este $y=-\frac{2}{\lambda}x$. Se găsește $K\left(\frac{-2a\lambda^2}{\lambda^2+4}, \frac{4a\lambda}{\lambda^2+4}\right)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a\lambda & 1 \\ \frac{-2a\lambda^2}{\lambda^2+4} & \frac{4a\lambda}{\lambda^2+4} & 1 \\ -2a & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

punctele P, K, A sînt coliniare.

Avem $PR: y=2a\lambda$ și pentru $\lambda \neq 0$, $QM: y=-\frac{4a}{\lambda}$. De aceea $R(-a\lambda^2, 2a\lambda)$ și $M\left(-\frac{4a}{\lambda^2}, \frac{-4a}{\lambda}\right)$. Apoi se verifică relația

$$\begin{vmatrix} -a\lambda^2 & 2a\lambda & 1 \\ -2a & 0 & 1 \\ \frac{-4a}{\lambda^2} & \frac{-4a}{\lambda} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

și deci R, A, M sînt coliniare.

3) Dreptele MK formează un fascicul de ecuație

$$(8+2\lambda^2-\lambda^4)y-(4\lambda^3+8\lambda)(x+a)=0.$$

Vîrful fasciculului are coordonatele $(-a, 0)$, adică este tocmai centrul cercului dat.

187. Se dă elipsa $E: \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\omega}-1=0$ și dreapta variabilă $D_{m,n}: y=mx+n$.

1) Să se determine numărul punctelor de intersecție dintre E și $D_{m,n}$.

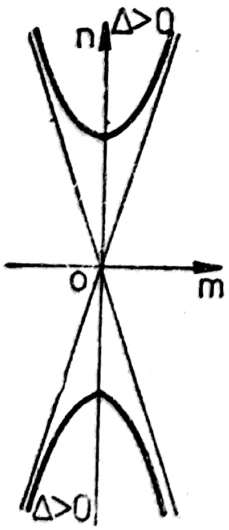


Fig. 181.

2) Fie $D_{m\ n(m)}$ dreapta variabilă tangentă la elipsa E. Să se afle minimul ariei triunghiului determinat de ea pe axele de coordonate; să se găsească locul geometric al centrului de greutate al acestui triunghi variabil.

Soluție. 1) Se impune să discutăm soluțiile sistemului $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-1=0$, $y=mx+n$. Eliminînd pe y obținem $x^2(3+2m^2)+4mnx+2(n^2-3)=0$ cu discriminantul $\Delta=-6(n^2-2m^2-3)$.

Se observă că $\Delta=0$ reprezintă o hiperbolă în planul mOn (fig. 181); pentru asemenea valori ale lui m și n dreapta $D_{m,n}$ este tangentă la E; mai precis tangenta variabilă $D_{m,n(m)}$ are ecuația $y=mx\pm\sqrt{2m^2+3}$. Dacă $\Delta<0$, atunci $D_{m,n}$ nu intersectează elipsa, iar dacă $\Delta>0$, atunci intersecția $E\cap D_{m,n}$ constă din două puncte.

2) Pentru $m\neq 0$, dreapta $D_{m,n(m)}$ taie axele de coordonate în $A\left(\pm\frac{\sqrt{2m^2+3}}{m},\ 0\right)$ și $B(0,\ \pm\sqrt{2m^2+3})$. De aceea aria $(OAB)=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{2m^2+3}{|m|}$. Aceasta își atinge minimul $6\sqrt{\frac{2}{3}}$ pentru $m=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Centrul de greutate are coordonatele

$$x=\frac{\pm\sqrt{2m^2+3}}{3m},\quad y=\frac{\pm\sqrt{2m^2+3}}{3},\ m\neq 0.$$

Eliminînd parametrul m găsim locul geometric de ecuație $9x^2y^2-3x^2-2y^2=0$.

188. Curbe în plan

Fie I un interval deschis (alteori interval închis, semiînchis sau reuniune de intervale) din R.

(I) O funcție continuă $\alpha: I\to R^2$ se numește *curbă* și se notează cu α. Uneori numai imaginea $\alpha(I)$ se numește curbă (fig. 182); în acest caz α se numește *parametrizare*, iar $t\in I$, se numește *parametru*.

Dacă raportăm pe R^2 la reperul canonic, atunci funcția α este caracterizată de coordonatele ei euclidiene, $\alpha: x=x(t),\ y=y(t),\ t\in I$. Într-un context în care numai imaginea $\alpha(I)$ este numită curbă, relațiile $x=x(t),\ y=y(t)$ se numesc *ecuațiile parametrice ale curbei.*

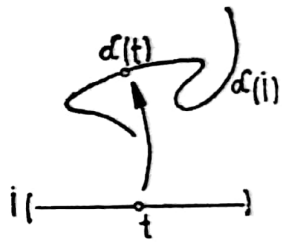


Fig. 182.

(II) Fie M un punct de pe imaginea $\alpha(I)$. Cardinalul mulțimii $\alpha^{-1}(M)=\{t|\ t\in I,\ \alpha(t)=M\}$ se numește *multiplicitatea* punctului M.

O funcție continuă și injectivă $\alpha: I\to R^2$ se numește *curbă simplă*; în acest caz $\alpha(I)$ conține numai puncte simple.

(III). O curbă $\alpha: [a,\ b]\to R^2$ pentru care $\alpha(a)=\alpha(b)$ se zice *închisă*. O curbă închisă pentru care restricția la $[a,\ b)$ este injectivă se numește *curbă simplă și închisă.*

(IV) O curbă $\alpha: I\to R^2$ se numește *periodică* dacă există un număr $T>0$ astfel încît $t+T\in I,\ \alpha(t+T)=\alpha(t),\ \forall t\in I$. Cel mai mic număr $T>0$ care se bucură de această proprietate se numește perioada lui α (în ipoteza că există!)

Se poate arăta că imaginea unei curbe închise admite o reprezentare parametrică periodică.

(V) Presupunem că $\alpha: I\to R^2$ este derivabilă.

Un punct $\alpha(t)=(x(t),\ y(t))=M\in\alpha(I)$ corespunzător unei valori a lui t pentru care $\alpha'(t)=(x'(t),\ y'(t))\neq(0,0)$ se numește *punct regulat.* Dreptele de ecuații $\frac{x-x(t)}{x'(t)}=\frac{y-y(t)}{y'(t)}$ respectiv $x'(t)(x-x(t))+y'(t)(y-y(t))=0$ se numesc *tangenta* respectiv *normala* la curba α în punctul regulat M (fig. 183).

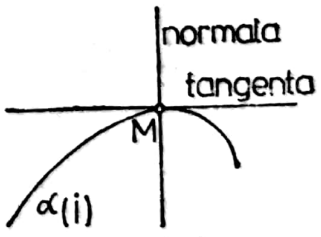


Fig. 183.

Un punct $\alpha(t)=M\in\alpha(I)$ pentru care $\alpha'(t)=(x'(t),\ y'(t))=(0,0)$ se numește *punct singular.*

(VI) O condiție suficientă pentru ca imaginea $\alpha(I)$ să fie rectificabilă (să admită lungime) este ca derivata $\alpha'=(x',\ y')$ să fie continuă, exceptînd cel mult un număr finit de puncte.

(VII) Graficul unei funcții continue $f: I\to R$ este o curbă în plan deoarece acest grafic poate fi privit ca imaginea aplicației $\alpha: I\to R^2$ dată prin $x=t$, $y=f(t)$.

O curbă de acest tip nu poate avea puncte multiple, nu poate fi periodică și nici închisă.

Egalitatea $y=f(x)$ se numește *ecuația carteziană explicită a curbei* $G(f)$.

(VIII) Curbele plane mai pot fi introduse și pornind de la funcții continue de tipul $F: R^2\to R$. În acest sens mulțimea $C=\{(x,\ y)|\ (x,\ y)\in R^2,\ F(x,\ y)=0\}$ se numește *curbă de ecuație carteziană implicită* $F(x,\ y)=0$. Dacă F este un polinom de gradul n, atunci C se numește *curbă algebrică de ordinul n.*

Exemple. 1) Curba $\alpha: x=t-t^3,\ y=t^2-t^4$ este definită pe R. Deoarece sistemul $t_1-t_1^3=t_2-t_2^3,\ t_1^2-t_1^4=t_2^2-t_2^4$ admite soluțiile distincte $t_1=0,\ t_2=\pm 1$ pentru care $\alpha(0)=\alpha(-1)=\alpha(1)=(0,\ 0)$ rezultă că originea este un punct triplu (fig. 184).

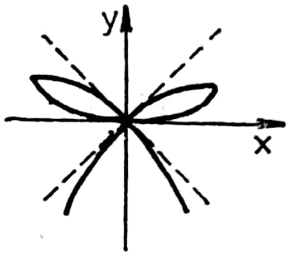


Fig. 184.

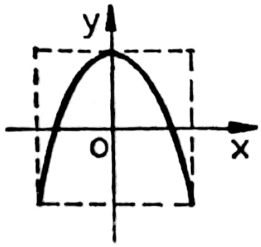


Fig. 185.

2) Fie curba $\alpha: x=\sin\frac{t}{2},\ y=\cos t,\ t\in[0,\ 4\pi]$. Deoarece $\alpha(0)=\alpha(4\pi)=(0,\ 1)$, curba α este închisă (fig. 185).

Sistemul $x'(t)=\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}=0,\ y'(t)=-\sin t=0$ are soluțiile $t=\pi;\ 3\pi$. De aceea punctele $(-1,\ -1)$ și $(1,\ -1)$ sînt puncte singulare.

Apoi din sistemul $t_1\neq t_2,\ \sin\frac{t_1}{2}=\sin\frac{t_2}{2},\ \cos t_1=\cos t_2$ deducem $t_1=2\pi-t_2,\ \pi<t_2\leqslant 2\pi;\ t_1'=6\pi-t_2',\ 3\pi<t_2'\leqslant 4\pi$. De aici rezultă că: $(-1,\ -1)$, $(1,\ -1)$ sînt puncte simple; pentru $t\in(0,\ \pi)\cup(\pi,\ 2\pi)\cup(2\pi;\ 3\pi)\cup(3\pi,\ 4\pi)$ rezultă puncte duble; $(0,\ 1)$ este punct triplu.

Tangenta în punctul triplu $(0,\ 1)$ este $y=1$, iar normala este axa Oy.

Extensia lui α la R este o curbă periodică de perioadă $T=4\pi$. Toate punctele acestei curbe sînt multiple. În particular, punctele $(-1,\ -1)$, $(1,\ -1)$ sînt și puncte multiple și puncte singulare.

Precizare. În general, traiectoria obținută prin compunerea a două mișcări vibratorii de același centru care se efectuează urmînd respectiv dreptele perpendiculare Ox și Oy se numește *curbă Lissajous.* Ecuațiile parametrice

ale unei astfel de curbe sînt $x=a\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$, $y=b\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$, unde a, b, ω_1, ω_2, φ_1, φ_2 sînt constante.

3) Considerăm *Foliul lui Descartes* $C: x^3+y^3-3axy=0$, $a>0$ (fig. 186). pentru a obține o parametrizare a acestei curbe intersectăm cu dreapta $y=tx$. Înlocuind în ecuația curbei C obținem $x^3+t^3x^3-3ax^2t=0$. Mai întîi avem $x^2=0$, ceea ce corespunde punctului dublu (0, 0). Apoi, pentru $t\neq -1$, găsim

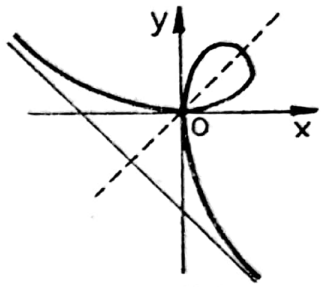


Fig. 186.

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

189. Locuri geometrice

O mulțime de puncte din plan sau din spațiu definită prin specificarea unor proprietăți geometrice se numește *loc geometric*.

În esență, problemele de locuri geometrice sînt probleme de găsire a unor proprietăți echivalente celor prin care este dată o anumită mulțime, sau altfel spus, probleme de egalitate a două mulțimi. Dar rezolvarea unei probleme de tipul (1) „punctele unei mulțimi (din plan, spațiu) au proprietatea P dacă și numai dacă au proprietatea Q'' nu este totuna cu rezolvarea unei probleme de tipul (2) „să se găsească locul geometric al punctelor care au proprietatea P''. În general, în problema (2) proprietatea P este dată astfel încît nu este evident cu ce figură geometrică avem de-a face (ipoteză!), iar proprietatea Q nu este specificată. Ea poate fi aleasă de rezolvitor din mulțimea proprietăților echivalente cu P de așa manieră încît să poată spune cu ce figură geometrică este echivalentă mulțimea dată inițial.

Rezolvarea efectivă a unei probleme de loc geometric constă în următoarele:

a) Verificarea existenței unui punct care posedă proprietatea dată, adică stabilirea faptului dacă mulțimea dată prin ipoteză este vidă sau nu.

b) Se consideră un punct (variabil) care posedă proprietatea dată și se stabilește apartenența acestui punct la o figură geometrică F.

c) Se verifică dacă orice punct al lui F convine, adică se analizează dacă este suficient ca un punct să aparțină lui F pentru a avea proprietatea specificată. De cele mai multe ori reiese că nu putem accepta decît o parte F' a lui F.

Figura F' este locul căutat deoarece:

— orice punct care posedă proprietatea dată aparține necesar lui F',

— este suficient ca un punct să aparțină lui F' pentru a avea proprietatea dată.

În ceea ce privește găsirea unui loc geometric prin metode analitice, facem următoarele observații. Să presupunem că din condițiile geometrice impuse în problema dată spre rezolvare se obțin coordonatele punctului care descrie locul:

$$\text{(I)}\qquad x=\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_k),\qquad \lambda_j=\text{parametrii};\ j=1,2,\ldots k,$$
$$y=\psi(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu legăturile

$$F_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)=0,\ i=1, 2, \ldots, k-1. \tag{II}$$

Puţini elevi ştiu să spună că locul geometric căutat este sistemul (I)+(II). Există, desigur explicaţia obiectivă că elevii nu cunosc noţiuni ca ecuaţii parametrice ale unei curbe, funcţii implicite etc. dar, cel puţin formal, li se poate atrage atenţia că odată determinat sistemul (I)+(II), locul geometric este găsit. Ceea ce urmează este numai determinarea ecuaţiei implicite a curbei loc geometric

$$f(x, y)=0.$$

Într-adevăr, sistemul (I)+(II), transcris sub forma

$$\Phi(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)=0,$$
$$\psi(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)=0,$$
$$F_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{k-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)=0,$$

în anumite condiţii (de exemplu $\frac{D(\psi, F_1, \ldots, F_{k-1})}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)} \neq 0$,

sau

$$\frac{D(\Phi, F_1, \ldots, F_{k-1})}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)} \neq 0,$$

iar

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_j}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_j} \quad \text{sînt continue),}$$

permite determinarea parametrilor $\lambda_j=\lambda_j(x, y)$, $j=1, 2, \ldots, k$, din k ecuaţii:

$$\Phi(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)=0$$
$$F_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)=0 \qquad i=1, 2, \ldots, k-1.$$

(în cazul general $\lambda_j=\lambda_j(x, y)$ pot fi determinaţi numai ca funcţii implicite). Înlocuind $\lambda_j=\lambda_j(x, y)$ în ecuaţia rămasă a sistemului (I)+(II), rezultă ecuaţia implicită a curbei loc geometric

$$\psi(x, y\ \lambda_1(x, y), \ldots, \lambda_k(x, y))=0.$$

Exemplu. Să se găsească locul geometric al punctelor din plan (spaţiu) pentru care raportul distanţelor la două puncte fixe să fie constant.

(Concurs admitere, I.P.B., 1973)

Soluţia 1. Fie A şi B două puncte fixe distincte. Căutăm locul punctelor M pentru care $\frac{MA}{MB}=k$, unde k este o constantă pozitivă.

Scanned with OKEN Scanner

Ne situăm în plan. Pentru $k=1$, orice punct M pentru care $\frac{MA}{MB}=1$ aparţine mediatoarei segmentului AB şi recíproc. De aceea în acest caz locul geometric este mediatoarea lui AB (fig. 187).

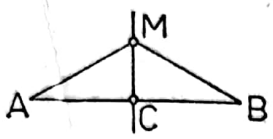


Fig. 187.

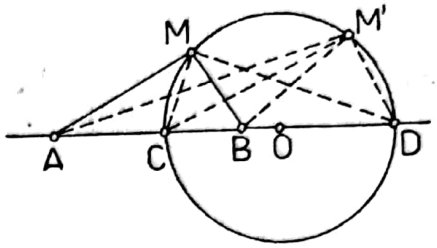


Fig. 188.

Fie $k\neq 1$ şi M un punct care nu aparţine dreptei AB astfel încît $\frac{MA}{MB}=k$. Bisectoarea interioară a unghiului AMB taie pe AB în C. Deoarece $k\neq 1$ implică $MA\neq MB$, triunghiul AMB nu este isoscel. De aceea şi bisectoarea exterioară a unghiului AMB taie pe AB în D. Din proprietăţile bisectoarelor avem (fig. 188)

$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=\frac{MA}{MB}=k.$$

Astfel C şi D sînt punctele fixe de pe dreapta AB care împarte segmentul AB în caportul k. Deoarece $\sphericalangle CMD=\frac{\pi}{2}$ rezultă că M aparţine cercului de diametru CD.

Reciproc, fie M' un punct al cercului de diametru CD, unde C şi D sînt punctele fixe de pe dreapta AB care împart pe AB în raportul k. Deoarece $M'C\perp M'D$ rezultă că $M'C$ şi $M'D$ sînt bisectoarele unghiului din M', adică

$$\frac{M'A}{M'B}=\frac{CA}{CB}=k.$$

Raţionamentul este acelaşi pentru orice punct M' care nu aparţine lui AB. Punctele C şi D convin prin definiţie. De aceea locul geometric al punctelor pentru care raportul distanţelor la două puncte fixe A şi B este un număr pozitiv $k\neq 1$, este cercul de diametru CD, punctele C şi D împărţind pe AB în raportul dat.

Ne situăm în spaţiu. Argumente analoge arată că pentru $k=1$ locul geometric este planul mediator al segmentului AB (fig. 189), iar pentru $k\neq 1$ locul geometric este o sferă de diametru CD (fig. 190).

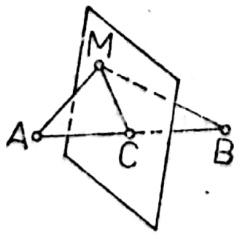


Fig. 189.

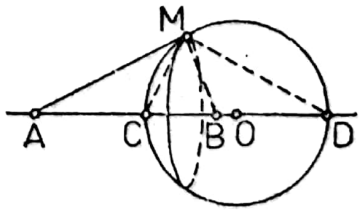


Fig. 190

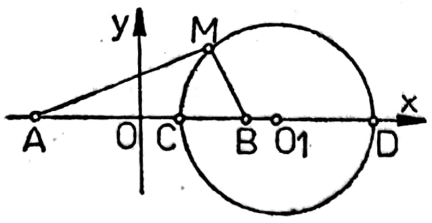


Fig. 191.

Soluţia 2. Întrucît la problemele de geometrie date la concurs au fost admise şi soluţii analitice, vom prezenta soluţia analitică a problemei anterioare pentru cazul planului.

Fie A şi B două puncte fixe din plan. Alegem pe AB drept axă Ox şi mediatoarea segmentului AB, orientată ca în fig. 191, drept axă Oy. În raport cu sistemul de coordonate ales avem $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $a>0$. Dacă $M(x, y)$ este un punct variabil din plan, atunci

$$\frac{MA}{MB}=k, k>0 \Leftrightarrow MA=k\cdot MB \Leftrightarrow \sqrt{(x+a)^2+y^2}=k\sqrt{(x-a)^2+y^2} \Leftrightarrow (1-k^2)(x^2+y^2)+$$
$$+2xa(1+k^2)+a^2(1-k^2)=0. \qquad (1)$$

Pentru $k=1$ ecuaţia (1) se reduce la $x=0$ şi deci locul căutat este mediatoarea segmentului AB.

Pentru $k\neq 1$ ecuaţia (1) reprezintă un cerc care taie axa Ox în punctele fixe $C\left(a\frac{k-1}{k+1}, 0\right)$, $D\left(a\frac{k+1}{k-1}, 0\right)$ care împart segmentul AB în raportul k. Evident C este situat între A şi B. Pentru $k>1$, D este la dreapta lui B, iar pentru $k<1$, D este la stînga lui A (fig. 191). Cu alte cuvinte locul căutat este cercul de diametru CD, unde C şi D sînt punctele fixe de pe dreapta AB care împart segmentul AB în raportul k.

190. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc. Perpendiculara în B pe AB taie pe AC în M. Să se găsească locul geometric al lui M cînd latura BC este fixă şi punctul A descrie cercul.

(Concurs admitere, I.P.B., 1973)

Soluţie. a) Dacă BC trece prin centrul cercului, atunci punctul M nu există. În continuare, excludem acest caz.

b) Fie CC' un diametru al cercului circumscris triunghiului ABC. Dacă A descrie arcul $C'AC$ din fig. 192, atunci $\sphericalangle AMB=\frac{\pi}{2}-\sphericalangle A$ şi deci M aparţine unui arc de cerc capabil de unghiul $\frac{\pi}{2}-\sphericalangle A$. Dacă $A\equiv C'$, atunci $M\equiv C$. Dacă $A\equiv C$, triunghiul ABC degenerează într-o dreaptă şi $M\equiv M_1$, unde M_1 este intersecţia dintre perpendiculara în B pe AB şi tangenta în C la cercul cu centrul în O. Punctul M_1 nu face parte din locul geometric. Arcul căruia aparţine M face parte din cercul de diametru CM_1 (fig. 192).

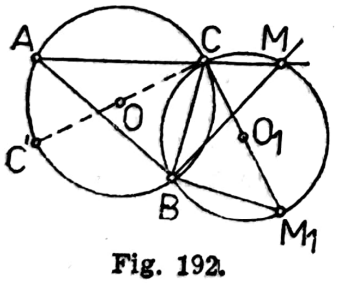


Fig. 192.

Reciproc, fie M un punct oarecare al arcului CMM_1, $M\neq M_1$. Dreapta MC taie cercul cu centrul în O în punctul A. Unim pe M cu B şi pe B cu A. Avem $\sphericalangle AMB=\sphericalangle CMB=\sphericalangle CM_1B=\frac{\pi}{2}-\sphericalangle BCM_1=\frac{\pi}{2}-\sphericalangle A$ şi deci $MB\perp AB$. Cu alte cuvinte, arcul CMM_1, fără capătul M_1 face parte din locul geometric căutat.

Scanned with OKEN Scanner

c) Analog, dacă A descrie arcul $C'AB$ (fără capete) din fig. 193, atunci $\sphericalangle BMC = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle A$ (unghi exterior în triunghiul ABM) și deci M descrie arcul CMB (fără capete) din cercul de diametru CM_1. Dacă $A \equiv B$, atunci $M \equiv B$; acest punct nu face parte din locul geometric, deoarece în acest caz triunghiul ABC degenerează într-o dreaptă.

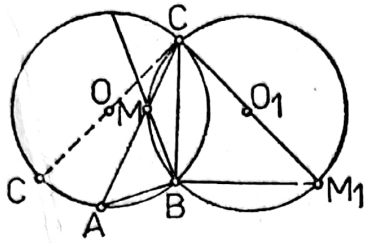


Fig. 193.

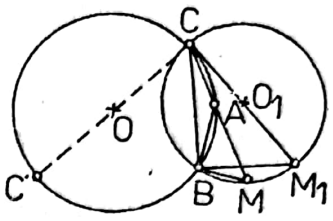


Fig. 194.

Cu alte cuvinte, arcul CMB, fără capete, face parte din locul geometric căutat.

d) Analog, dacă A descrie arcul BAC (fără capete) din fig. 194, atunci $\sphericalangle BMC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BAM = \frac{\pi}{2} - (\sphericalangle B + \sphericalangle C) = \frac{\pi}{2} - (\pi - \sphericalangle A) = \sphericalangle A - \frac{\pi}{2}$ și deci M descrie arcul BMM_1 (fără capete) din cercul de diametru CM_1.

În concluzie, locul geometric este cercul cu centrul în O_1 mai puțin punctele B și M_1.

191. Pe semidreptele Ox, Oy, Oz nesituate în același plan se consideră respectiv punctele A, B, C astfel ca $OA = \lambda a$, $OB = \lambda b$, $OC = \lambda c$, unde a, b, c sînt constante, iar λ este variabil. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABC cînd λ variază.

(Concurs admitere, I.P.B., 1971)

Soluție. Din faptul, că punctele A, B, C trebuie să fie respectiv pe Ox, Oy, Oz rezultă că $abc \neq 0$, iar $\lambda \neq 0$. Pentru $\lambda = \lambda_0$ fixăm punctele A, B, C respectiv în P, Q, R. Avem (fig. 195)

$$\frac{OA}{a} = \frac{OB}{b} = \frac{OC}{c} = \lambda, \quad \frac{OP}{a} = \frac{OQ}{b} = \frac{OR}{c} = \lambda_0 \text{ și deci } \frac{OA}{OP} = \frac{OB}{OQ} = \frac{OC}{OR},$$

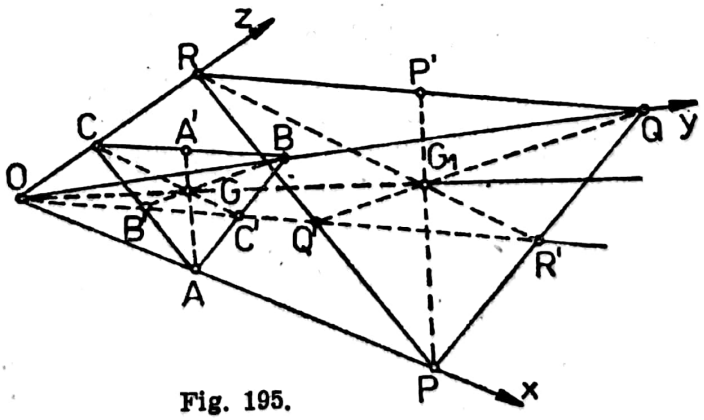


Fig. 195.

ceea ce implică $AB \| PQ$, $BC \| QR$, $CA \| RP$. Fie C' mijlocul lui AB și R' mijlocul lui PQ. Evident punctele O, C', R' sînt coliniare și avem

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OC'}{OR'} = \frac{OC}{OR}.$$

Rezultă $CC' \| RR'$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și G_1 centrul de greutate al triunghiului fix PQR. Avem

$$\frac{OC'}{OR'} = \frac{OG}{OG_1} = \frac{GC'}{G_1R'} = \frac{CC'}{RR'}$$

și deci OG este coliniar cu OG_1. Astfel G aparține semidreptei ce trece prin O și G_1.

Reciproc, fie $G \in OG_1$. Prin G ducem un plan paralel cu planul PQR care taie pe Ox, Oy, Oz respectiv în A, B, C. Dreptele AG, BG, CG sînt respectiv paralele cu medianele triunghiului PQR. De aceea G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Astfel locul geometric căutat este semidreapta OG_1.

192. Să se găsească locul geometric al punctelor din plan (spațiu) pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă.

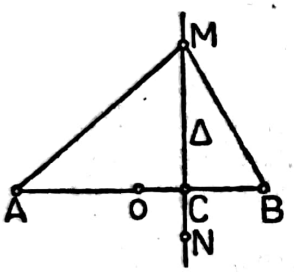


Fig. 196.

Soluție. Fie A și B două puncte fixe distincte și k un număr real. Căutăm locul punctelor M pentru care $MA^2 - MB^2 = k$.

Ne situăm în plan. Fie $k=0$; atunci $MA = MB$ și deci M descrie mediatoarea segmentului AB.

Fie $k \neq 0$, O mijlocul lui AB și C piciorul perpendicularei duse din M pe AB (fig. 196). Dacă M există, atunci

$$k = MA^2 - MB^2 = AC^2 + CM^2 - (CM^2 + CB^2) = AC^2 - CB^2 =$$
$$= (AC - CB)(AC + CB) = 2OC \cdot AB.$$

Punctul O este fix și avem $OC = \frac{k}{2AB}$.

Rezultă că C este fix, adică M aparține dreptei Δ perpendiculară în C pe AB.

Reciproc, orice punct $N \in \Delta$ satisface $NA^2 - NB^2 = 2OC \cdot AB = k$.

Rezultă că locul căutat este o dreaptă perpendiculară pe AB.

Ne situăm în spațiu. Argumente analoge arată că pentru $k=0$ locul geometric este planul mediator al segmentului AB, iar pentru $k \neq 0$ locul geometric este un plan perpendicular pe AB.

193. Fiind dat un tetraedru $ABCD$ să se găsească locul punctelor M pentru care

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$

(Culegere de probleme, I.P.B., 1973)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie E și F mijloacele muchiilor AB și CD (fig. 197). În triunghiurile MAB și MCD se aplică teorema medianei

$$MA^2+MB^2=2ME^2+\frac{AB^2}{2},$$

$$MC^2+MD^2=2MF^2+\frac{CD^2}{2},$$

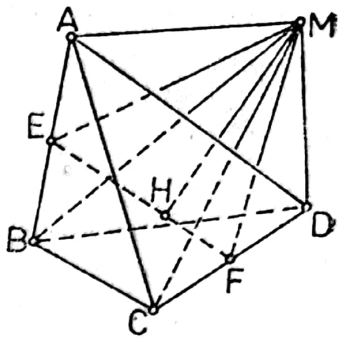


Fig. 197.

De aceea

$$MA^2+MB^2=MC^2+MD^2 \Leftrightarrow 2ME^2+\frac{AB^2}{2}=2MF^2+\frac{CD^2}{2} \Leftrightarrow MF^2-ME^2=$$

$$=\frac{1}{2}(AB^2-CD^2).$$

Astfel M aparține unui plan perpendicular pe EF. Pentru a preciza acest plan, fie O punctul de intersecție al planelor mediatoare ale muchiilor tetraedrului. Deoarece $OA=OB=OC=OD$ avem $OA^2+OB^2=OC^2+OD^2$ și deci O este un punct al locului.

Ținînd cont de soluția problemei precedente, locul căutat este un plan perpendicular pe EF dus prin O.

194. Fie hiperbola echilateră $x^2-y^2=a^2$ cu vîrfurile A, B și o dreaptă variabilă paralelă cu axa Ox, care taie pe Γ în C și D. Segmentele de dreaptă CB și AD se intersectează în M. Să se determine locul geometric al punctului M.

Soluție (fig. 198). $M\in Oy$, dar y-ul acestui punct nu parcurge tot intervalul $(-\infty, +\infty)$. Avem $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(-\sqrt{a^2+\lambda^2}, \lambda)$, $D(\sqrt{a^2+\lambda^2}, \lambda)$. Scriind ecuațiile dreptelor ce trec prin C, B, respectiv A, D obținem prin intersecție punctul

$$M\left(0, \frac{\lambda a}{a+\sqrt{a^2+\lambda^2}}\right).$$

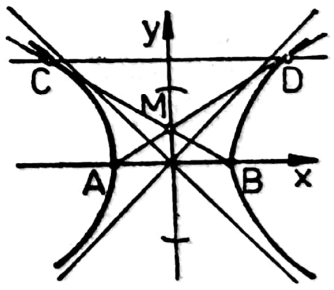


Fig. 198.

Locul geometric este intervalul deschis $x=0$, $y\in(-a, a)$. Într-adevăr, aici intervine funcția

$$\lambda \to y(\lambda)=\frac{\lambda a^2}{a+\sqrt{a^2+\lambda^2}}$$

care este strict crescătoare ($y'(\lambda)>0$) pe R, ceea ce ne permite să scriem

$$\lim_{\lambda\to-\infty} y(\lambda)<y(\lambda)<\lim_{\lambda\to\infty} y(\lambda),$$

adică

$$-a<y<a.$$

Scanned with OKEN Scanner

195. Fie Γ o elipsă și un punct $M_0 \notin \Gamma$. Să se demonstreze că din M_0 se pot duce două sau patru normale la Γ.

Soluție. Ecuația canonică a elipsei este

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Considerăm punctul $M_0(x_0, y_0) \notin \Gamma$ și notăm cu $M(x, y)$ piciorul normalei dusă din M_0 la Γ. Cazul $M_0 \in Ox \bigcup Oy$ are o rezolvare evidentă. Presupunem că $M_0 \notin Ox \bigcup Oy$.

Ecuațiile parametrice ale normalei la Γ în M ne arată că:

$$x - x_0 = \frac{x}{a^2}\, t, \quad y - y_0 = \frac{y}{b^2} t.$$

Astfel găsim

$$x = \frac{a^2 x_0}{a^2 - t}, \quad y = \frac{b^2 y_0}{b^2 - t}.$$

Punînd condiția ca acest punct să fie pe Γ deducem ecuația

$$\frac{a^2 x_0^2}{(a^2 - t)^2} + \frac{b^2 y_0^2}{(b^2 - t)^2} - 1 = 0.$$

Pentru a vedea cîte rădăcini reale are această ecuație vom utiliza metoda grafică. Notînd $f(t) = \frac{a^2 x_0^2}{(a^2 - t)^2}$, avem $f'(t) = \frac{2a^2 x_0^2}{(a^2 - t)^3}$ și tabelul de variație

t	$-\infty$		0		a^2		$2a^2$		$+\infty$
$f'(t)$	$+++$				$\|$		$---$		
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{x_0^2}{a^2}$	$\nearrow$	∞	∞	$\searrow$	$\frac{x_0^2}{a^2}$	$\searrow$ 0

Analog pentru funcția $g(t) = 1 - \frac{b^2 y_0^2}{(b^2 - t)^2}$ găsim $g'(t) = -\frac{2b^2 y^2}{(b^2 - t)^3}$ și tabelul de variație

t	$-\infty$		0		b^2		$2b^2$		∞
$g'(t)$	$---$				$\|$		$+++$		
$g(t)$	1	$\searrow$	$1 - \frac{y_0^2}{b^2}$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$1 - \frac{y_0^2}{b^2}$	$\nearrow$ 1

Considerînd pe rînd posibilitățile ($a > b$ sau $a < b$) și ($x_0 = a$ sau $|x_0| < a$ sau $|x_0| > a$) și ($y_0 = b$ sau $|y_0| < b$ sau $|y_0| > b$) constatăm că graficele celor două funcții se taie în două sau în patru puncte.

Astfel ecuația

$$\frac{a^2x_0^2}{(a^2-t)^2}+\frac{b^2y_0^2}{(b^2-t)^2}-1=0$$

are sau două, sau patru rădăcini reale. De aceea, din punctul M_0 se pot duce două sau patru normale la elipsă.

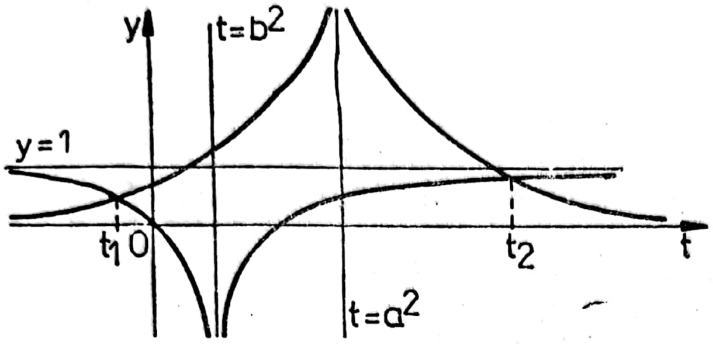


Fig. 199.

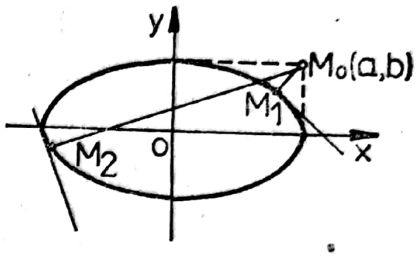


Fig. 200.

Drept exemplu considerăm cazul $x_0=a$, $y_0=b$, $a>b$, pentru care ecuația în t are numai două rădăcini reale, t_1, t_2 (fig. 199). Astfel din punctul $M_0(a, b)$ se pot duce două normale la elipsă (fig. 200).

196. Fie AB o coardă oarecare a parabolei Γ: $y^2=2px$, M mijlocul lui AB și P proiecția lui M pe Ox. Mediatoarea lui AB întîlnește pe Ox în N.

1) Să se arate că, oricare ar fi segmentul AB, segmentul PN este constant.

2) Fixăm pe B și din acest punct ridicăm o perpendiculară pe AB care taie pe Γ în C. Să se arate că dreapta AC trece printr-un punct fix F cînd A și C se mișcă pe parabolă astfel încît unghiul ABC să rămînă drept.

3) Care este locul lui F cînd B descrie pe Γ?

Soluție. 1) Fie $y=mx+n$ ecuația lui AB. Pentru $m\neq0$, coordonatele lui M sînt $u=\frac{p-mn}{m^2}$, $v=\frac{p}{m}$. Mediatoarea lui AB, de ecuație $x-u+m(y-v)=0$, întîlnește pe Ox în punctul N de abscisă $ON=u+mv$. Avem (fig. 201) $PN=ON-u=mv=p$.

2) Fie $B(x_0, y_0)$ și $AB: y-y_0=m(x-x_0)$, $BC: y-y_0=-\frac{1}{m}(x-x_0)$.

Din

$$\begin{cases} y_0^2=2px_0 \\ y-y_0=m(x-x_0) \\ y_0^2=2px \end{cases}$$

rezultă că A are coordonatele $x_A=\frac{1}{2p}\frac{(2p-my_0)^2}{m^2}$, $y_A=\frac{2p-my_0}{m}$.

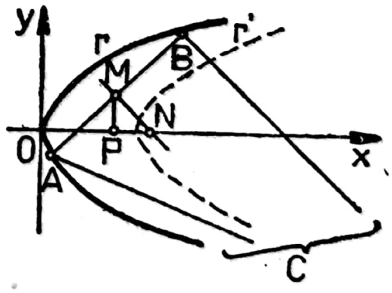


Fig. 201.

Analog din sistemul

$$\begin{cases} y-y_0=-\dfrac{1}{m}(x-x_0) \\ y^2=2px \end{cases}$$

rezultă că C are coordonatele $x_C=\dfrac{(2pm+y_0)^2}{2p}$, $y_C=-(2pm+y_0)$. Astfel obținem dreapta

$$AC: x+\left(\lambda+\frac{y_0}{p}\right)y+\lambda y_0-2p+\frac{y_0^2}{2p}=0,\ \lambda=m-\frac{1}{m}.$$

Cînd m variază obținem un fascicul de drepte ce trec prin punctul F de coordonate $x=x_0+2p$, $y=-y_0$.

3) Dacă M descrie pe Γ, atunci punctul F va descrie o parabolă Γ' care se deduce din Γ prin simetria în raport cu Ox urmată de o translație de amplitudine $2p$ paralelă cu Ox: $x=x_0+2p$, $y=-y_0$.
Parabola Γ' are ecuația $y^2=2p(x-2p)$.

197. Se dau punctele $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ și $C(0, -1)$. O dreaptă variabilă D ce trece prin origine taie pe AB în P și pe AC în Q.

Se cer:

1) Coordonatele mijlocului M al segmentului PQ.

2) Locul lui M cînd dreapta D se rotește în jurul lui O.

3) Să se determine dreapta D astfel încît $OA=MA$.

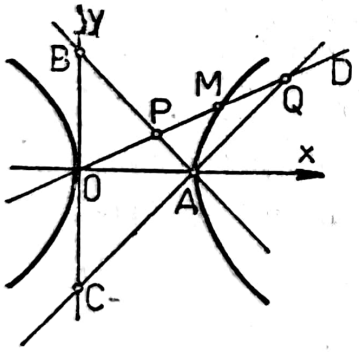


Fig. 202.

Soluție 1) Avem $AB: x+y-1=0$, $AC: x-y-1=0$, $D: ax+by=0$. Astfel pentru $a-b\neq 0$ găsim $P\left(\dfrac{-b}{a-b}, \dfrac{a}{a-b}\right)$ și $Q\left(\dfrac{b}{a+b}, \dfrac{-a}{a+b}\right)$ pentru $a+b\neq 0$. Coordonatele lui M sînt (fig. 202)

$$x=-\frac{b^2}{a^2-b^2},\qquad y=\frac{ab}{a^2-b^2}.$$

2) Presupunem că a și b sînt variabili. Prin eliminarea lui a, b între relațiile precedente găsim ecuația carteziană a locului geometric descris de M, $x^2-y^2-x=0$. Această ecuație se mai poate scrie în forma

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1.$$

Astfel ea reprezintă o hiperbolă echilateră cu centrul în punctul $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, cu vîrfurile $A(1, 0)$, $O(0, 0)$ și cu asimptotele $2x-2y-1=0$, $2x+2y-1=0$ (fig. 202).

Scanned with OKEN Scanner

3) Din $OA=MA$ rezultă

$$\left(\frac{b^2}{b^2-a^2}-1\right)^2+\left(\frac{ab}{a^2-b^2}\right)^2=1$$

sau $b^4-3a^2b^2=0$. Valoarea $b=0$ nu convine problemei. Rămîne $b^2=3a^2$, adică $b=\pm a\sqrt{3}$. Astfel obținem două drepte care fac cu Ox respectiv unghiurile $\pi/6$ și $5\pi/6$.

198. Fie A și B două puncte fixe pe un cerc dat, care nu sînt diametral opuse și XY un diametru variabil al aceluiași cerc. Să se determine locul geometric al punctului $AX\cap BY$.

(Olimpiadă, S.U.A., 1976)

Soluție. Fără a scădea generalitatea, putem presupune că inițial avem situația de pe fig. 203, iar apoi îl mișcăm pe X în sens trigonometric (fig. 204 și 205).

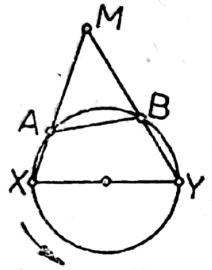


Fig. 203.

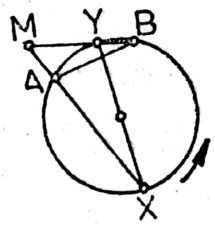


Fig. 204.

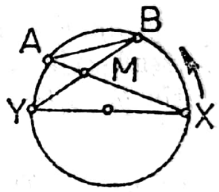


Fig. 205.

Fie π_1 semiplanul deschis mărginit de dreapta AB și care conține arcul de cerc mai mic ce se sprijină pe coarda AB; fie π_2 semiplanul deschis opus. Dacă $M\in\pi_1$ (fig. 203 și 204) atunci segmentul AB este văzut sub unghiul $90°-\frac{\text{măs }\widehat{AB}}{2}$, iar dacă $M\in\pi_2$ (fig. 205), atunci segmentul AB este văzut sub unghiul $90°+\frac{\text{măs }\widehat{AB}}{2}$. Evident, dacă $A\equiv Y$, atunci $M\equiv A$; dacă $B\equiv X$, atunci $M\equiv B$. De aceea M aparține unui cerc. Deoarece pentru orice punct M de pe acest cerc, diferit de A și B, semidreptele MA și MB intersectează cercul inițial în puncte diametral opuse, locul geometric căutat este tot cercul căruia îi aparține M.

199. Pe un cerc cu centrul în O se consideră două puncte fixe A și B astfel încît $OA\perp OB$ și două puncte mobile M_1 și M_2 așa ca $OM_1\perp OM_2$. Să se afle locul geometric al punctului M de intersecție a dreptelor AM_1 și BM_2. Discuție.

Generalizare. Fie MN și PQ două generatoare fixe ale unei suprafețe cilindrice de rotație situate în plane axiale perpendiculare. Se consideră de asemenea alte două generatoare variabile Δ_1 și Δ_2 astfel încît planele axiale

Scanned with OKEN Scanner

în care sînt situate aceste generatoare să rămînă perpendiculare. Se cere locul geometric al intersecției planelor (MN, Δ_1) și (PQ, Δ_2). Discuție.

Soluție. Notăm $\sphericalangle AOM_1=\varphi$ (fig. 206). Deoarece $OA\perp OB$, $OM_1\perp OM_2$ rezultă $\sphericalangle AOM_2=90°+\varphi$. În plus, $OA=OM_1$, $OB=OM_2$ implică $\sphericalangle OAM_1=$ $=\sphericalangle OM_2B=90°-\frac{\varphi}{2}$. De aceea $\sphericalangle AMB=360°-\left(90°+\varphi+90°-\frac{\varphi}{2}+90°-\right.$ $\left.-\frac{\varphi}{2}\right)=90°$. Rezultă că punctul M descrie un cerc cu diametrul AB. Evident acest cerc trece și prin origine.

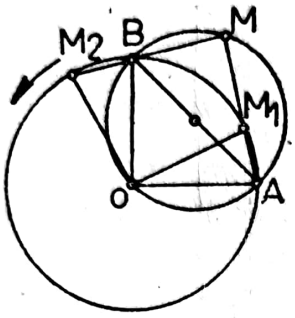


Fig. 206.

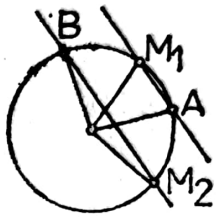


Fig. 207.

Dacă punctele M_1 și M_2 sînt luate ca în fig. 207, atunci $AM_1\| BM_2$ și punctul M nu există.

Soluția generalizării se determină fără dificultate.

200. Pe un cerc O de diametru $AB=2R$ se consideră un punct arbitrar M, prin care se duce o coardă MN ce taie dreapta care trece prin A, B în T; se dă $\sphericalangle OMN=\alpha<\frac{\pi}{2}$, constant. Se cere:

1) Să se afle locul geometric determinat de centrul cercului O_1, înscris în triunghiul OMT, cînd M parcurge cercul O;

2) Să se arate că patrulaterul MO_1BT este inscriptibil și să i se calculeze aria $S(x)$ în funcție de R, α și $\sphericalangle MOB=x$;

3) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{S(x)}{x^2}$ și să se deducă de aici că $S(x)=0$ are în $x=0$ o rădăcină dublă.

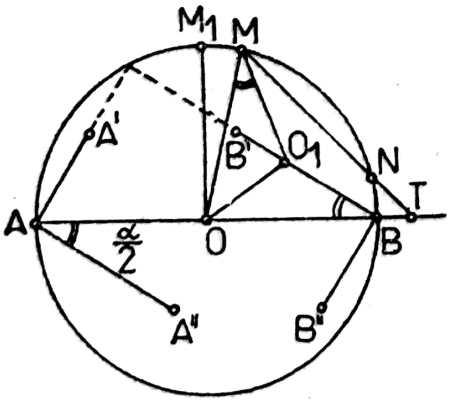


Fig. 208.

Soluție. (fig. 208). 1) $\Delta O_1OB=\Delta O_1OM$, deoarece O_1 se află la intersecția bisectoarelor în ΔOMT, iar $OM=OB=R$; deci oricare ar fi poziția lui M pe arcul de cerc $\overset{\frown}{BM_1}$, măs $(\overset{\frown}{BM_1})=\pi-\alpha$, unghiul $O_1BO=\frac{\alpha}{2}=$const., ceea ce arată că O_1 este situat pe o dreaptă ce trece prin B și are panta $m=$ $=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (între B și punctul de intersecție cu paralela la AB la distanța $\frac{R}{2}\sin\alpha$ de AB).

Dacă $M\in(\widehat{AM_1})$, punctul O_1 se află pe un segment din dreapta de pantă $m=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ între punctul A şi intersecţia cu dreapta paralelă la AB, la distanţa $\frac{R}{2}\sin\alpha$.

Analog pentru semicercul inferior.

2) $\measuredangle O_1BT+\measuredangle O_1MT=\pi-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\pi$, deci MO_1BT — inscriptibil;
aria $(MO_1BT)=$aria $(MOT)-2$ aria (O_1OB),

aria $(MOT)=\frac{R^2}{2}\frac{\sin\alpha\sin x}{\sin(\alpha+x)}$; aria $(O_1OB)=\frac{R^2}{2}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{\alpha+x}{2}}$ şi deci aria$(MO_1BT)=$

$$=\frac{R^2}{2}\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{\sin(\alpha+x)}-\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{\alpha+x}{2}}\right).$$

3) $$\lim_{x\to0}\frac{S(x)}{x^2}=\frac{R^2}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha\sin x\sin\frac{\alpha+x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\sin(\alpha+x)\sin\frac{\alpha}{2}}{x^2\sin(\alpha+x)\sin\frac{\alpha+x}{2}}=$$

$$=\frac{R^2}{\cos\frac{\alpha}{2}}\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{R^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Deoarece limita este finită, nenulă, ordinul de multiplicitate al rădăcinii este acelaşi pentru numitor şi numărător; deci $x=0$ este rădăcină dublă a ecuaţiei $S(x)=0$.

201. Distanţa de la un punct la o mulţime

Fie Σ o mulţime închisă din spaţiul euclidian R^n şi A un punct fix din R^n. Marginea inferioară $d=d(A;\ \Sigma)=\inf_{B\in\Sigma}d(A,\ B)$ se numeşte *distanţa de la A la Σ*.

Se poate demonstra că infimumul precedent este un minim. De asemenea se poate arăta că dacă Σ este o hipersuprafaţă în R^n (în particular curbă în plan, suprafaţă în R^3 etc.), atunci punctul în care se atinge minimul lui $d(A, B)$, $B\in\Sigma$, este piciorul unei normale dusă din A la Σ.

Problemă. Fie hiperbola Γ: $xy=1$ şi punctul $A\left(-1, \frac{7}{2}\right)$.

(a) Cîte normale se pot duce din A la Γ?
(b) Să se găsească distanţa de la A la Γ.

Soluţie. (a) Notăm cu $M(x, y)$ piciorul normalei dusă din A la Γ. Ecuaţiile parametrice ale normalei la Γ în M ne arată că $x+1=yt$, $y-\frac{7}{2}=xt$.

Deoarece $t \neq \pm 1$ găsim $x=\frac{\frac{7}{2}t-1}{1-t^2}$, $y=\frac{\frac{7}{2}-t}{1-t^2}$. Punînd condiția ca acest punct să fie pe Γ obținem ecuația

$$\left(\frac{7}{2}-t\right)\left(\frac{7}{2}t-1\right)=(1-t^2)^2, \text{ adică } (t-2)(4t^3+8t^2+22t-9)=0.$$

Rezultă $t_1=2$. Apoi, utilizînd șirul lui Rolle pentru $4t^3+8t^2+22t-9=0$, se dovedește că mai există o singură soluție reală $t_2 \in (0, 1/2)$. Astfel pe Γ găsim punctele $M_1\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ și $M_2\left(\frac{7t_2-2}{2(1-t_2^2)}, \frac{7-2t_2}{2(1-t_2^2)}\right)$; de aceea, din A se pot duce două normale la Γ.

(b) Se constată că $d(A, M_1)=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$,

$$d(A, M_2)=\sqrt{\left(\frac{-2t_2^2+7t_2}{2(1-t_2^2)}\right)^2+\left(\frac{-7t_2^2+2t_2}{2(1-t_2^2)}\right)^2} \text{ și } \frac{-2t_2^2+7t_2}{2(1-t_2^2)}<1; \quad \frac{-7t_2^2+2t_2}{2(1-t_2^2)}<4.$$

De aceea $d(A; \Gamma)=d(A, M_2)$.

202. Distanța dintre două mulțimi

Fie Σ_1 și Σ_2 două submulțimi închise din R^n. Marginea inferioară $d=d(\Sigma_1; \Sigma_2)=\inf_{A\in\Sigma_1,\ B\in\Sigma_2} d(A, B)$ se numește distanța de la Σ_1 la Σ_2.

Chiar dacă $\Sigma_1 \cap \Sigma_2=\varnothing$ se poate întîmpla ca $d(\Sigma_1, \Sigma_2)=0$. De exemplu, această situație are loc dacă Σ_1 este o hiperbolă din plan, iar Σ_2 este asimptota sa. Astfel, în general, infimumul precedent nu este un minim.

Exercițiu. Să se afle distanța dintre elipsa Γ: $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ și dreapta D: $x-y=6$.

Soluție. Distanța căutată este distanța dintre dreapta dată și tangenta la Γ paralelă cu D, care traversează cadranul IV.

Fie $(x_0, y_0) \in \Gamma$ și $\frac{xx_0}{12}+\frac{yy_0}{4}=1$ tangenta la Γ în (x_0, y_0). Se impune ca aceasta să fie paralelă cu D și se găsește $x_0=-3y_0$; apoi din $\frac{x_0^2}{12}+\frac{y_0^2}{4}=1$ se obțin $y_0=\pm 1$, $x_0=\mp 3$. Pentru $M_0(3, -1)$; avem $d(D; \Gamma)=d(M_0; D)=\frac{|3+1-6|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

203. 1) Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct din interiorul său. Să se arate că

$$r\mathbf{MA}+s\mathbf{MB}+t\mathbf{MC}=\mathbf{0}$$

dacă și numai dacă

$$\frac{r}{\text{aria}(BCM)}=\frac{s}{\text{aria}(CAM)}=\frac{t}{\text{aria}(ABM)}$$

2) Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare. Să se demonstreze că

$$r\mathbf{MA}+s\mathbf{MB}+t\mathbf{MC}+u\mathbf{MD}=\mathbf{0}$$

dacă şi numai dacă

$$\frac{r}{\text{vol}(BCDM)}=\frac{s}{\text{vol}(CDAM)}=\frac{t}{\text{vol}(DABM)}=\frac{u}{\text{vol}(ABCM)}.$$

Soluţie. 1) Raportăm planul la reperul cartezian $(O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$. Fie $A(x_1,\ y_1)$ $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ şi $M(x,\ y)$. Atunci $\mathbf{MA}=(x_1-x)\mathbf{i}+(y_1-y)\mathbf{j}$, $\mathbf{MB}=(x_2-x)\mathbf{i}+$ $+(y_2-y)\mathbf{j}$, $\mathbf{MC}=(x_3-y)\mathbf{i}+(y_3-y)\mathbf{j}$.

Relaţia $r\mathbf{MA}+s\mathbf{MB}+t\mathbf{MC}=\mathbf{0}$ se transcrie în forma

$$r[(x_1-x)\mathbf{i}+(y_1-y)\mathbf{j}]+s[(x_2-x)\mathbf{i}+(y-y)\mathbf{j}]+t[(x_3-x)\mathbf{i}+(y_3-y)\mathbf{j}]=\mathbf{0}.$$

De aceea ea este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} r(x_1-x)+s(x_2-x)+t(x_3-x)=0 \\ r(y_1-y)+s(y_2-y)+t(y_3-y)=0, \end{cases}$$

adică

$$\frac{r}{\begin{vmatrix} x-x_3 & x_2-x \\ y-y_3 & y_2-y \end{vmatrix}}=\frac{s}{\begin{vmatrix} x_1-x & x-x_3 \\ y_1-y & y-y_3 \end{vmatrix}}=\frac{t}{\begin{vmatrix} x_1-x & x_2-x \\ y_1-y & y_2-y \end{vmatrix}}$$

sau altfel scris

$$\frac{r}{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}}=\frac{s}{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}}=\frac{t}{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}}.$$

c.c.tr.d.

2) Se raportează spaţiul la reperul canonic $(O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ şi se face un raţionament analog cu cel de la punctul precedent.

În final se ţine seama că volumul unui tetraedru de vîrfuri $P(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $Q(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $R(x_3,\ y_3,\ z_3)$, $S(x_4,\ y_4,\ z_4)$ este 1/6 din volumul paralelipipedului construit pe vectori $\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PR}$ şi $\mathbf{PS}$, adică din $|\mathbf{PQ}\cdot(\mathbf{PR}\times\mathbf{PS})|$; cu alte cuvinte

$$\text{vol}\ (P,\ Q,\ R,\ S)=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

204. Fie ABC un triunghi oarecare.

1) Să se arate că ortocentrul H, centrul de greutate G şi centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC sînt coliniare.

2) Să se găsească volumul corpului obţinut prin rotaţia de unghi α a trapezului $HOO'D$ în jurul lui ox (DO' este proiecţia lui HO pe Ox).

Scanned with OKEN Scanner

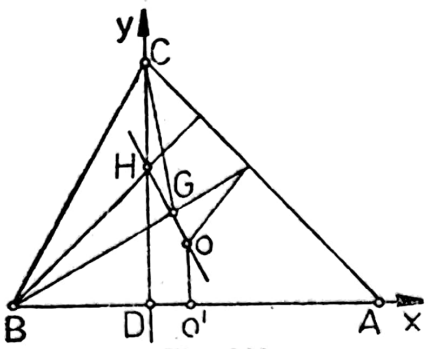


Fig. 209.

Soluție. Se iau drept axe de coordonate latura BA și înălțimea DC. Se notează cu a și b abscisele punctelor A respectiv B și cu c ordonata lui C (fig. 209).

1) Înălțimea CD are ecuația $x=0$. Deoarece coeficientul unghiular al dreptei AC este $-\frac{c}{a}$, se găsește că ecuația înălțimii din B este $ax-cy-ab=0$. Rezultă $H\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$.

Coordonatele mijloacelor laturilor CA și AB sînt $\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$ respectiv $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$.

De aceea mediana din B are ecuația $cx-(a-2b)y-bc=0$, iar mediana din C are ecuația $2cx+(a+b)y-c(a+b)=0$. Rezultă $G\left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$. De altfel acest lucru se putea obține direct, deoarece coordonatele centrului de greutate sînt respectiv medii aritmetice ale coordonatelor vîrfurilor triunghiului.

Mediatoarea segmentului AB are ecuația $x=\frac{a+b}{2}$, iar mediatoarea segmentului CA are ecuația $y-\frac{c}{2}=\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{2}\right)$. De aceea $O\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c^2+ab}{2c}\right)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{ab}{c} & 1 \\ \frac{a+b}{3} & \frac{c}{3} & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{c^2+ab}{2c} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

punctele H, G și O sînt coliniare. Acest lucru poate fi dovedit și arătînd că $HG=2GO$.

2) Dacă $HOO'D$ ar face o rotație completă în jurul lui Ox, atunci am obține un trunchi de con cu razele $\frac{c^2+ab}{2c}$, respectiv $\frac{-ab}{c}$ și cu generatoarea $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{c^2+3ab}{2c^2}\right)^2}$. Înălțimea acestui trunchi de con este $\frac{|a+b|}{2}$, iar volumul său este $\frac{\pi|a+b|}{6}\left[\left(\frac{c^2+ab}{2c}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2-\frac{ab(c^2+ab)}{2c^2}\right]=\frac{\pi|a+b|}{6}\cdot\frac{c^4+3a^2b^2}{4c^2}$. De aceea, dacă α este măsura în radiani, atunci volumul căutat este

$$\frac{|a+b|\,(c^4+3a^2b^2)\alpha}{48c^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

205. Pe diagonala BD a unui pătrat $ABCD$ se consideră un punct M; $AB=a$, $\sphericalangle MAB=x$. Perpendiculara în M pe AM taie DC în E.

Se cere:

1) Să se calculeze aria triunghiului AME.

2) Fie I mijlocul lui AE și N proiecția lui M pe AB. Să se arate că IN rămîne constant ca mărime și direcție, cînd M parcurge BD; să se precizeze locul geometric descris de punctul I.

3) Punctul G este intersecția segmentelor AE, BD; să se calculeze aria triunghiului IMG și să se determine valoarea lui x, pentru care aria $(IMG)=\frac{1}{m}\cdot$ $\cdot$aria (AME), $m\in N$, dat.

4) Se rotește triunghiul BCD în jurul lui BD pînă ce plan $(BCD)\perp$ $\perp$plan (ACD); să se calculeze volumul piramidei $EAMG$.

Soluție. (fig. 210). 1) Deoarece $AMED$ este patrulater inscriptibil, rezultă $\sphericalangle EAM=\sphericalangle EDM=\frac{\pi}{4}$, $\sphericalangle AEM=$ $=\sphericalangle ADM=\frac{\pi}{4}$ și $AM=ME$; $\sphericalangle DAE=\frac{\pi}{4}-x$, $AE=$ $=\frac{a}{\cos(x-\pi/4)}$ și deci aria $(AME)=\frac{1}{4}AE^2=\frac{a^2}{2(1+\sin 2x)}$

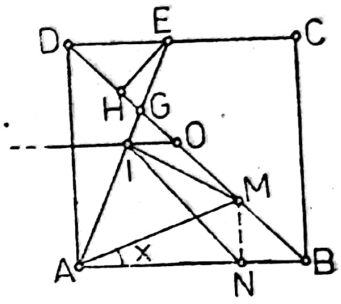


Fig. 210.

2) Patrulaterul $AIMN$ fiind inscriptibil, $\sphericalangle AMI=$ $=\sphericalangle ANI=\frac{\pi}{4}$, independent de poziția lui M pe BD; deci $IN\|BD$. Fie O — centrul pătratului; deoarece pentru M arbitrar pe BD, $AI=IE$, rezultă că $IO\|NB$. $IOBN$ fiind paralelogram, $IN=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ și $IN\|BD$. Din cele menționate rezultă că atunci cînd M parcurge BD, I se situează pe paralela la AB care trece prin O și parcurge semidreapta ce pornește din O la ∞, cînd $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

3) $IN\|BD$ și $\sphericalangle NIM=x$ implică $\sphericalangle IMG=x$ în triunghiul dreptunghic IMG; aria $(IMG)=\frac{IM^2}{2}\operatorname{tg}x=\frac{AE^2}{8}\operatorname{tg}x=\frac{a^2\operatorname{tg}x}{4(1+\sin 2x)}$. Din condiția $\frac{1}{4}AE^2\cdot$ $\cdot\frac{1}{m}=\frac{1}{8}AE^2\operatorname{tg}x$ rezultă $\operatorname{tg}x=\frac{2}{m}$ cu soluția $x=\operatorname{arctg}\frac{2}{m}$.

4) Deoarece BCD se rotește în jurul lui BD cu un unghi de $\frac{\pi}{2}$, distanța EH de la E la BD se păstrează și este înălțimea piramidei; se calculează $EM=\frac{AE}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$, iar $\sphericalangle EMH=\frac{\pi}{4}-x$.

$EH=\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, iar $V_{EAMG}=\frac{1}{3}EH\cdot\left(\frac{1}{2}\text{aria}\ (AME)+\text{aria}\ (IMG)\right)=$

$$=\frac{AE^3}{24\sqrt{2}}\cdot(1+\operatorname{tg}x)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

206. Într-un semicerc de diametru $AB=2R$ se duc razele OC și OD, care fac între ele unghiul constant $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; se notează $\sphericalangle AOC=x$.

1) Să se calculeze perimetrul și aria patrulaterului convex $ACDB$ în funcție de R, α, x; să se exprime aria printr-un produs de funcții trigonometrice.

2) Fie C_1, D_1 — proiecțiile punctelor C, D pe AB; să se calculeze aria totală a corpului obținut prin rotația trapezului CC_1D_1D în jurul lui AB și să se determine valoarea lui x pentru care această arie este maximă.

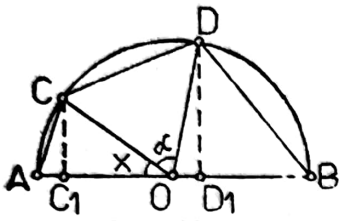


Fig. 211.

Soluție (fig. 211). 1) Se calculează $AC=2R\sin\frac{x}{2}$, $CD=2R\sin\frac{\alpha}{2}$, $DB=2R\cos\frac{x+\alpha}{2}$ și deci perimetrul $2p=2R\left(1+\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{x+\alpha}{2}\right)$; aria $(AOC)=\frac{R^2}{2}\sin x$, aria $(COD)=\frac{R^2}{2}\sin\alpha$, aria $(DOB)=\frac{R^2}{2}\sin(x+\alpha)$ și deci aria $(ABCD)=\frac{R^2}{2}(\sin x+\sin\alpha+\sin(\alpha+x))$. Trecînd la produse, aria $(ACDB)=2R^2\sin\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

2) Se calculează $CC_1=R\sin x$, $DD_1=R\sin(\alpha+x)$, $C_1O=R\cos x$, $OD_1=-R\cos(\alpha+x)$; aria totală $(CC_1D_1B)=\pi CD\cdot(CC_1+DD_1)+\pi CC_1^2+\pi DD_1^2=\pi R^2(1+2\sin\alpha\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\alpha\cos(2x+\alpha))$.

Pentru determinarea punctelor posibile de extrem se anulează derivata, $\cos\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\alpha+2\cos\alpha\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)\right)=0$. Deoarece $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x+\alpha\in(0, \pi)$, rezultă: $\cos\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=0$ cu soluțiile $x+\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, dintre care convine $x=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$; $\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=-2\operatorname{tg}\alpha$ nu are soluții convenabile.

207. Într-un sector circular $OASB$ de rază R și deschidere 2α, $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se înscrie un dreptunghi, avînd două dintre laturi paralele cu coarda AB.

1) Să se determine α astfel încît dreptunghiul de arie maximă înscris în sector, să fie un pătrat.

2) Pentru o valoare α — fixată se rotește figura în jurul axei de simetrie OS; să se determine cilindrul de volum maxim înscris în sectorul sferic obținut.

Soluție (fig. 212). Pentru un $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ arbitrar, dar fixat se calculează aria dreptunghiului $CDEF$; dacă $\sphericalangle BOD=x<\alpha$, atunci $CD=2R\sin(\alpha-x)$, iar din ΔDOE rezultă $ED=\frac{R\sin x}{\sin\alpha}$. Aria $(CDEF)=\frac{2R^2}{\sin\alpha}\sin x$

Scanned with OKEN Scanner

$\sin(\alpha-x)$; deoarece aria $(CDEF)=\frac{R^2}{\sin\alpha}(\cos(2x-\alpha)-\cos\alpha)$, aria ia valoarea maximă pentru $\cos(2x-\alpha)=1$, deci $x=\frac{\alpha}{2}$.

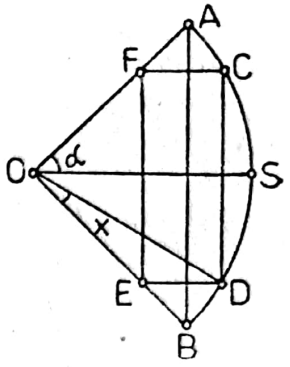


Fig. 212.

Din condiția $CD=ED$ pentru $x=\frac{\alpha}{2}$ rezultă $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$; deoarece $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$, rămîne ecuația $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ cu soluția acceptabilă $\alpha=\frac{\pi}{6}$. În concluzie, pentru $\alpha=\frac{\pi}{6}$ dreptunghiul de arie maximă este un pătrat.

2) $V=\pi\left(\frac{CD}{2}\right)^2\cdot DE=\pi R^2\sin^2(\alpha-x)\frac{R\sin x}{\sin\alpha}=\frac{\pi R^3}{\sin\alpha}\sin x\sin^2(\alpha-x)$.

Se consideră $f(x)=\sin x\sin^2(\alpha-x)$; $f'(x)=\sin(\alpha-x)(\cos x\cdot\sin(\alpha-x)-2\sin x\cos(\alpha-x))$ și $f'(x)=0$ implică $\sin(\alpha-x)=0$ cu soluția $\alpha-x=k\pi$, $(k=0)$, care nu convine, deoarece dreptunghiul $CDEF$ se reduce la segmentul OS. Ecuația $\operatorname{tg}(\alpha-x)=2\operatorname{tg}x$, sau $2\operatorname{tg}^2x\operatorname{tg}\alpha+3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\alpha=0$ are soluția admisibilă $x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{9+8\operatorname{tg}^2\alpha}-3}{4\operatorname{tg}\alpha}$

208. Într-un cerc O de rază R se înscrie un triunghi isoscel ABC cu $AB=AC$. Diametrul paralel cu BC intersectează laturile triunghiului în B', C'. Să se determine:

1) valorile unghiului A pentru care aria $(AB'C')=$aria $(B'BCC')$;

2) aria triunghiului OO_1B în funcție de R și $\sphericalangle A$, unde O_1 este centrul cercului înscris în triunghiul ABC;

3) raportul volumelor de rotație, $V_{AB'C'}:V_{B'BCC'}$ pentru valoarea unghiului A determinată la 1), dacă se rotește figura în jurul axei de simetrie.

Soluție (fig. 213). 1) Fie: diametrul ce trece prin A taie BC în D; aria $(AB'C')=$aria $(B'BCC')\Leftrightarrow$ aria$(ABC)=2$ aria $(AB'C')$, adică $\frac{\text{aria}(AB'C')}{\text{aria}(ABC)}=\frac{1}{2}=\left(\frac{AO}{AD}\right)^2$, sau $\frac{AO}{AD}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Deoarece $AD=R\cos A$ se obține $1+\cos A=\sqrt{2}$, sau $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; cu restricția $A\in(0,\pi)$ rezultă $\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ și $A=2\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

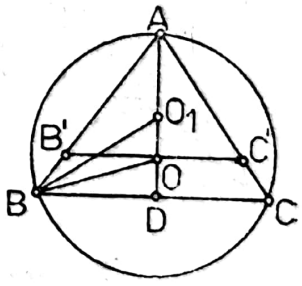


Fig. 213.

2) AD fiind bisectoare, $O_1\in(AD)$; poziția lui O_1 față de O poate fi determinată prin valorile unghiului A; dacă $\frac{A}{2}>\frac{\pi}{6}$, sau $\cos\frac{A}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $O_1\in(AO)$. Într-adevăr, deoarece $\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ rezultă că $O_1\in(AO)$. Se

calculează $O_1D = BD \operatorname{tg}\frac{\pi-A}{4} = R \sin A \operatorname{tg}\frac{\pi-A}{4}$, $OO_1 = O_1D - OD = -\dfrac{R\cos\frac{3A+\pi}{4}}{\cos\frac{\pi-A}{4}}$

și aria $(OO_1B) = \frac{1}{2} OO_1 \cdot OB \sin A = -\dfrac{R^2}{2} \dfrac{\cos\frac{3A+\pi}{4} \cdot \sin A}{\cos\frac{\pi-A}{4}}$; $\frac{3A+\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

3) Pentru $A = 2\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ se satisface $\frac{AO}{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Conurile obținute prin rotirea triunghiurilor ABC, $AB'C'$ au vîrful comun și sînt cuprinse în aceeași suprafață conică; de aceea $\frac{V_{ABC}}{V_{AB'C'}} = \left(\frac{AD}{AO}\right)^3 = 2\sqrt{2}$, sau $\frac{V_{AB'C'} + V_{B'BCC'}}{V_{AB'C'}} = 2\sqrt{2}$, adică $\frac{V_{AB'C'}}{V_{B'BCC'}} = \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

209. Considerăm trei semidrepte reciproc ortogonale Ox, Oy, Oz. Fie $A \in Ox$ și $B \in Oy$, iar OH înălțimea triunghiului OAB. Fie $P \in Oz$ astfel încît $OP = OH$.

1) Care este unghiul dintre planele OAB și PAB?

2) Notăm $OA = a$ și $OB = b$. Să se găsească aria triunghiului PAB în funcție de a și b.

3) Fie M un punct oarecare pe Oz și fie K proiecția lui O pe planul ABM. Să se găsească locul geometric al lui K în ipoteza că M descrie pe Oz.

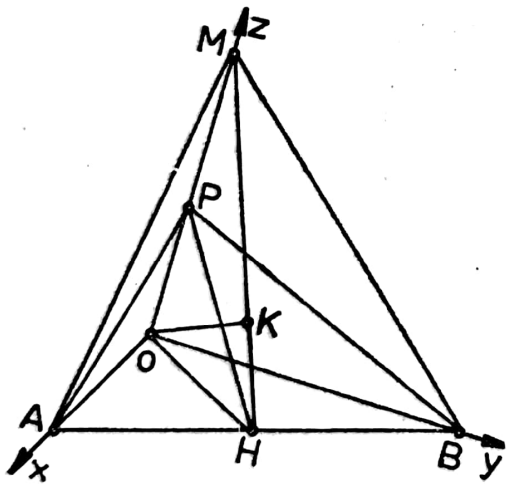


Fig. 214.

Soluție (fig. 214). 1) Teorema celor trei perpendiculare ne asigură că $PH \perp AB$. De aceea unghiul OHP dă măsura diedrului format de planele OAB și PAB. Pe de altă parte ΔPOH este dreptunghic și isoscel; deci unghiul căutat este $\frac{\pi}{4}$.

2) Din relația aria (OAB) = aria $(PAB) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ aria (PAB) deducem aria $(PAB) = \sqrt{2}$ aria $(OAB) = \frac{\sqrt{2}}{2} ab$.

3) Planele AMB și MOH sînt perpendiculare și se intersectează după MH. Evident $K \in MH$. Deoarece unghiul OKH este drept, punctul K va descrie semicercul de diametru OH situat în planul OHP de aceeași parte a lui OH cu P.

Precizare. Fie P și P' două plane oarecare, fie Σ o figură din planul P, de arie a, iar Σ' proiecția ortogonală a lui Σ pe P', de arie a'. Dacă γ este măsura unghiului diedru determinat de P și P', atunci se poate dovedi că $a' = a \cos\gamma$.

Scanned with OKEN Scanner

210. Dacă suma lungimilor celor şase laturi ale unui tetraedru tridreptunghic $PABC$ (cu $\sphericalangle APB=\sphericalangle BPC=\sphericalangle CPA=90°$) este S, să se determine volumul maxim.

(Olimpiadă, S.U.A.. 1976)

Soluţie Fie $PA=x$, $PB=y$ şi $PC=z$. Evident volumul tetraedrului dat este $V=\frac{xyz}{6}$.

Pe de altă parte avem $AB=\sqrt{x^2+y^2}$, $AC=\sqrt{x^2+z^2}$, $BC=\sqrt{y^2+z^2}$ şi deci

$$S=x+y+z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}.$$

Ţinînd seama că media aritmetică este $\geqslant$ decît media geometrică, găsim

$$x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz},\ \text{iar}\ \sqrt{x^2+y^2}\geqslant\sqrt{2xy},\ \sqrt{y^2+z^2}\geqslant\sqrt{2yz},\ \sqrt{x^2+z^2}\geqslant\sqrt{2xz};$$

$$\sqrt{2xy}+\sqrt{2yz}+\sqrt{2zx}\geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{2xy}\sqrt{2yz}\sqrt{2zx}}=3\sqrt[3]{2\sqrt{2}\,xyz}$$

şi deci

$$S\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\sqrt[3]{xyz}=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{xyz},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x=y=z=\frac{S}{3(1+\sqrt{2})}$.

Astfel obţinem $V\leqslant\frac{S^3}{162(7+5\sqrt{2})}$. Rezultă $max\ V=\frac{S^3}{162(7+5\sqrt{2})}$ şi acesta este atins pentru $x=y=z=\frac{S}{3(1+\sqrt{2})}$.

211. Triunghiul ABC, $\sphericalangle A=\frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle B=2\alpha$, $BC=a$, are punctul B conţinut într-un plan $\mathscr{P}$; unghiul dintre segmentul BC şi planul $\mathscr{P}$ este α. Triunghiul ABC se roteşte în jurul lui BC, pînă ce AB este conţinut în planul $\mathscr{P}$; fie BA_1 şi BA_2 cele două poziţii ale lui AB, cînd este conţinut în planul $\mathscr{P}$.

Să se calculeze:

1) Partea din volumul de rotaţie a triunghiului ABC în jurul lui BC, corespunzătoare poziţiilor lui AB situate deasupra planului.

2) Unghiul diedru al planului CBA_2 cu planul $\mathscr{P}$.

3) Volumul piramidei $CA_1A_2C_1$, unde C_1 este proiecţia lui C pe $\mathscr{P}$.

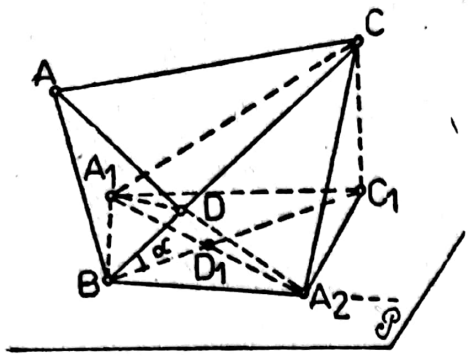
Soluţie (fig. 215). 1) Din calcul rezultă

$$AB=a\cos 2\alpha,\qquad AD=a\sin 2\alpha\cos 2\alpha,$$

$$BD=a\cos^2 2\alpha,\qquad DD_1=a\cos^2 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Volumul de rotaţie cerut este partea din volumul conurilor obţinute din rotaţia triunghiurilor ABD şi ACD în jurul lui BC, corespunzătoare sectorului circular A_1AA_2 (centrul cercului în D), adică $2\pi-2\beta$.

Scanned with OKEN Scanner



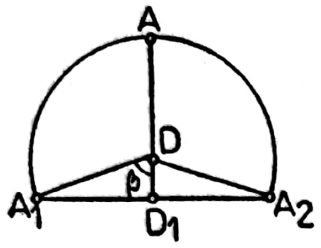


Fig. 215.

Deci $V=\frac{BD}{3}\cdot\frac{AD^2}{2}\cdot(2\pi-2\beta)+\frac{DC}{3}\cdot\frac{AD^2}{2}(2\pi-2\beta)=\frac{BC}{3}\cdot AD^2(\pi-\beta)$. Deoarece $\cos\beta=\frac{DD_1}{AD}=\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$, rezultă că $V=\frac{a^3}{12}\sin^2 4\alpha\left(\pi-\arccos\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2}\right)$.

2) Planul $(CA_2C_1)\perp(d_{BA_2})$, (T. celor trei perpendiculare); deci unghiul diedru cerut este egal cu $\sphericalangle CA_2C_1=\gamma$. Se calculează $AC=a\sin 2\alpha$, $CC_1=a\sin\alpha$, $\sin\gamma=\frac{CC_1}{CA}=\frac{1}{2\cos\alpha}$; $\gamma=\arcsin\frac{1}{2\cos\alpha}$.

3) Deoarece $V_{A_1A_2C_1C}=\frac{CC_1}{3}\cdot$ aria $(A_1A_2C_1)$, se calculează: $BD_1=\frac{a\cos^2 2\alpha}{\cos\alpha}$, $BC_1=a\cos\alpha$, $D_1C_1=BC_1-BD_1=\frac{a(\cos^2\alpha-\cos^2 2\alpha)}{\cos\alpha}$; $A_1D_1=AD\sin\beta=\frac{a}{2}\sin 4\alpha\sin\beta$; $A_1A_2=a\sin 4\alpha\sin\beta$.

Rezultă că $V_{A_1A_2C_1C}=\frac{1}{3}a\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}a\sin 4\alpha\sin\beta\frac{a}{\cos\alpha}(\cos^2\alpha-\cos^2 2\alpha)=\frac{a^3}{6}\sin\beta\cdot\frac{\sin\alpha\sin 4\alpha}{\cos\alpha}(\cos^2\alpha-\cos^2 2\alpha)$.

212. Latura BC a unui triunghi ABC este conținută într-un plan P; A_1 este proiecția punctului A pe plan, $\sphericalangle ABA'=\beta$, $\sphericalangle ACA'=\gamma$, iar unghiul diedru dintre P și planul triunghiului ABC este α.

Se cere:

1) Să se determine relația satisfăcută de unghiurile α, β, γ și $x=\sphericalangle BAC$.

2) Să se calculeze volumul piramidei $AA'BC$ pentru cazul $x=90°$, $AA'=a$.

3) În ipotezele punctului 2) să se determine raza sferei înscrise în piramida $AA'BC$.

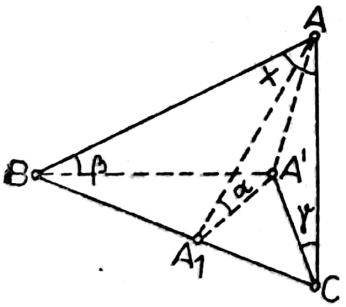


Fig. 216.

Soluție (fig. 216). 1) Deoarece $\Delta A'BC$ este proiecția pe planul P a ΔABC, se satisface relația

$$\text{aria}\,(A'BC)=\text{aria}\,(ABC)\cdot\cos\alpha.$$

Din $\Delta AA'B$, $\Delta AA'C$ rezultă $AB=\frac{AA'}{\sin\beta}$, $AC=\frac{AA'}{\sin\gamma}$, $A'B=AA'\operatorname{ctg}\beta$, $A'C=AA'\operatorname{ctg}\gamma$ și aria $(ABC)=\frac{AA'^2\sin x}{2\sin\beta\sin\gamma}$. Din $\Delta AA'A_1$ rezultă $A'A_1=AA'\operatorname{ctg}\alpha$ și deoarece din $\Delta A'BC$, $BC=BA_1+A_1C=AA'(\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha}+$

Scanned with OKEN Scanner

$+\sqrt{\operatorname{ctg}^2\gamma-\operatorname{ctg}^2\alpha}$), se obține aria $(A'BC)=\frac{AA'^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha(\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha}+$ $+\sqrt{\operatorname{ctg}^2\gamma-\operatorname{ctg}^2\alpha})$.

Înlocuind în relația satisfăcută de arii, rezultă

$$\sin^2\alpha\sin x=\sin\beta\sqrt{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha+\gamma)}+\sin\gamma\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}.$$

Din restricțiile geometrice, rezultă $\alpha\geqslant\beta$, $\alpha\geqslant\gamma$; prezintă interes $\alpha\neq 90°$, fie $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

2) $V_{AA'BC}=\frac{1}{3}\text{aria}\,(A'BC)\cdot AA'=\frac{1}{3}AA'\,\text{aria}\,(ABC)\cdot\cos\alpha=\frac{a^3\cos\alpha}{6\sin\beta\sin\gamma}$.

3) Cu rezultatul de la 2), raza r a sferei rezultă din egalitatea $V_{AA'BC}=$ $=\frac{r}{3}(\text{aria}\,(A'AB)+\text{aria}\,(A'AC)+\text{aria}\,(A'BC)+\text{aria}\,(ABC))=\frac{r}{3}\left(\frac{a^2}{2}\operatorname{ctg}\beta+\right.$ $\left.+\frac{a^2}{2}\operatorname{ctg}\gamma+\frac{a^2}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{a^2}{2\sin\beta\sin\gamma}\right)$; se obține $r=\frac{a\cos\alpha}{\sin(\beta+\gamma)+\cos\alpha+1}$.

213. O piramidă regulată dreaptă are baza un poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc de rază R. Se cere:

1) relația dintre unghiul făcut de o muchie cu planul bazei și unghiul dintre două muchii alăturate;

2) aria proiecției ortogonale a bazei pe planul care trece printr-un vîrf al bazei și este ortogonal muchiei (sau fetei) opuse;

3) volumul piramidei, cînd se cunoaște R și unghiul făcut de planul de secțiune de la 2) cu planul bazei.

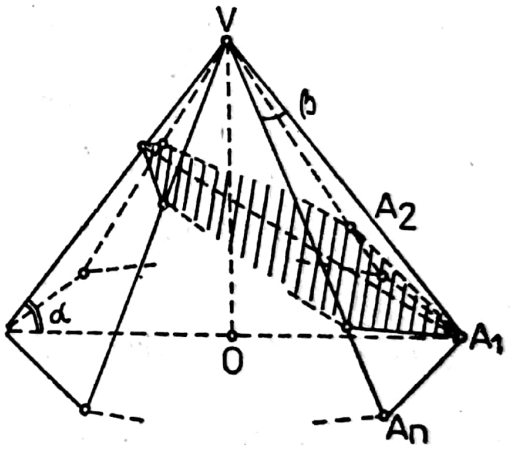


Fig. 217.

Soluție (fig. 217). 1) Din teorema cosinusului rezultă în ΔVA_nA_1, $A_1A_n^2=2A_1V^2-2A_1V^2\cos\beta$; din triunghiul dreptunghic VA_1O, $OA_1=$ $=A_1V\cos\alpha$. Deoarece $OA_1=R$, $A_1A_n=l_n=$ $=2R\sin\frac{\pi}{n}$, $A_1V=\frac{R}{\cos\alpha}$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0,\frac{2\pi}{n}\right)$, se obține $2\sin^2\frac{\pi}{n}=\frac{1-\cos\beta}{\cos^2\alpha}$, sau $\sin\frac{\beta}{2}=$ $=\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha$.

2) Aria bazei piramidei este aria $(A_1A_2\ldots A_n)=n\cdot\frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$; deoarece planul de secțiune face cu planul bazei unghiul $\frac{\pi}{2}-\alpha$, considerînd că $\mathscr{P}$ este proiecția ortogonală a poligonului bazei pe planul de secțiune, rezultă aria $\mathscr{P}=\text{aria}\,(A_1A_2\ldots A_n)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\alpha$.

3) Înălțimea piramidei se determină din ΔVOA_1, $VO=R\operatorname{ctg}\alpha$ și volumul $V_n=\frac{nR^3}{6}\sin\frac{2\pi}{n}\operatorname{ctg}\alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

214. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a și O_i — centrele fețelor (O_1 la $ABCD$, O_2 la $A'B'C'D'$, O_3 la $AA'B'B$, O_4 la $BB'C'C$, O_5 la $CC'D'D$, O_6 la $DD'A'A$). Se cere:

1) distanța dintre dreptele care trec prin punctele B, O_2, respectiv C, O_6;

2) să se calculeze volumul poliedrului convex $O_1O_2\ldots O_6$ și să se determine aria secțiunii poliedrului cu planul $A'B'CD$.

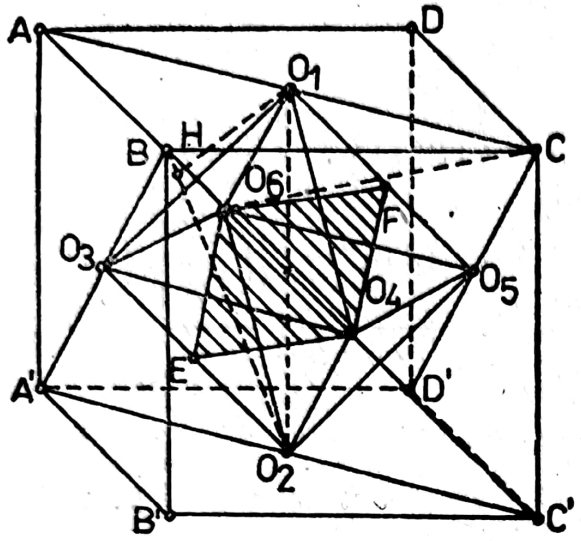


Fig. 218.

Soluție (fig. 218). 1) BO_2 este în plan $(BA'C')$, CO_6 în plan (CAD'), $AC\|A'C'$, $AD'\|BC'$, $CD'\|BA'$ și plan $(BA'C')\|$ plan (CAD'). Deoarece BO_2 nu este paralelă la CO_6, distanța dintre BO_2 și CO_6 este egală cu distanța dintre cele două plane, care le conțin. Distanța cerută este înălțimea O_1H din ΔBO_1O_2, dreptunghic; $O_1H=\frac{BO_1\cdot O_1O_2}{BO_2}=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Observație. Distanța dintre cele două plane este $\frac{DB'}{3}$, deci cele două plane împart diagonala în trei părți egale.

2) Poliedrul este format din două piramide patrulatere regulate, având aceeași bază $O_3O_4O_5O_6$ și înălțimi egale; $V_{O_1O_2\ldots O_6}=\frac{1}{3}O_1O_2\cdot$aria $(O_3O_4O_5O_6)$. Deoarece $O_3O_4O_5O_6$ este un pătrat cu latura $O_3O_4=\frac{a}{\sqrt{2}}$, rezultă $V_{O_1O_2\ldots O_6}=\frac{a^3}{6}$.

Secțiunea poliedrului cu planul $A'B'CD$ este un romb cu diagonalele $O_4O_6=a$, $EF=\frac{a}{\sqrt{2}}$ (EF este conținut în dreapta care trece prin mijloacele muchiilor $A'B'$ și CD); aria $(EO_4FO_6)=O_4O_4\cdot\frac{EF}{2}=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$.

215. Pe diagonalele BD și $A'C'$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$, de muchie a, se consideră punctele arbitrare M, respectiv N. Pe segmentul MN se consideră punctul P, care satisface $\frac{MP}{PN}=m$, $m\in(0,\ \infty)$.

1) Pentru o valoare m fixată, să se determine locul geometric al punctului P.

2) Să se determine poliedrul căruia îi aparține punctul P, cînd $m\in(0,\ \infty)$; să se calculeze volumul poliedrului și raza sferei înscrise.

Soluție (fig. 219). 1) Fie un punct M pe BD, arbitrar dar fixat; oricare ar fi N pe $A'C'$ și P pe MN se impune satisfacerea relației $\frac{MP}{PN}=m$; deci în $\Delta MA'C'$ punctul P se situează pe un segment $P_1'P_2'$, care satisface $P_1'P_2'\|A'C'$,

$\frac{P_1'P_2'}{A'C'}=\frac{MP}{MN}=\frac{m}{m+1}$; Deoarece, pentru M parcurgînd BD și N pe $A'C'$, se păstrează egalitatea $\frac{MP}{PN}=m$, deci se păstrează și $P_1'P_2'\|A'C'$, $\frac{P_1'P_2'}{A'C'}=\frac{m}{m+1}$, rezultă $P_1'P_2'\|A'C'$ și $P_1'P_2'=\frac{m}{m+1}A'C'$, independent de poziția punctelor M, N pe cele două diagonale BD, respectiv $A'C'$. Ultima concluzie înseamnă că punctul P acoperă un dreptunghi $P_1P_2P_3P_4$ dintr-un plan Q, Q împărțind muchiile cubului paralele cu AA', spre exemplu, în raportul m, $\left(\frac{AA_1}{A_1A'}=m, A_1\in \text{plan}(Q)\right)$; dreptunghiul $P_1P_2P_3P_4$ ($P_1\in BA'$, $P_2\in BC'$, $P_3\in DC'$, $P_4\in DA'$) are două dintre laturi paralele cu $A'C'$ și cu mărimea $P_1P_2=\frac{m}{m+1}A'C'=\frac{m}{m+1}\cdot a\sqrt{2}(=P_3P_4)$. Celelalte două laturi sînt paralele cu BD și au lungimea $P_2P_3=(P_4P_1=)\frac{1}{m+1}BD=\frac{a\sqrt{2}}{m+1}$ (deoarece $\frac{BP_2}{P_2C'}=m$ în $\Delta BDC'$, rezultă $\frac{C'P_2}{C'B}=\frac{1}{m+1}=\frac{C'P_3}{C'D}=\frac{P_2P_3}{BD}$);

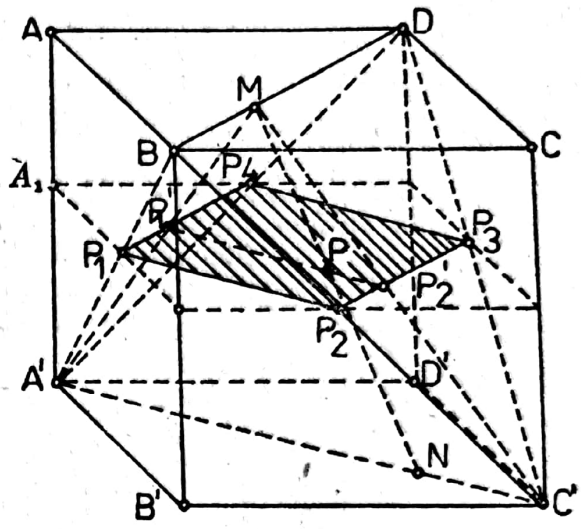


Fig. 219.

2) În $\Delta BA'C'$ ($\Delta A'C'D$) se satisface $P_1P_2=\frac{m}{m+1}A'C'(=P_3P_4)$ și $P_1P_2\|A'C'(\|P_3P_4)$. Observînd că $m\to\frac{m}{m+1}$ este funcție continuă, strict monotonă pe $(0,\infty)$ și deoarece pentru m suficient de mare $(m\to\infty)P_1P_2\to A'C'$ iar pentru $m\to 0$, P_1P_2 se restrînge la punctul B, rezultă că laturile P_1P_2, P_3P_4 ale dreptunghiului $P_1P_2P_3P_4$ cresc ca lungime de la zero (cînd P_1, P_2 se confundă cu B, iar P_3, P_4 cu D și dreptunghiul se reduce la segmentul BD) pînă la $a\sqrt{2}$ (cînd P_1, P_4 se confundă cu A', iar P_2, P_3 cu C' și dreptunghiul se reduce la segmentul $A'C'$) și descriu triunghiul $BA'C'$, respectiv $DA'C'$. Analog P_2P_3, P_4P_1 descriu triunghiul $BC'D$, respectiv $BA'D$.

În concluzie, poliedrul determinat de translația dreptunghiului $P_1P_2P_3P_4$, cînd $m\in(0,\infty)$, este piramida triunghiulară $BA'C'D$ (tetraedru), avînd muchiile de lungime $a\sqrt{2}$.

Se calculează volumul tetraedrului

$$V_{BA'C'D}=V_{ABCDA'B'C'D'}-4V_{B'A'BC'}=a^3-4\frac{a^3}{6}=\frac{a^3}{3},$$

Deoarece fețele piramidei sînt triunghiuri echilaterale egale, de latură $a\sqrt{2}$, notînd raza sferei înscrise în tetraedru cu R, rezultă $V_{BA'C'D}=4\cdot\text{aria}(BA'C')\cdot\frac{R}{3}=\frac{4R}{3}\cdot\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}$, sau $R=\frac{a}{2\sqrt{3}}$;

216. Pe cele două circumferinţe ale bazelor unui cilindru circular drept de rază R şi înălţimea $2R$ se iau punctele M, respectiv N. Segmentul MN face cu planul bazei unghiul x. Se cere:

1) distanţa $d(x)$ de la axa de simetrie OO' a cilindrului la segmentul MN;

2) să se reprezinte grafic $x \to d(x)$;

3) volumul de rotaţie în jurul axei ox a domeniului $\{(x, y)/0 \leqslant y \leqslant d(x), x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\}$ şi aria plană cuprinsă între grafic $G(d)$ şi Oy, $y \in [0, R]$.

Soluţie (fig. 220 a). 1) Se consideră generatoarele MM', NN' ale cilindrului; ele determină planul $MM'NN'$, care conţine segmentul MN şi este paralel lui OO' (deoarece $MM' \| OO'$, $NN' \| OO'$). Rezultă că distanţa dintre OO' şi MN este egală cu distanţa de la oricare punct de pe OO' la planul $MM'NN'$; $d(x) = OP$, $PM = PN'$.

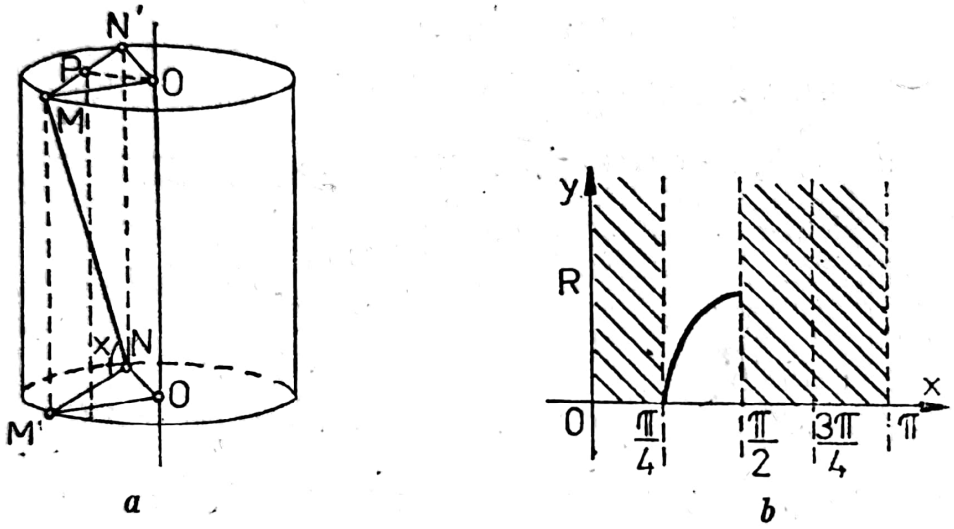


Fig. 220.

În $\Delta MNN'$, $MN' = 2R \operatorname{ctg} x$; în ΔOPM, $d(x) = R\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$. Din considerente geometrice $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$; deoarece $1 - \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 0$ pentru $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, domeniul rămîne $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) $d\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $d\left(\frac{\pi}{2}\right) = R$, $d'(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 x}}$; $d'(x) = 0$ pentru $x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} d'(x) = +\infty$; $d(x)$, pentru $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, este strict crescătoare (fig. 220 b).

3) $$V = \pi R^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) dx = \pi R^2 \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi R^2}{2}(\pi - 2).$$

Deoarece $d:\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\to[0,R]$ este strict monotonă, există inversă, care în exemplul dat se poate explicita; $d^{-1}(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{R}\sqrt{R^2-x^2}$, $d^{-1}:\ [0,\ R]\to$ $\to\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. aria $(G(d^{-1}))=\int\limits_0^R \operatorname{arcctg}\frac{1}{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=x\operatorname{arcctg}\frac{1}{R}\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^R-$ $-R\int\limits_0^R\frac{x^2dx}{(2R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2}}=R\frac{\pi}{2}-R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\,dt}{2-\sin^2 t}$, (în ultima integrală s-a făcut substituţia $x=R\sin t$); se determină primitiva: $\int\frac{\sin^2 t\,dt}{2-\sin^2 t}=\int\frac{u^2du}{(u^2+1)(u^2+2)}=$ $=\int\left(\frac{-1}{1+u^2}+\frac{2}{2+u^2}\right)du=-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t)+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{2}}$ (substituţia $u=\operatorname{tg} t$). Rezultă deci aria $(G(d^{-1}))=2\frac{R\pi}{2}-R\sqrt{2}\frac{\pi}{2}=\frac{R\pi}{2}(2-\sqrt{2})$.

217. Suprafaţa născută prin rotirea unui cerc în jurul unei axe conţinută în planul cercului şi exterioară lui se numeşte *tor* (fig. 221).

Se consideră torul T generat prin rotirea cercului C : $x^2+(y-2)^2=1$, $z=0$ în jurul axei Ox.

1) Sub ce unghi solid este văzută porţiunea din torul T observabilă din origine?

2) Să se afle volumul torului T.

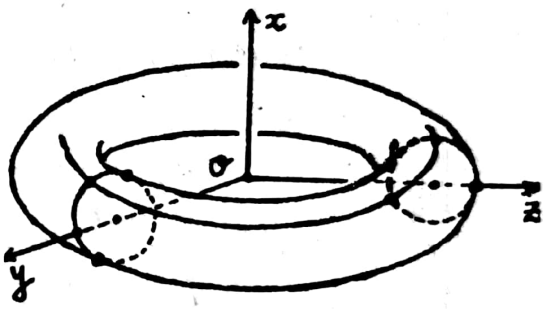


Fig. 221.

Soluţie. 1) Evident, unghiul solid este generat prin rotaţia în jurul Ox a semitangentelor duse din origine la cercul C.

Pentru obţinerea ecuaţiilor celor două tangente folosim sistemul

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=1 \\ y=mx. \end{cases}$$

Eliminînd pe y ajungem la $x^2(1+m^2)-4mx+3=0$; punem condiţia ca această ecuaţie să aibă rădăcină dublă, adică $\Delta=4m^2-$ $-3(1+m^2)=m^2-3=0$; rezultă $m_{1,2}=\pm\sqrt{3}$ şi deci ecuaţiile tangentelor duse din origine la cercul C sînt $y=\sqrt{3}x$ şi $y=-\sqrt{3}x$. Semitangentele vor fi $y=-\sqrt{3}x$, $x\leqslant 0$; $y=\sqrt{3}x$, $x\geqslant 0$.

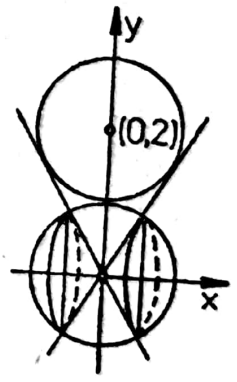


Fig. 222.

Unghiul dintre semitangente este $\frac{\pi}{3}$. De aceea zona sferică decupată de con în sfera de rază unu are înălţime egală cu 1 şi aria 2π. Astfel unghiul solid căutat este 2π (fig. 222).

Scanned with OKEN Scanner

2) Avem $y=2\pm\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1, 1]$. De aceea găsim

$$V=\pi\int_{-1}^{1}[(2+\sqrt{1-x^2})^2-(2-\sqrt{1-x^2})^2]dx=16\pi\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=$$

$$=16\pi\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)\Big|_0^1=4\pi^2.$$

218. Într-un con circular drept, a cărui generatoare de lungime l face un unghi α cu planul bazei, se înscrie un cub.

1) Să se determine latura l_1 a cubului.

2) În conul care rămîne prin secționarea conului inițial cu un plan paralel cu baza, la distanța l_1 de aceasta, se înscrie un cub de latură l_2; idem $l_3, l_4, \ldots, l_n$.

Să se calculeze $S_n=\sum_{k=1}^{n} l_k$.

3) Să se determine $S=\lim_{n\to\infty} S_n$; să se stabilească existența lui S în funcție de α.

Soluție (fig. 223). 1) Deoarece $A_1A_2=l_1$, $A_2B_2=l_1\sqrt{2}$, $AO_1=l\cos\alpha$, rezultă spre exemplu, din ΔAA_1A_2: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{l_1}{AO_1-A_1O_1}$ și $l_1=\frac{l\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}$.

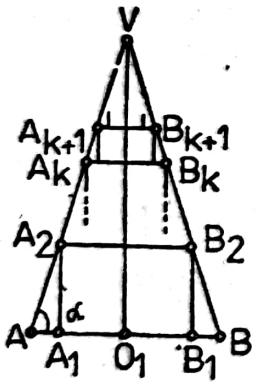


Fig. 223.

2) Într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza A_kA_{k+1} se poate scrie $\operatorname{tg}\alpha=\frac{l_k\sqrt{2}}{l_{k-1}-l_k}$ și deci $\frac{l_k}{l_{k-1}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}$, independent de k; elementele $\{l_k|\ k\in\{1, 2, \ldots, n\}\}$ sînt în progresie geometrică și $S_n=l_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=l\sin\alpha\left(1-\frac{\operatorname{tg}^n\alpha}{(\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha)^n}\right)$.

3) Condiția de existență a sumei progresiei geometrice infinite (convergența seriei geometrice) este $-1<\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}<1$; deoarece din considerente geometrice $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă $0<\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}<1$ și $S=\frac{l_1}{1-q}=l\sin\alpha=h$. Ultimul rezultat este evident din considerente geometrice: cînd $n\to\infty$, suma laturilor cuburilor este înălțimea conului, h.

219. Din punctul A situat pe o sferă de rază R se duc coardele $AB=AC=AD$, care fac între ele, două cîte două, unghiul x.

Se cere:

1) să se calculeze lungimea coardelor în funcție de R și x;

2) să se determine unghiul dintre AB și planul BCD, pentru cazul cînd aria laterală a piramidei $ABCD$ este maximă;

Scanned with OKEN Scanner

3) să se studieze funcţia $x \to f(x) = \frac{1}{AB}$.

Soluţie. 1) Din ΔABC rezultă $BC = 2l \sin \frac{x}{2}$, unde $l = AB$; deoarece ΔBCD este echilateral (baza piramidei triunghiulare regulate $ABCD$), rezultă $BC = r\sqrt{3}$, unde $r = O_1B$.

Din ΔBO_1O, $R^2 = r^2 + OO_1^2$; din ΔBO_1A, $l^2 = r^2 + (R + OO_1)^2$. Eliminînd CO_1 şi BC rezultă $l^4 - 4l^2R^2 + 4R^2 \frac{4}{3} l^2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$; soluţia $l = 0$ corespunde la A, B, C, D — confundate în punctul A.

Cealaltă soluţie este $l = \frac{2R}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2\cos x}$ (fig. 224).

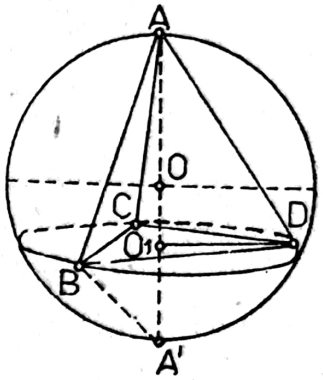


Fig. 224.

2) Aria laterală, $A_l(x) = 3\frac{l^2}{2} \sin x$; deoarece $x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\max A_l(x) = A_l\left(\frac{\pi}{2}\right)$, deci pentru $x = \frac{\pi}{2}$. Deoarece plan $(AO_1B) \perp$ plan (BCD), $\sphericalangle(AB, \text{plan}\,(BCD)) = \sphericalangle ABO_1$.

Observăm că $\cos \sphericalangle ABO_1 = \frac{r}{l} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x}{2}$; deci $\cos \sphericalangle ABO_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, iar $\sphericalangle ABO_1 = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

3) Domeniul de existenţă al lui f ca funcţie cu valori reale este determinat de $1 + 2\cos x > 0$; împreună cu restricţia, rezultînd din considerente geometrice, $x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ se obţine în final domeniul de definiţie $x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$; $x \to f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2\cos x}}$.

Urmează tabelul de variaţie şi graficul (fig. 225):

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2R}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2R}$	$\nearrow$	∞
$f''(x)$		$+$		$+$	

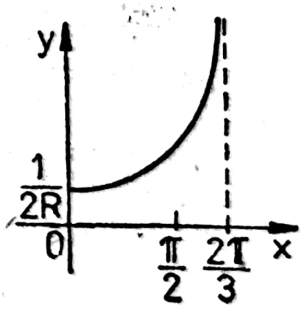


Fig. 225.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2R} \frac{\sin x}{(1 + 2\cos x)^{3/2}} > 0, \text{ pentru } x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$f''(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2R} \frac{\left(\cos x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)}{(1 + 2\cos x)^{5/2}} > 0, \; x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

220. (i) Fie o sferă de centru O şi de rază r, iar Π un plan de secţiune. Planul Π împarte sfera în două corpuri numite *segmente sferice* (*cu o singură bază*). Porţiunea din suprafaţa sferică care mărgineşte un segment sferic se numeşte *calotă sferică*.

Notăm cu $\{C\}$ intersecţia dintre sferă şi perpendiculara coborîtă din O pe Π. Fie h distanţa de la C la Π (fig. 226). Atunci aria calotei este $2\pi rh$, iar volumul segmentului sferic cu o bază este $\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$.

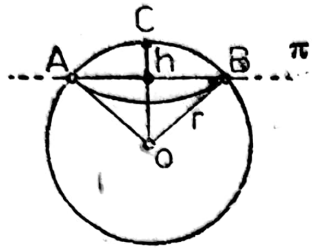


Fig. 226.

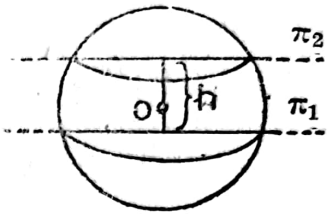


Fig. 227.

(ii) Corpul obţinut prin reuniunea conului OAB cu segmentul sferic APB se numeşte *sector sferic*; acest corp are volumul $\frac{2\pi r^2 h}{3}$ (sau $\frac{r^3\alpha}{3}$, unde α este măsura unghiului solid cu vîrful în O).

(iii) Corpul mărginit de suprafaţa sferică şi de două plane paralele Π_1, Π_2 de secţiune, se numeşte *segment sferic cu două baze* (fig. 227). Porţiunea din suprafaţa sferei cuprinsă între cele două plane se numeşte *zonă sferică*. Dacă h este distanţa dintre Π_1 şi Π_2, atunci aria zonei sferice este $2\pi rh$.

Problemă. 1) Fie h distanţa dintre bazele unui segment sferic, iar ρ raza secţiunii făcută în sferă printr-un plan egal depărtat de bazele segmentului. Să se arate că volumul segmentului se poate exprima în forma

$$V=\pi h\left(\rho^2-\frac{h^2}{12}\right).$$

2) Se consideră toate sferele care trec printr-un cerc dat. Să se demonstreze că două plane, egal depărtate de planul cercului, determină în sferele pe care le intersectează segmentele care au acelaşi volum.

(G. Ţiţeica, Culegere de probleme)

Soluţie. 1) Se observă că $V=\frac{\pi h^3}{6}+\frac{1}{2}\pi h(r_1^2+r_2^2)$, unde r_1 şi r_2 sînt razele bazelor. Apoi se constată că $r_1^2+r_2^2=2\rho^2-\frac{h^2}{2}$,

2) consecinţă directă a formulei $V=\pi h\left(r^2-\frac{h^2}{12}\right)$.

221. O piramidă $VA_1A_2\ldots A_m$ are ca bază un poligon regulat cu m laturi înscris într-un cerc de rază R şi înălţimea $VA_1=h$.

1) Să se calculeze volumul, folosind o integrală Riemann.

2) Prin trecere la limită să se determine volumul conului care are ca bază cercul de rază R, iar înălţimea are mărimea h şi este orientată după o generatoare.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie (fig. 228). 1) Fie o axă xx' orientată după VA_1, iar originea se consideră în V. Se face o secţiune prin piramidă cu un plan $\mathscr{P}$, paralel cu planul bazei; poligonul de secţiune este $A_1'A_2'\ldots$ $\ldots A_m'$, iar $VA_1'=x$. Din $\Delta VA_1'A_2'\sim\Delta VA_1A_2$ rezultă $\frac{A_1'A_2'}{A_1A_2}=\frac{x}{h}$; deoarece $\Delta VA_jA_{j+1}\sim\Delta VA_j'A_{j+1}'$, poligoanele $A_1A_2\ldots A_m$ şi $A_1'A_2'\ldots A_m'$ sînt asemenea. Se notează cu $S(x)$ aria secţiunii prin planul $\mathscr{P}$ şi cu S_b aria bazei; din asemănare rezultă $\frac{S(x)}{S_b}=$ $=\left(\frac{A_1'A_2'}{A_1A_2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}$, sau $S(x)=\frac{x^2}{h^2}S_b$. Deoarece aria secţiunii depinde de o singură variabilă, volumul se poate exprima printr-o integrală Riemann.

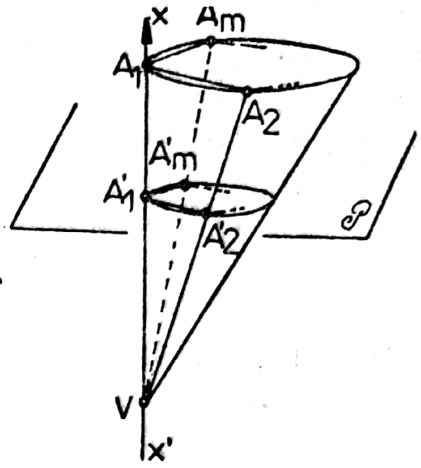


Fig. 228.

Într-adevăr, considerînd o diviziune a intervalului $[0, h]$, $d_n=(0, x_1\ldots, x_{n-1}, h)$, volumul se aproximează printr-o sumă de volume de prisme cu baza un poligon regulat cu m laturi şi de înălţime $x_{i+1}-x_i$, $V_{d_n}=\sum_{i=0}^{n-1}S(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$, $\xi_i\in[x_i, x_{i+1}]$. Pentru un şir de diviziuni $d_n([0, h])$ cu şirul normelor $\gamma(d_n)\to 0$ rezultă $V_{d_n}\to\int_0^h S(x)dx$, deoarece S este integrabilă pe $[0, h]$ (există volumul piramidei). Pentru cazul particular al diviziunilor uniforme şi o alegere convenabilă a punctelor intermediare ξ_i, se obţine:

$$x_{i+1}-x_i=\frac{h}{n},\quad \xi_i=x_{i+1}\ \text{şi}\ V_n=\frac{h}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(x_{i+1}).$$

Înlocuind, se obţine

$$V_n=\frac{h}{n}\cdot S_b\cdot\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2h^2}{n^2}=\frac{h}{n^3}S_b\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{h}{n^3}S_b\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \text{iar}\ \lim_{n\to\infty}V_n=$$
$$=\frac{h}{3}S_b.$$

2) Se notează volumul piramidei de la 1) prin W_m; deoarece $S_b=\frac{m}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{m}$, se obţine $W_m=\frac{hmR^2}{6}\sin\frac{2\pi}{m}$, iar volumul conului este $W=\lim_{m\to\infty}W_m=$ $=\frac{hR^2}{6}\lim_{m\to\infty}m\sin\frac{2\pi}{m}=\frac{h}{3}\pi R^2$.

222. 1) Să se calculeze aria elipsei de semiaxe a, b.

2) Să se calculeze volumul unui corp, care are ca secţiuni ortogonale unei axe $z'z$, elipse de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{d^2}{c^2}$; d este distanţa planului de secţiune la planul bazei, $d\in[0, c]$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție (fig. 229). 1) Aria domeniului plan $D=\{(x, y)|\ y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$ $x\in[0, a]\}$ este $A=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi ab}{4}$. Aria plană cuprinsă în elipsă este $4A=\pi ab$.

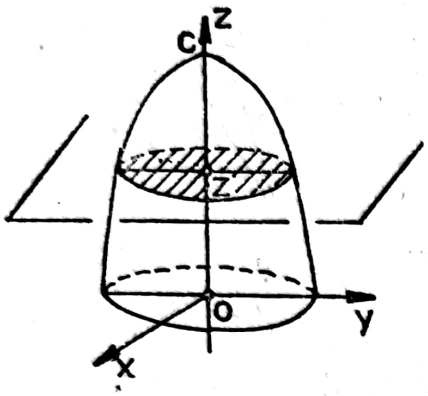


Fig. 229.

2) Luînd originea axei $z'z$ în centrul elipsei din planul bazei și considerînd secțiunea corpului (elipsoid) cu un plan paralel cu planul bazei la distanța $d=z$ de bază, găsim elipsa de semiaxe $a_1=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$, $b_1=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$. Cu rezultatul de la 1) aria secțiunii este $S(z)=\pi a_1 b_1=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$ și se observă că depinde de o singură variabilă. Deci volumul se poate exprima printr-o integrală Riemann,

$$V=\int_0^c S(z)dz=\pi ab\int_0^c\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{2\pi abc}{3}.$$

223. Fie $ABCD$ o fîșie dreptunghiulară de hîrtie, de lungime a și de lățime b (fig. 230).

1) Cu ajutorul fîșiei $ABCD$ construim doi cilindri alăturați egali, ca în fig. 231. Să se găsească volumul unuia dintre cei doi cilindri.

2) Răsucind o dată fîșia $ABCD$ se unesc capetele ei în așa fel încît punctul A să coincidă cu C, iar D cu B. Suprafața Σ care ia naștere se numește *bandă Mobius* (fig. 232).

Cîte fețe are Σ? Să se afle aria lui Σ.

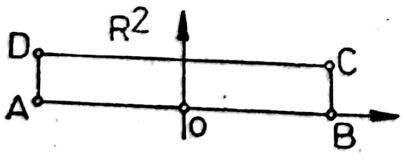


Fig. 230.

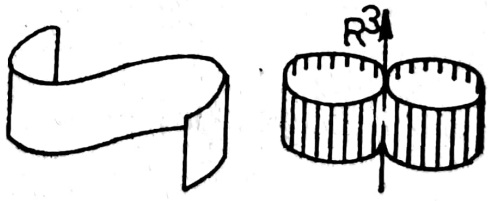


Fig. 231.

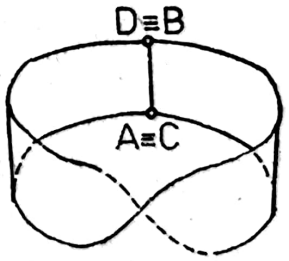


Fig. 232.

Soluție. 1) Unul dintre cilindri provine dintr-o jumătate a fîșiei $ABCD$. De aceea cercul de la bază are raza $r=\frac{a}{4\pi}$ și înălțimea b. Rezultă $V=\frac{a^2b}{16\pi}$.

2) Privită global Σ are o singură față și de acest lucru ne putem convinge ușor colorînd-o de exemplu în roșu; privită local („pe bucăți") are două fețe.

Evident aria lui Σ este dublul ariei fîșiei $ABCD$, adică aria $\Sigma=2ab$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. PROGRAME LINIARE ÎN DOUĂ VARIABILE. METODE DE APROXIMARE. PROBABILITĂȚI

Programe liniare în două variabile

Problemele de tipul „Să se determine minimul sau maximul funcției $z=c_1x+c_2y$ cu restricțiile $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $a_{i1}x+a_{i2}y\geqslant b_i$, $i=1, 2, \ldots, m''$ sînt numite programe liniare în două variabile.

Situîndu-ne într-un plan xOy, trasînd dreptele $x=0$, $y=0$, $a_{i1}x+a_{i2}y=b_i$, $i=1, 2, \ldots, m$ și ținînd seama de teorema referitoare la separarea planului în regiuni de către o dreaptă, obținem „poligonul" soluțiilor posibile. Acesta este o mulțime convexă (fig. 233).

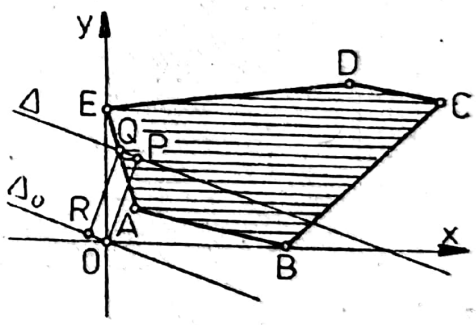


Fig. 233.

Ecuația $c_1x+c_2y-z=0$ reprezintă un fascicul de drepte paralele. Dreapta $\Delta_0: c_1x+c_2y=0$ din acest fascicul se numește *linie de reper.*

Să observăm acum că distanța d de la $O(0, 0)$ la dreapta $\Delta: c_1x+c_2y-z=0$ este $d=\frac{|z|}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$. Această relație ne arată că extremele lui z sînt proporționale cu extremele lui d. Ducînd $OP\perp\Delta$, $RQ\perp\Delta$ (fig. 233), avem $RQ=d$ și deci, dacă există, extremele lui d vor fi atinse cel puțin în vîrfuri ale poligonului atașat restricțiilor. De aceea pentru determinarea optimului lui z este suficient să determinăm vîrfurile poligonului soluțiilor posibile și apoi să comparăm valorile lui z în aceste puncte.

Observații. 1) În cazul $c_2\neq 0$, ecuația $c_1x+c_2y=z$ se poate scrie în forma $y=-\frac{c_1}{c_2}x+\frac{1}{c_2}z$ și astfel z este ordonata la origine. Cu alte cuvinte, optimul lui z se poate reduce la optimul ordonatei la origine.

2) Tehnicile de programare liniară rezolvă azi cele mai variate probleme: organizarea aprovizionării tehnico-materiale și a transporturilor, repartizarea sarcinilor de producție, întocmirea planurilor de producție și de folosire rațională a materiei prime, formarea amestecurilor optime, plasarea rațională a comenzilor etc.

224. Un atelier produce două tipuri de piese A și B. Tipul A este calitativ superior tipului B. Beneficiul net este de 2 lei pentru tipul A și de 1,5 lei pentru tipul B. Timpul de fabricație pentru tipul A este de două ori mai mare decît timpul de fabricație pentru B. Dacă toate piesele ar fi de tipul B, atelierul ar putea produce 1 000 piese pe zi. Aprovizionarea cu materiale ajunge pentru 800 piese (tipul A și B), iar capacitatea atelierului este cel mult 400 piese de tipul A și 700 piese de tipul B.

Cîte piese de tipul A și cîte de tipul B trebuie fabricate într-o zi pentru ca beneficiul total al atelierului să fie maxim?

Soluție. Fie x și y numărul de piese de tipul A respectiv B. Restricțiile sînt

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 400, \ 0 \leqslant y \leqslant 700 \\ x+y \leqslant 800 \\ 2x+y \leqslant 1\,000, \end{cases}$$

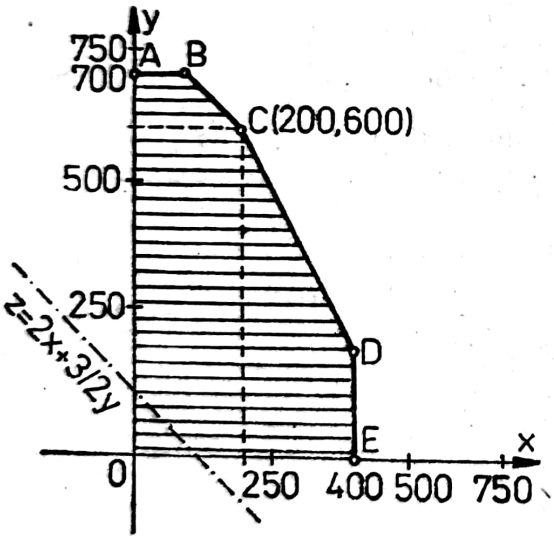


Fig. 234.

iar funcția de optimizăt este $z=2x+\frac{3}{2}y$.

Construim dreptele $x=400$, $y=700$, $x+y=800$, $2x+y=1\,000$ și astfel obținem hexagonul $OABCDE$ (fig. 234). Punctele din interiorul și de pe laturile acestui hexagon satisfac restricțiile problemei.

Ecuația $2x+\frac{3}{2}y=z$ reprezintă un fascicul de drepte paralele, avînd ordonata la origine egală cu $\frac{2}{3}z$; această lungime va fi maximă pentru dreapta care trece prin C (200, 600). Astfel $x_{max}=200$, $y_{max}=600$, $max\ z=1\,300$.

225. O uzină compusă din trei ateliere A, B, C trebuie să fabrice într-o lună 3 produse 1, 2, 3 în cantitățile x_1, x_2, x_3 respectiv. Timpul de lucru în cele trei ateliere este limitat la 2 760, 624 și 416 ore pe lună, iar fluxul tehnologic precum și randamentul pe oră sînt date prin schema următoare (fig. 235).

Cererile lunare pentru cele trei produse sînt respectiv 250, 1 250 și 1 500 (unități). O cerere nesatisfăcută nu implică penalizări. Veniturile pe unitatea de produs sînt respectiv 35, 25 și 40.

Să se găsească programul care asigură un venit total maxim.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. În problemă se impun restricţiile

(1) $\frac{x_1}{0,4}+\frac{x_2}{0,3}\leqslant 2\,760$

(2) $\frac{x_1}{12}+\frac{x_2}{12}+\frac{x_3}{10}\leqslant 624$

(3) $\frac{x_1}{30}+\frac{x_1}{15}+\frac{x_2}{15}+\frac{x_3}{12}\leqslant 416$

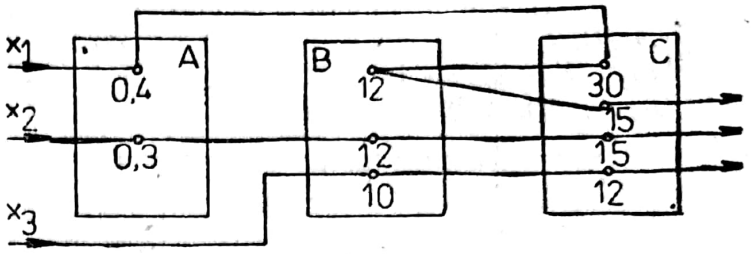


Fig. 235.

(4) $0\leqslant x_1\leqslant 250$, $0\leqslant x_2\leqslant 1\,250$, $0\leqslant x_3\leqslant 1\,500$,

iar funcţia al cărui maxim trebuie să-l găsim este dată de expresia $z=35x_1+25x_2+40x_3$.

Se observă că restricţiile (1), (4) implică restricţiile (2) şi (3). Apoi putem lua $x_3=1\,500$. De aceea problema pusă se reduce la aflarea maximului lui $f=35x_1+25x_2$ cu restricţiile:

$$\begin{cases}\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{3}\leqslant 276\\ 0\leqslant x_1\leqslant 250\\ 0\leqslant x_2\leqslant 1\,250.\end{cases}$$

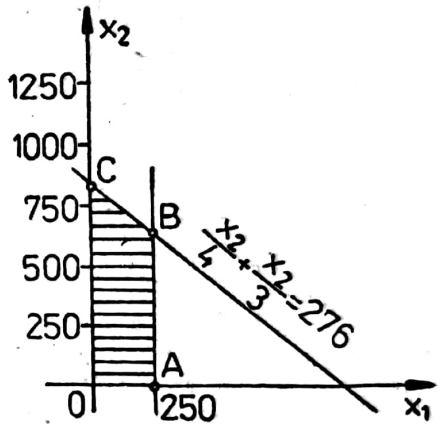


Fig. 236.

Desenînd poligonul restricţiilor găsim $A(250, 0)$, $B\left(250, \frac{1281}{2}\right)$, $C(0,828)$. De aceea $max\, f=f(B)=35\cdot 250+25\cdot\frac{1\,281}{2}=\frac{49\,525}{2}$. Rezultă $max\, z=\frac{169525}{2}$ şi această valoare este atinsă în $x_1=250$, $x_2=\frac{1\,281}{2}$, $x_3=1\,500$ (fig. 236).

226. Să se găsească maximul funcţiei $z=4(1+\lambda)x+2y$ pe mulţimea $0\leqslant x\leqslant 4$, $0\leqslant y\leqslant 6$, $3x+2y\leqslant 10$, ştiind că λ este un parametru real.

Soluţie. Se observă că punctele din interiorul şi de pe laturile triunghiului din fig. 237 satisfac restricţiile problemei. Apoi ţinem seama că pentru a rezolva un program liniar este suficient să examinăm numai vîrfurile. De aceea calculăm $z_o=0$, $z_A=\frac{40}{3}(1+\lambda)$ şi $z_B=10$. Comparînd aceste trei numere ajungem la concluzia că pentru $\lambda\leqslant -\frac{1}{4}$ avem $max\, z=z_B=10$ şi B este punctul de maxim, iar pentru $\lambda>-\frac{1}{4}$ avem $max\, z=z_A=\frac{40}{3}(1+\lambda)$ şi A este punctul de maxim.

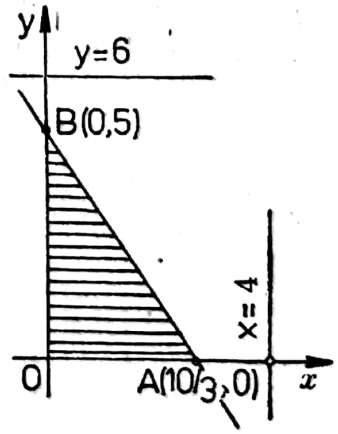


Fig. 237.

227. Un combinat este aprovizionat cu materii prime din trei centre A, B, C, necesarul fiind de 36 vagoane la un transport. Vagoanele disponibile, timpul de încărcare-descărcare al unui vagon și costul transportului se dă prin tabelul următor

Centrul de aprovizionare	Vagoane disponibile	Timp de încărcare-descărcare (ore/vagon)	Costul transportului unui vagon	Nr. de vagoane trimise de fiecare centru
A	17	7	2,5	x
B	11	5	4,5	y
C	25	8	1	z

Timpul total necesar lucrărilor de încărcare-descărcare a tuturor vagoanelor este limitat la cel mult 272 ore.

Să se determine numărul de vagoane care trebuie trimise din cele trei centre A, B, C astfel încît combinatul să primească toată materia primă de care are nevoie, iar costul total al transportului să fie minim.

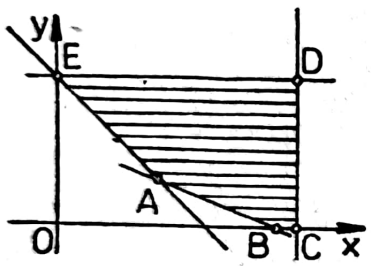


Fig. 238.

Soluție. Avem de găsit minimul funcției $f=2{,}5x+4{,}5y+z$ cu restricțiile x, y, z=numere întregi, $0\leqslant x\leqslant 17$, $0\leqslant y\leqslant 11$, $0\leqslant z\leqslant 25$, $x+y+z=36{,}7x+5y+8z\leqslant 272$. Eliminînd pe z, problema se reduce la găsirea minimului funcției $f=1{,}5x+3{,}5y+36$ cu restricțiile x, y=numere întregi, $0\leqslant x\leqslant 17$, $0\leqslant y\leqslant 11$, $11\leqslant x+y\leqslant 36$, $x+3y\geqslant 16$.

Lăsînd deoparte condiția x, y=numere întregi și desenînd poligonul atașat celorlalte restricții se observă că $A(8{,}5;\ 2{,}5)$ este punctul de minim pentru problema modificată (fig. 238). De aceea vom analiza cazurile $x=9$, $y=2$; $x=8$, $y=3$.

Dacă alegem $x=9$, $y=2$, atunci $f=56{,}5$ și timpul de încărcare-descărcare este 273 ore; dacă alegem $x=8$, $y=3$, atunci $f=58{,}5$ și timpul de încărcare-descărcare este 271 ore.

Cercetînd și celelalte puncte (x, y) din poligonul $ABCDE$ pentru care x, y=întregi, rezultă că soluția optimă pentru problema noastră, este $x=8$, $y=3$, $\min f=58{,}5$.

228. O fabrică și-a prevăzut în planul de producție două tipuri de aparate.

Materia primă existentă și capacitatea de producție permit realizarea într-o zi a cel puțin 80 respectiv 60 de aparate. Capacitatea de montaj este de cel mult 100 de aparate pe zi din ambele tipuri.

Se știe că planul prevede cel puțin 40 bucăți/zi, respectiv 20 bucăți/zi, iar un aparat costă 2 000 lei respectiv 4 000 lei. Să se găsească planul de producție care se realizează cu minimum de cheltuieli.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie Notînd cu x şi y numărul de aparate sîntem conduşi la următoarele restricţii

$$\begin{cases} \frac{x}{80}+\frac{y}{50}\geqslant 1 \\ x+y\leqslant 100 \\ x\geqslant 40 \\ y\geqslant 20 \\ x,\ y=\text{numere întregi.} \end{cases}$$

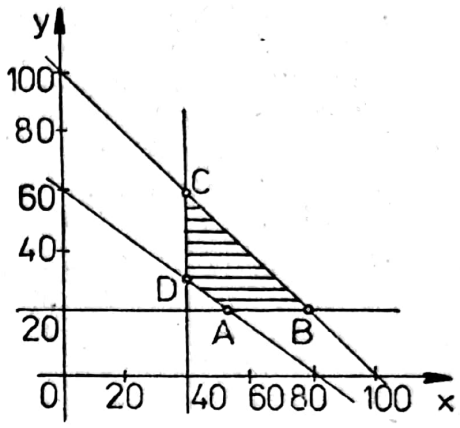


Fig. 239.

Funcţia obiectiv reprezintă cheltuielile, adică $f(x, y)=2\,000x+4\,000y$. Lăsînd deoparte condiţia $x, y=$întregi, patrulaterul restricţiilor $ABCD$ are vîrfurile $A\left(\frac{160}{3},\ 20\right)$, $B(80, 20)$, $C(40, 60)$, $D(40, 30)$. Găsim $f(A)=\frac{560\,000}{3}$, $f(B)=240\,000$, $f(C)=320\,000$, $f(D)=200\,000$, adică $A\left(\frac{160}{3},\ 20\right)$ este punctul de minim pentru problema modificată (fig. 239).

Se impune să cercetăm punctul $M_0(54, 20)$. Se constată că $f(M_0)\leqslant f(x, y)$, $\forall(x, y)$ din patrulaterul $ABCD$, $x, y=$întregi. De aceea $x=54$, $y=20$ şi $\min f(x, y)=188\,000$ este soluţia problemei.

286. Pe mulţimea tripletelor (x, y, z) de numere reale care satisfac relaţiile $|x-2y+z|\leqslant 2$, $|y|\leqslant 3$, $xz\geqslant 0$, să se determine valoarea maximă a polinomului $P(x, y, z)=\frac{x}{2}+y-z$.

(Concurs, R. P. Ungară, 1972)

Soluţie. Se observă că relaţia $xz\geqslant 0$ este echivalentă cu ($x\geqslant 0$ şi $z\geqslant 0$) sau ($x\leqslant 0$ şi $z\leqslant 0$). De aceea problema se reduce la un program liniar în trei variabile. Avînd însă în vedere că pentru a rezolva un program liniar este suficient să examinăm numai vîrfurile poligonului restricţiilor şi adăugînd la aceasta că avem o problemă de maxim, rezultă că putem lua de la început $y=3$.

Fie $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $y=3$. Avem de găsit maximul lui $P(x, 3, z)=\frac{x}{2}+3-z$ cu restricţia $-2\leqslant x-6+z\leqslant 2$, adică $4\leqslant x+z\leqslant 8$.

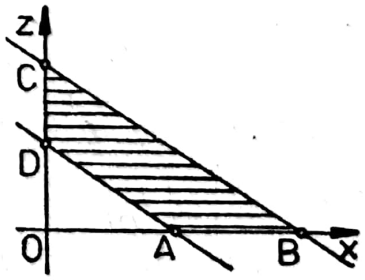


Fig. 240.

Deoarece (fig. 240) vîrfurile poligonului restricţiilor sînt $A(4, 0)$, $B(8, 0)$, $C(0, 8)$, $D(0, 4)$, rezultă $\max_{x, z} P(x, 3, z)=7$ şi această valoare este atinsă în punctul $B(8, 0)$.

Se observă că restricțiile $x \leqslant 0$, $z \leqslant 0$, $y=3$ sînt incompatibile cu restricțiile $4 \leqslant x+z \leqslant 8$. De aceea soluția problemei este $x=8$, $y=3$, $z=0$ și $max\ P(x, y, z)=P(8, 3, 0)=7$.

x,y,z,

229. Rația furajeră a unui animal înglobează cantitățile din tabelul următor

Furajul / Principiul nutritiv	F_1(kg)	F_2(kg)	Cantitatea minmă necesară
P_1	0,3	0,3	3,6
P_2	0,5	0,3	4,5
P_3	—	0,2	0,6
P_4	0,1	—	0,4
Costul (lei/kg)	1	2	—

Ce cantități din furajele F_1, F_2 trebuie să utilizăm pentru a obține o compoziție de cost minim.

Soluție. Notînd cu x, y cantitățile din F_1, F_2 respectiv, sîntem conduși la programul „să se determine minimul lui $c=x+2y$ cu restricțiile

$$\begin{cases} 0,3x+0,3y \geqslant 3,6 \\ 0,5x+0,3y \geqslant 4,5 \\ 0,2y \geqslant 0,6 \\ 0,1x \geqslant 0,4''. \end{cases}$$

Deoarece vîrfurile poligonului restricțiilor au coordonatele (4,5; 7,5), (7,2; 3.) (9,3) rezultă că soluția problemei este: $x=7,2$ kg, $y=3$ kg, costul minim fiind 20,4 lei.

230. Pe un teren de 40 ha trebuie să se realizeze două culturi, de exemplu in și cînepă. Fondul disponibil este de 60 mii lei, iar investițiile și venitul net la ha sînt date în tabel

	in	cînepă
Investiții (mii)	2	1
Venit net (mii)	7	3

Cum trebuie repartizat terenul pe cele două culturi pentru a avea un venit net maxim?

Soluție. Fie x și y suprafețele de teren cultivate cu in și cînepă. Găsim programul liniar „să se afle maximul lui $f=7x+3y$ cu restricțiile $x+y=40$, $2x+y \leqslant 60$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0''$. Rezultă soluția $x=20$, $y=20$, $max\ f=200$.

231. *Observație.* Programele liniare presupun o funcție liniară de scop supusă unor restricții care determină o mulțime convexă poliedrală. În exemplul care urmează restricțiile determină o mulțime convexă, dar care nu este

poliedrală; în acest caz mulțimea vîrfurilor își pierde sensul, iar procedeele de determinare a extremului se schimbă.

Exercițiu. Să se determine valorile extreme ale funcției $(x, y)\to f(x, y)=x+y$ pe mulțimea $A=\{(x, y)|\ x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Soluție. Funcția f nu are extreme în nici un punct din int A, deoarece este o funcție liniară. Rămîne să cercetăm extremele lui f pe cercul $x^2+y^2=1$. Semicercul superior se determină prin $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1, 1]$ și deci se obține $\varphi(x)=f(x, \sqrt{1-x^2})=x+\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1, 1]$. Deoarece $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ este punctul de maxim pentru funcția φ rezultă că $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ este punctul de maxim pentru f și $max\ f=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$. Analog se găsește că $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ este punctul de minim și $min\ f=f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}$.

Geometric: se observă că extremele lui f sînt proporționale cu extremele distanței de la origine la dreapta de ecuație $x+y-f=0$; evident aceste extreme vor fi atinse pentru dreptele din fasciculul $x+y-f=0$ care sînt tangente la cercul $x^2+y^2=1$.

Metode de aproximare

232. Vom menționa unele procedee iterative de aproximare a rădăcinii unei ecuații.

Se consideră $I=[a, b]$, $a, b\in R$ și ecuația $f(x)=0$, $f: I\to R$, care are pe o vecinătate $V_\alpha\subset I$ rădăcina simplă $x=\alpha$.

(i) Dacă relația de recurență $x_n=\varphi_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ determină aproximările $(x_n)_{n\in N}$ ale lui α, $x_n\xrightarrow[n]{}\alpha$, atunci $(x_n)_{n\in N}$ este șir de iterare, convergent către rădăcina $x=\alpha$. Convergența șirului de iterare depinde, printre altele, de funcția de iterare φ_n și de aproximarea inițială x_0; dacă $\varphi_n=\varphi$, $\forall n\in N$, formula este de tip staționar.

Exemplu. Presupunem $f: [a, b]\to R$, continuă pe $[a, b]$ cu derivate f', f'' de semn constant pe (a, b) și $f(a)\cdot f(b)<0$; atunci ecuația $f(x)=0$ admite o rădăcină simplă pe (a, b).

Ca metode de determinare a rădăcinii (cuprinse în programa de liceu) redăm metoda coardei și metoda tangentei.

(ii) **Metoda coardei.** Dacă $f'(x)\ f''(x)>0$ pe (a, b) și $x_0=a$, atunci funcția de iterare poate fi considerată de forma

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)(b-x)}{f(b)-f(x)};$$

șirul de iterare, convergent către rădăcina $x=\alpha\in(a, b)$ a ecuației $f(x)=0$, este

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})(b-x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})},\quad n\in N.$$

Pentru acest șir de iterare $\alpha\in(x_n, b)$, $\forall n\in N$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $f'(x)\,f''(x)<0$ pe (a, b) și $x_0=a$, atunci se poate lua $\varphi(x)=a-\frac{f(a)(x-a)}{f(x)-f(a)}$, iar șirul de iterare convergent la α este $x_n=a-\frac{f(a)(x_{n-1}-a)}{f(x_{n-1})-f(a)}$, $n\in N$; în acest caz se satisface $\alpha\in(a, x_n)$, $n\in N$.

(iii) **Metoda tangentei (Newton).** Pentru această metodă funcția de iterare este $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, iar șirul de iterare, convergent către α, are forma $x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, $n\in N$; pentru cazul $f'(x)\cdot f''(x)>0$ pe (a, b) se ia $x_0=b$ (se satisface $f(b)\cdot f''(x)>0$, $x\in(a, b)$) și $\alpha\in(a, x_n)$, iar pentru $f'(x)\cdot f''(x)<0$ pe (a, b) se ia $x_0=a$ (se satisface condiția $f(a)\cdot f''(x)>0$, $x\in(a, b)$) și $\alpha\in(x_n, b)$. Observăm că în oricare din variante, soluția $x=\alpha$ se situează între aproximările determinate prin cele două metode, a coardei și a tangentei (una prin lipsă, cealaltă prin adaos).

Ambele metode sînt staționare, deoarece funcția de iterare nu depinde de n.

Rezolvarea ecuațiilor prin procedee iterative, presupune:

— determinarea funcției de iterare φ, care definește șirul de iterare,

— stabilirea convergenței șirului de iterare către soluția ecuației,

— determinarea unei formule de evaluare a erorii aproximării (în funcție de rangul n al aproximării).

Din cele prezentate rezultă că ecuația $f(x)=0$ se înlocuiește prin ecuația $x=\varphi(x)$, echivalentă cu prima, în sensul ca $\alpha=\varphi(\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)=0$. Mai observăm că fiecare metodă iterativă se caracterizează printr-o anumită formă a funcției φ.

Pentru stabilirea convergenței vom face cîteva observații.

(iv) Fie $I=[a, b]\subset R$ și $\varphi: I\to I$; φ este o contracție (din I în I), dacă

$$(\forall x\in I)\to\varphi(x)\in I \text{ și}$$

$(\exists\lambda\in(0, 1))$ încît $(\forall x, x'\in I)\to|\varphi(x)-\varphi(x')|\leqslant\lambda|x-x'|$.

(v) Dacă $I\subset R$ este mulțime compactă (mărginită și închisă) și $\varphi: I\to I$ este o contracție, atunci

există $x\in I$, unic, încît $\varphi(x)=x$,

$x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde $x_n=\varphi(x_{n-1})$, $n\in N$ iar $x_0\in I$, arbitrar.

Demonstrația se face, arătînd că $(x_n)_{n\in N}$ este șir Cauchy, deci convergent către un element din I.

Unicitatea soluției ecuației $x=\varphi(x)$ pe I se demonstrează prin metoda reducerii la absurd.

(vi) Dacă $I=\{x\mid |x-x_0|\leqslant r\}\subset R$, încît $(\forall x', x''\in I)\to|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant\lambda|x'-x''|$, $\lambda\in(0, 1)$ și $|x_0-\varphi(x_0)|\leqslant(1-\lambda)r$, atunci ecuația $x=\varphi(x)$ are pe I soluție unică $x=\alpha$, unde $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, iar $x_n=\varphi(x_{n-1})$, $n\in N$; viteza de convergență către soluția α este caracterizată prin $|x_n-\alpha|\leqslant\lambda^n|x_0-\alpha|$, $x_0\in I$.

Scanned with OKEN Scanner

Observații

(1) Condiția din (vi) este ca φ să fie liphschitziană, iar convergența este certă, dacă există φ' pe I și $|\varphi'(x)| \leqslant \lambda < 1$, pe I.

(2) Proprietățile prezentate sînt particularizări ale teoriei de pe un spațiu metric complet.

(vii) Un șir de iterare $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \in N$ determină o formulă de iterare de ordinul m, dacă φ admite derivate pe I pînă la ordinul m și

$$\alpha = \varphi(\alpha),\ \varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(\alpha) = 0,\ \varphi^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Menționăm proprietatea care justifică interesul pentru formula de iterare de ordin superior: dacă $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \in N$ este o iterare de ordinul m, atunci viteza de convergență a șirului $(x_n)_{n \in N}$ către soluția α este caracterizată de relația

$$|x_n - \alpha| \leqslant \omega^{\frac{m^n - 1}{m-1}},\ \omega < 1.$$

Demonstrația se face ținînd seamă de dezvoltarea Taylor a funcției φ după $(x-\alpha)$. Condiția $\omega < 1$ se asigură prin alegerea aproximării inițiale $x_0 \in I$.

Observație. Metoda Newton (a tangentei) este o formulă de iterare de ordinul doi. Într-adevăr, deoarece $f(\alpha) = 0$, rezultă

$\varphi(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$; $\varphi'(x) = 1 - 1 + \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'^2(x)}$ și deci $\varphi'(\alpha) = 0$. Deoarece $\varphi''(x) = \frac{f'^2 f'' + f f' f'' - 2 f f''^2}{f'^3}(x)$, în general $\varphi''(\alpha) \neq 0$.

Exemple. 1°. Să se determine un algoritm de calcul bazat pe o metodă de iterare de ordinul I pentru aflarea rădăcinii reale $x = \alpha$, $\alpha \in (9, 10)$, a ecuației $x^3 + x - 1\,000 = 0$ cu o eroare absolută $|\Delta_\alpha| < 10^{-4}$; se va restrînge în prealabil intervalul rădăcinii la 10^{-1}. Să se scrie o organigramă corespunzătoare algoritmului.

Soluție. Se determină o ecuație echivalentă celei date, sub forma $x = \varphi(x)$ care să satisfacă condiția suficientă de convergență $|\varphi'(x)| < 1$ pentru $x \in V_\alpha$) $x = \sqrt[3]{1\,000 - x}$, $\varphi'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1\,000-x)^2}}$ cu $|\varphi'(x)| < 1$, pentru $x \in (9, 10)$.

Șirul $x_k = \sqrt[3]{1\,000 - x_{k-1}}$ este convergent către rădăcina $x = \alpha$.

Interpretînd geometric, $x = \alpha$, este abscisa punctului de intersecție a curbei $y = \varphi(x)$ cu dreapta $y = x$. Deoarece $-1 < \varphi'(x) < 0$ pe intervalul $(9,10)$, funcția $\varphi(x)$ este descrescătoare, iar șirul (x_k) alternează față de $x = \alpha$ (fig. 241).

În acest caz eroarea absolută satisface

$$|\Delta_\alpha| = |x_{k+1} - \alpha| \leqslant |x_{k+1} - x_k|.$$

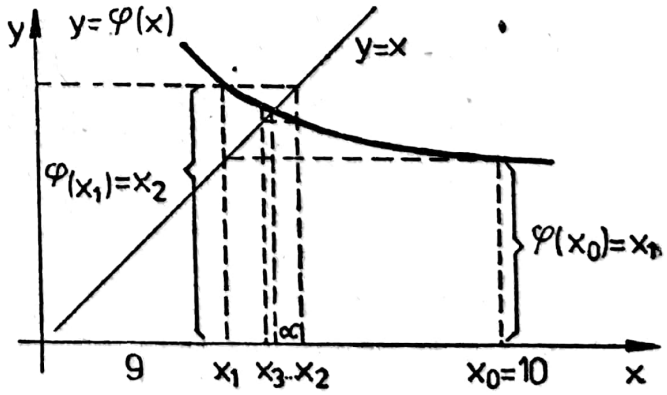


Fig. 241.

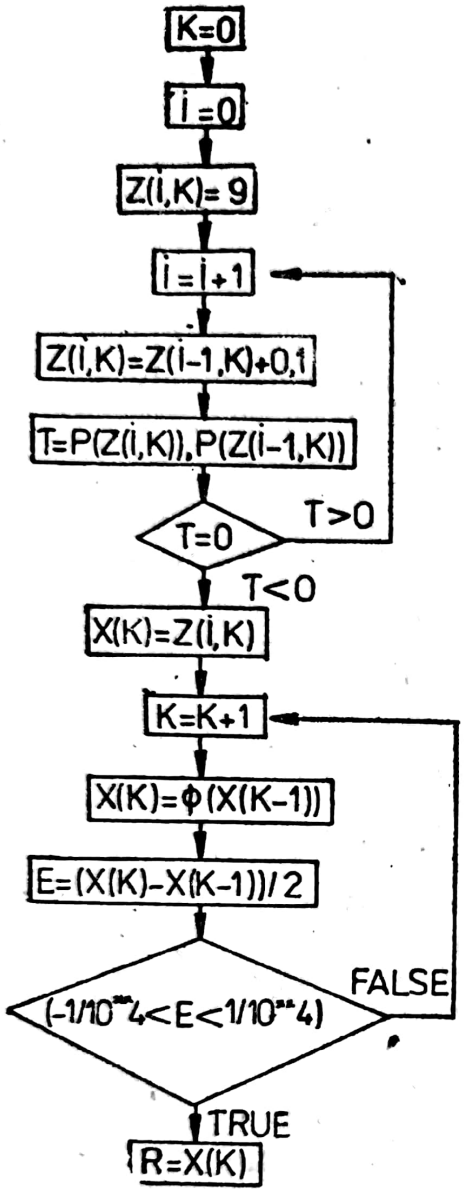


Fig. 241. *a*.

Organigrama (graful algoritmului de calcul) este redată în figura 241 *a*.

Observații. a) Deoarece $x=\alpha$ este irațională, valoarea $T=0$ este imposibilă. b) Nu este necesară compararea parametrului I cu valoarea sa maximă n, deoarece se știe că pe intervalul (9, 10) există în mod sigur o rădăcină unică $x=\alpha$.

După organigramă poate fi făcută transcrierea în limbaj de programare.

2°. Se consideră

$$x \to f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Să se determine abscisa punctului de pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă la dreapta $x+y=0$. Să se aproximeze prin metoda coardei și metoda tangentei, în prealabil restrîngîndu-se intervalul.

Soluție. Domeniul de definiție este determinat de condițiile $\frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$, $-1 \leqslant \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \leqslant 1$; rezultă $x \in (-\infty, -1]$. Se calculează $f'(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{-2(x+1)}}$ și condiția $f'(x) = -1$ conduce la ecuația $2x^3-2x^2-2x+3=0$. Pentru funcția $g(x)=2x^3-2x^2-2x+3$ se folosește șirul lui Rolle; $g'(x)=6x^2-4x-2$ se anulează pentru $x=-\frac{1}{3}$ $x=1$;

x	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{1}{3}$	1	∞
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

Restrîngînd intervalul, rezultă că rădăcina $x_1 \in (-2, -1)$. Observăm că $g(-1)=+1$, $g(-2)=-17$, $g(-1)\cdot g(-2)<0$, $g'(x)>0$ și $g''(x)<0$ pentru $x \in (-2, -1)$. Deci aproximarea prin metoda coardei este prin adaos, iar aproximarea prin metoda tangentei este prin lipsă. Se ia $x_0=-1$ și $x_n = x_{n-1} - \frac{g(x_{n-1})(x_{n-1}-a)}{g(x_{n-1})-g(a)}$; rezultă $x_1=-\frac{17}{16} \approx -1{,}06$. Se ia $x_0^*=-2$ și $x_n^* = x_{n-1}^* - \frac{g(x_{n-1}^*)}{g'(x_{n-1}^*)}$; rezultă $x_1=-\frac{43}{30} \approx -1{,}43$. Deci $\alpha \in (-1{,}43;\ -1{,}06)$, $g(\alpha)=0$; din studiul funcției f, rezultă că graficul admite o tangentă paralelă cu dreapta $x+y=0$ pentru o singură valoare, $x=\alpha$, pe $(-\infty, -1)$.

Scanned with OKEN Scanner

233. Se consideră polinomul cu valorile $P_n(x)=x^n-nx+1$, $n>2$. 1) (*Matematica, Sofia*). Să se arate că ecuația $P_n(x)=0$ are două rădăcini pozitive α_n, β_n care satisfac $0<\alpha_n<1<\beta_n$.

2) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$; să se aproximeze α_5 prin lipsă și prin adaos și să se evalueze eroarea absolută. (Se va lua cîte un termen în șirul aproximărilor.).

Soluție. 1) Deoarece $P_n'(x)=n(x^{n-1}-1)$ se consideră cazurile: $n=2k$, deci $x^{2k-1}-1=0$ admite numai $x=1$ — rădăcină reală și din șirul lui Rolle

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$P_n(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

rezultă că P_n are două rădăcini reale, $0<\alpha_n<1<\beta_n$;

$n=2k+1$, deci $x^{2k}-1=0$ admite două rădăcini reale, $x=\pm1$ și din șirul lui Rolle

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$P_n(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

rezultă că P_n are trei rădăcini reale, dintre care două sînt pozitive, $0<\alpha_n<1<\beta_n$.

2) Deoarece $P_n(0)>0$, iar $P_n\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{2}{n}\right)^n-1<0$, $n>2$, rezultă că $0<\alpha_n<\frac{2}{n}$ și deci pentru $n\to\infty$ se obține $\alpha_n\to0$.

$P_5(x)=x^5-5x+1$ și $P_5(0)=1$, $P_5(1)=-3$; $P_5'(x)=5(x^4-1)$, $P_5''(x)=20x^3$ și $P_5'(x)<0$, $P_5''(x)>0$ pentru $x\in(0,1)$, de unde rezultă că metoda coardei dă aproximarea lui α_5 prin adaos, iar metoda tangentei prin lipsă. Șirul $u_n=u_{n-1}-\frac{P_5(u_{n-1})}{P_5'(u_{n-1})}$, $u_0=0$ dă aproximările prin lipsă, iar șirul $v_n=v_{n-1}-\frac{P_5(v_{n-1})\cdot v_{n-1}}{P_5(v_{n-1})-P_5(0)}$, $v_0=1$ dă aproximările prin adaos. Deoarece $u_n<\alpha_5<v_n$, $n\in N$, se obțin relațiile care permit evaluarea erorii absolute: $\alpha_5-u_n<v_n-u_n$, respectiv $v_n-\alpha_5<v_n-u_n$, $n\in N$. Prin calcul rezultă $u_1=0{,}2$, respectiv $v_1=0{,}25$.

234. Se dă polinomul cu valorile $P(x)=x^3-0{,}2\,x^2-0{,}2\,x-1{,}2$.

1) Să se determine o aproximare a rădăcinii reale x_1 prin metoda coardei și să se evalueze eroarea absolută.

2) Să se arate că rădăcinile ecuației $P(x)=0$ satisfac relația

$$\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}+\frac{1}{|x_3|}\geqslant\frac{1}{6}.$$

3) Să se reprezinte segmentul dintr-o coroană circulară în $R^2\equiv C$, unde sînt cuprinse imaginile rădăcinilor x_2 și x_3 ale ecuației.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. 1) Se restrînge intervalul pe care se află x_1, folosind şirul lui Rolle: $P'(x)=3x^2-0{,}4x-0{,}2$ cu rădăcinile $x_1'=-0{,}2$, $x_2'=\frac{1}{3}$;

x	$-\infty$	$-0{,}2$	$0{,}33$	1	2	∞
$P(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

. A rezultat $x_1\in(1,\ 2)$.

Deoarece $P'(x)>0$, $P''(x)>0$ pentru $x\in(1,\ 2)$, se poate lua şirul de iterare

$$t_n=t_{n-1}-\frac{P(t_{n-1})(b-t_{n-1})}{P(b)-P(t_{n-1})},\quad t_0=1.$$ convergent către x_1;

rădăcina $x_1\in(t_n,\ b)$, $\forall n\in N$.
Pentru evaluarea erorii absolute se utilizează formula Lagrange:

$$|P(t_n)-P(x_1)|=|P'(\zeta_n)|\ |t_n-x_1|,\quad \zeta_n\in(t_n,\ x_1)$$ şi

$$|t_n-x_1|\leqslant\frac{|P(t_n)|}{\inf|P'(x)|}=\frac{|P(t_n)|}{|P'(t_n)|}.$$ Rezultă

$t_1=1-\frac{P(1)(2-1)}{P(2)-P(1)}\approx 1{,}1$, iar $|t_1-x_1|\leqslant\frac{|P(t_1)|}{|P'(t_1)|}$, adică $|t_1-x_1|<0{,}15$.

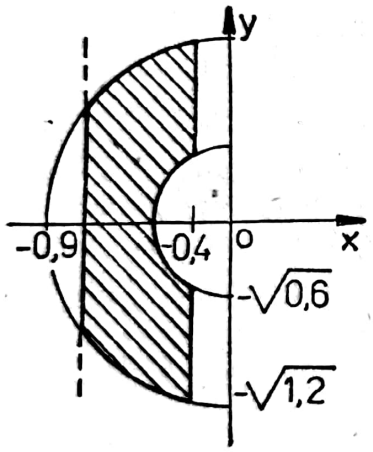


Fig. 242.

2) Observăm că $x_1+x_2+x_3=0{,}2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-0{,}2$, $x_1x_2x_3=1{,}2$.
Se verifică

$$\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}+\frac{1}{|x_3|}=\frac{|x_2x_3|+|x_1x_3|+|x_1x_2|}{|x_1x_2x_3|}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{|x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3|}{|x_1x_2x_3|}=\frac{1}{6};$$

3) Dacă $x_2=\alpha+i\beta$, $x_3=\alpha-i\beta$, rezultă $\alpha=\frac{0{,}2-x_1}{2}$ $\in(-0{,}9;\ -0{,}4)$; deoarece $x_1r^2=1{,}2$, se obţine $r^2\in(0{,}6;\ 1{,}2)$, sau $r\in(\sqrt{0{,}6},\ \sqrt{1{,}2})$, unde $|x_2|=|x_3|=r$. Rădăcinile x_2, x_3 sînt situate simetric faţă de Ox, în interiorul domeniului haşurat (fig. 242).

235. Să se cerceteze natura şirului $x_{n+1}=\frac{x_n^2-x_n+2}{x_n^2+1}$, $x_0=\frac{1}{2}$.

Soluţie. Considerînd $x\to\varphi(x)=\frac{x^2-x+2}{x^2+1}$, observăm că există un interval I, $x_0\in I$, pe care $\varphi'(x)=\frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$ este crescătoare; fie $I=(0,\ 2)$.

Pe acest interval φ' este mărginită: $|\varphi'(x)|<\frac{1}{25}<1$, $x\in I$. În concluzie, aplicaţia $\varphi: I\to I$ este o contracţie, iar şirul $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ este convergent, limita sa $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ fiind soluţie a ecuaţiei $x=\varphi(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația $x=\varphi(x)$, sau $x^3-x^2+2x-2=0$ are soluția $x=1\in(0,\ 2)$; celelalte rădăcini ale ecuației $x=\varphi(x)$ sînt complexe. A rezultat că $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

236. Formule de cvadratură

Se consideră $f:[a,\ b]\to R$; f este integrabilă Riemann pe $[a,\ b]$, dacă $(\forall(d_n)_{n\in N}\subset\mathscr{D})\wedge(\forall\zeta_i\in[x_i,\ x_{i+1}],\ i\in\overline{0,\ n-1})\wedge(\nu(d_n)\to 0)\Rightarrow(\sigma_{d_n}\to I)$.

$\mathscr{D}$ este mulțimea diviziunilor intervalului $[a,\ b]$, $\nu(d_n)=\max\limits_{i\in\overline{0,n-1}}(x_{i+1}-x_i)$ este norma diviziunii d_n.

$\sigma_{dn}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\zeta_i)(x_{i+1}-x_i)$ este sumă Riemann (sumă integrală), I este integrala Riemann a funcției f pe $[a,\ b]$, $I=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(i) Din criteriul de integrabilitate rezultă că elementele șirului generalizat $(\sigma_{d_n})_{d_n}\subset\mathscr{D}$ pot servi ca aproximări pentru I:

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,\ b]\to R,\\ \exists I=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \text{în sens Riemann}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)\wedge(\forall d_n\in\mathscr{D})\wedge\\ \wedge(\nu(d_n)<\delta(\varepsilon))\wedge(\forall\zeta_i\in[x_i,\ x_{i+1}],\\ i\in\overline{0,\ n-1})\Rightarrow|\sigma_{d_n}-I|<\varepsilon.\end{array}\right.$$

Deci $I\approx\sigma_{dn}$, iar eroarea absolută este caracterizată de relația $|\sigma_{dn}-I|<\varepsilon$. Ca exemple de formule de cvadratură vom considera metodele: dreptunghiurilor, trapezelor, Simpson, deoarece permit ilustrarea ideilor de bază specifice cvadraturilor, deși viteza lor de convergență este slabă.

(ii) **Metoda dreptunghiurilor.** Se consideră o diviziune uniformă $d_n=\{x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n=b\}$, $x_{i+1}-x_i=\dfrac{b-a}{n}$, $i\in\overline{0,\ n-1}$ și se definește o funcție în scară, $g(x)=f(x_i)$, $x\in[x_i,\ x_{i+1})$; observăm că $g:[a,\ b]\to R$ și $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(x_i)(x_{i+1}-x_i)=\sigma_n$. În concluzie, se poate aproxima $I=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ prin $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x=\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(x_i)$. A rezultat formula de cvadratură cunoscută ca „metoda dreptunghiurilor“:

$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(x_i)$. Denumirea metodei se justifică prin faptul că integrala Riemann este aproximată prin suma ariilor dreptunghiurilor, de forma $A_i=f(x_i)\cdot\dfrac{b-a}{n}$;

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Dacă $f:[a,\ b]\to R$, $(\exists f'(x),\ x\in[a,\ b]$; în $x=a,\ b$ — derivate laterale) $\wedge((\exists M>0)\Rightarrow(|f'(x)|\leqslant M,\ \forall x\in[a,\ b]))$, atunci eroarea absolută se poate evalua prin

$$\left|I-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{n}\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

Observația rezultă din calcul direct:

$$\left|I-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f(x)-f(x_i))\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x)-f(x_i)|=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\sup_{x,\,c_i\in[x_i,\,x_{i+1}]}|f'(c_i)(x-x_i)|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2\cdot\sup_{x\in[a,\,b]}|f'(x)|=\frac{(b-a)^2}{n}\cdot\|f'\|.$$

(iii) Dacă se consideră aproximarea funcției f pe $[a,\ b]$ printr-o funcție în scară $g(x)=\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$, $x\in[x_i,\ x_{i+1})$, $i\in\overline{0,\ n-1}$ pentru diviziunea uniformă d_n, rezultă „metoda trapezelor“:

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2n}\left(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right),$$

În ipoteza că f admite derivată f'', mărginită pe $[a,\ b]$, rezultă formula de evaluare a erorii

$$|I-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup_{v\in]a,\,b]}|f''(x)|.$$

(iv) **Metoda Simpson** (metoda parabolelor) aproximează funcția f prin polinoame de gradul doi (parabole), pe porțiuni.

Pentru diviziunea uniformă d_n a intervalului $[a,\ b]$, pe fiecare subinterval $[x_i,\ x_{i+1}]$, în afara valorilor $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ se mai consideră $f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$ și se aproximează f pe $[x_i,\ x_{i+1}]$ printr-o parabolă de ecuație $y=P(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma$, care trece prin punctele $(x_i,\ f(x_i)),\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},\ f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right),\ (x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$. Din ultima remarcă rezultă ecuațiile care permit determinarea coeficienților $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ pe fiecare subinterval: $P(x_i)=f(x_i),\ P\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)=f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$, $P(x_{i+1})=f(x_{i+1})$, $i\in\overline{0,\ n-1}$. Rezultă deci $\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6n}(f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+$

$+f(x_{i+1}))$,

și

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6n}\left(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

În ipoteza că există $f^{(IV)}$ și este mărginită pe $[a, b]$ se poate face evaluarea erorii absolute prin:

$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2\,880n^4} \cdot \sup_{x\in[a,\,b]} |f^{(IV)}(x)|$, unde s-a notat prin S_n — suma care aproximează integrala.

Precizare. Formulele de evaluare a erorii, prezentate mai sus, presupun cunoașterea derivatelor de ordin superior; aceste restricții sînt însă prea tari, fiind cunoscut faptul că o funcție integrabilă poate să nu fie derivabilă. De aceea în aplicații se folosesc de obicei procedee de cuadratură de tip interpolativ și formule pentru evaluarea erorii adecvate lor. Totuși, metodele dreptunghiurilor, trapezelor și Simpson sînt intersante prin valoarea lor metodologică și constituie aplicații directe la noțiunea de integrală Riemann.

Exemplu (Rulat pe calculator de către *I. Măxineanu*)
Să se calculeze integralele

1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ — prin metodele dreptunghiurilor, trapezelor și Simpson,

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$ — prin metodele dreptunghiurilor și trapezelor,

3) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ — prin metodele trapezelor și Simpson

și să se specifice eroarea absolută pentru aproximarea fiecărei integrale.

Soluție. Se folosesc metodele de aproximare a integralelor și formulele de evaluare a erorii absolute, prezentate mai sus și se obține:

1) $I_1 = \int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}74682784$ — prin metoda dreptunghiurilor (fig. 243),

$I_1 \approx 0{,}74682050$ — prin metoda trapezelor (fig. 244), $I_1 \approx 0{,}74682414$ — prin metoda Simpson (fig. 245);

2) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx \approx 1{,}35064258$ — prin metoda dreptunghiurilor (fig. 243), $I_2 \approx 1{,}35063941$ — prin metoda trapezelor (fig. 244);

3) $I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}7853957$ — prin metoda trapezelor (fig. 244), $I_3 \approx$ $\approx 0{,}78539816$ — prin metoda Simpson (fig. 245).

Scanned with OKEN Scanner

Comparînd rezultatele obținute, se pot accepta aproximările $I_1 \approx 0{,}74682$, $I_2 \approx 1{,}3506$, $I_3 \approx 0{,}78539$, toate cifrele fiind exacte. Eroarea absolută satisface $E_1 < 10^{-3}$, $E_2 < 10^{-5}$, $E_3 < 10^{-3}$. Eroarea aproximării printr-o anumită metodă se compune din eroarea specifică metodei și din eroarea de calcul (de rotunjire).

```
C   PROGRAM DE CALCUL. VALOAREA INTEGRALEI CU AJUTORUL
C   FORMULEI DREPTUNGHIURILOR
C      A,B =CAPETELE INTERVALULUI
C      H =PASUL PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL I
C      EPSI =EROAREA DORITA

        READ (105,1) A,B,H,EPSI
      1 FORMAT (4F105)
        WRITE (108,2) A,B,H,EPSI
      2 FORMAT (1H1, 25H CAPETELE INTERVALULUI A=,F10.5,3H  B=,F10.5/48H PASU
       *L PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL I, H=,F10.5/24H ERAOREA IMPU
       *SA,EPSILON=,F10.8)

C   CALCULUL MAXIMULUI DERIVATEI DE ORDINUL I, NOTAT = FP1M

        FP1M=0.
        X1=A
     10 CALL FUNCTIE(X1,F1)
        X2=X1+H
        IF(X2.GT.B) GO TO 30
        X1=X2
        CALL FUNCTIE (X2,F2)
        FP1=ABS(F1—F2)/H
        IF(FP1.GE.EP1M) GO TO 20
        FP1M=FP1M
        GO TO 10
     20 FP1M=FP1
        GO TO 10
     30 WRITE(108,3) FP1M
      3 FORMAT (1H0,43H VALOAREA MAXIMA A DERIVATEI PE    (A,B)  FP1M=,F10.5)

C   CALCULAREA NR. DE NODURI (PUNCTE) NECESARE APROXIMARII INTEGRALEI

        UC=FP1M*(B—A)*(B—A)/EPSI
        NR=UC+1

C   CALCULUL VALORII INTERGRALEI = VAL
C   H1 NOUL PAS PT. CALCULUL VALORILOR FUNCTIEI
        H1=(B—A)/NR
        S=0.
        X=A
        CALL FUNCȚIE (X,FX)
        S=S+FX
        N1=NR—1
        DO 40 K=1, N1
        X=X+H1
        CALL FUNCTIE (X,FX)
        S=S+FX
     40 CONTINUE
        VAL=H1*S
     WRITE(108,4) NR,H1,VAL
   4 FORMAT(1H0,24H  NR=NUMARUL DE NODURI =,I6/14H  NOUL PAS H1=  ,F10.8/
    *25H VALOAREA INTEGRALEI VAL=,F12.8)
     STOP
     END
        SUBROUTINE FUNCTIE(X,FX)
```


Scanned with OKEN Scanner

```
C   FUNCTIA F(X)=EXP(-X*X)
      FX=EXP(-X*X)
      RETURN
      END
      CAPETELE INTERVALULUI A=  0.00000 B=  1.00000
      PASUL PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL I, H=  0.00100
      EROAREA IMPUSĂ, EPSILON=0.00001000

      VALOAREA MAXIMĂ A DERIVATEI PE (A, B) FP1M=  0.85776

      NR==NUMĂRUL DE NODURI = 85777
      NOUL PAS H1= 0.00001166
      VALOAREA INTEGRALEI VAL=  0.74682784
      SUBROUTINE FUNCTIE(X,FX)

C   FUNCTIA F(X)=SQRT(1-SIN(X)*SIN(X)/2)
      FX=SQRT(1-SIN(X)*SIN(X)/2)
      RETURN
      END
      CAPETELE INTERVALULUI A=  0.00000 B=  1.57079
      PASUL PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL I, H=  0.001000
      EROAREA IMPUSĂ, EPSILON=0.00001000
      VALOAREA MAXIMĂ A DERIVATEI PE (A, B) FP1M=  0.29289
      NR=NUMĂRUL DE NODURI = 72268
      NOUL PAS H1=  0.00002174
      VALOAREA INTEGRALEI VAL=  1.35064258
```

Fig. 243.

```
C   PROGRAM DE CALCUL: VALOAREA INTEGRALEI CU AJUTORUL
C   FORMULEI TRAPEZELOR
C   A, B = CAPETELE INTERVALULUI
C   H = PASUL PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL II
C   EPSI = EROAREA DORITĂ
      READ (105,1) A, B, H, EPSI
    1 FORMAT (4F10.5)
      WRITE (108,2) A. B, H, EPSI
    2 FORMAT  (1H1,25H CAPETELE INTERVALULUI A=,F10.5,3H B=,F10.5/48H PASU
     *L PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL 2, H=,F10.5/24H EROAREA IMPU
     *SA, EPSILON=,F10.8)
C   CALCULUL MAXIMULUI DERIVATEI DE ORDINUL 2, NOTAT = FP2M
      FP2M=0.
      X1=A
   10 CALL FUNCTIE(X1,F1)
      X2=X1+H
         X1=X2
      CALL FUNCTIE(X2,F2)
      X3=X2+H
      IF(X3.GT.B) GO TO 30
      X2=X3
      CALL FUNCTIE(X3,F3)
      FP2=ABS (F1-2*F2+F3)/(H*H)
      IF(FP2.GE.FP2M) GO TO 20
      FP2M=FP2M
      GO TO 10
   20 FP2M=FP2
      GO TO 10
   30 WRITE(108,3) FP2M
    3 FORMAT(1HO,34H VALOAREA MAXIMA A DERIVATEI FP2M=,F10.5)
```


Scanned with OKEN Scanner

```
C   CALCULAREA NR. DE NODURI (PUNCTE)  NECESARE APROXIMARII INTEGRALEI

      UC=FP2M*(B-A)**3
      UC=SQRT(UC/(12*EPSI))
      NR=UC+1

C   CALCULAREA VALORII INTEGRALEI = VAL
C   H1 NOUL PAS PT. CALCULUL VALORILOR FUNCTIEI

      H1=(B-A)/NR
      S=0.
      N1=NR-1
      X=A
      DO 40 K=1,N1
      X=X+H1
      CALL FUNCTIE(X,FX)
      S=S+FX
   40 CONTINUE
      VAL=2*S
      X=A
      CALL FUNCTIE (A,FA)
      X=B
      CALL FUNCTIE (B,FB)
      VAL=VAL+FA+FB
      VAL=H1*VAL/2
      WRITE(108,4) NR, H1, VAL
    4 FORMAT  (1H0, 24H NR = NUMARUL  DE  NODURI =,I6/14H NOUL PAS H1=,F10.8/
     *25H VALOAREA INTEGRALEI VAL=,F12.8)
      STOP
      END
      SUBROUTINE FUNCTIE(X,FX)

C   FUNCTIA F(X)=EXP(-X*X)

      FX=EXP(-x*X)
      RETURN
      END
      CAPETELE INTERVALULUI A=  0.00000 B=  1.00000
      PASUL PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL 2, H=  0.00100
      EROAREA IMPUSA, EPSILON=0.00001000

      VALOAREA MAXIMA A DERIVATEI FP2M= 2.00073

      NR= NUMARUL DE NODURI= 130
      NOUL PAS H1= 0.00769231
      VALOAREA INTEGRALEI VAL=  0.74682050
      SUBROUTINE FUNCTIE (X,FX)

C   FUNCTIA F(X)=SQRT(1-SIN(X)*SIN(X)/2)

      FX=SQRT(1-SIN(X)*SIN(X)/2)
      RETURN
      END
      CAPETELE INTERVALULUI A= 0.00000 B= 1.57079
      PASUL PT. CALCULAREA DERIVATIEI DE ORDINUL 2, H= 0.00100
      EROAREA IMPUSA, EPSILON=0.00001000

      VALOAREA MAXIMA A DERIVATEI FP2M=  0.70709
```


Scanned with OKEN Scanner

```
      NR= NUMARUL DE NODURI =  152
      NOUL PAS H1=  0.01033414
      VALOAREA INTEGRALEI VAL =  1.35063941
      SUBROUTINE FUNCTIE(X,FX)

C     FUNCTIA F(X)=1/(1+X*X)

      FX=1/(1+X*X)
      RETURN
      END
      CAPETELE INTERVALULUI A=  0.00000 B=  1.00000
      PASUL PT. CALCULAREA DERIVATIEI DE ORDINUL 2, H=  0.00100
      EROAREA IMPUSA, EPSILON=0.00001000

      VALOAREA MAXIMA A DERIVATEI FP2M=  1.99999
      NR=  NUMARUL DE NODURI=  130
      NOUL PAS H1=  0.00769231
      VALOAREA INTEGRALEI VAL=  0.78539570
```

Fig. 244.

```
C     PROGRAM DE CALCUL. VALOAREA INTEGRALEI CU AJUTORUL
C     FORMULEI LUI SIMPSON
C     A,B = CAPETELE INTERVALULUI
C     H = PASUL PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL 4
C     EPS = EROAREA DORITA

      READ(105,1) A,B,H, EPSI
    1 FORMAT(4F10.5)
      WRITE(108,2) A,B,H, EPSI
    2 FORMAT(1H1,25H CAPETELE INTERVALULUI A=,F10.5,3H B=,F10.5/48H PASU
     *L PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL 4, H=,F10.5/24H EROAREA IMPU
     *SA, EPSILON=,F10.8)

C     CALCULUL MAXIMULUI DERIVATEI DE ORDINUL 4, NOTAT = FP4M

      FP4M=0.
      X1=A
   10 CALL FUNCTIE(X1,F1)
      X2=X1+H
      X1=X2
      CALL FUNCTIE(X2,F2)
      X3=X2+H
      X2=X3
      CALL FUNCTIE(X3,F3)
      X4=X3+H
      X3=X4
      CALL FUNCTIE(X4,F4)
      X5=X4+H
      IF(X5.GT.B) GO TO 30
      X4=X5
      CALL FUNCTIE(X5,F5)
      FP4=ABS(F1-4*F2+6*F3-4*F4+F5)/(H**4)
      IF(FP4.GE.FP4M) GO TO 20
      FP4M=FP4M
```


Scanned with OKEN Scanner

```
      GO TO 10
   20 FP4M=FP4
      GO TO 10
   30 WRITE(108,3) FP4M
    3 FORMAT(1HO,34H VALOAREA MAXIMA A DERIVATEI FP4M=,F10.5)

C  CALCULAREA NR. NODURI (PUNCTE) NECESARE APROXIMARII INTERGALEI

      UC=FP4M* (B-A)**5
      UC=SQRT(UC/(2880*EPSI))
      UC=SQRT(UC)
      NR=UC+1

C  H1 NOUL PAS PT. CALCULUL VALORILOR FUNCTIEI
C  CALCULAREA VALORII INTEGRALEI = VAL

      H1=(B-A)/NR
      S=0.
      N1=NR-1
      X=A
      DO40 K=1,N1
      X=X+H1
      CALL FUNCTIE(X,FX)
      S=S+FX
   40 CONTINUE
      VAL=2*S
      X=A
      CALL FUNCTIE (A,FA)
      X=B
      CALL FUNCTIE (B,FB)
      VAL=VAL+FA+FB
      S1=0.
      X0=A
      X1=X0+H1
   50 X=(X0+X1)/2
      CALL FUNCTIE (X,FX)
      S1=S1+FX
      IF(X1.GE.B) GO TO 60
      X0=X1
      X1=X0+H1
      GO TO 50
   60 VAL=VAL+4*S1
      VAL=VAL*H1/6
      WRITE(108,4) NR, H1, VAL
    4 FORMAT (1H0,24H NR= NUMARUL DE NODURI =,I6/14H  NOUL PAS H1=,F10.8/
     * 25H VALOAREA INTEGRALEI VAL=,F12.8)
      STOP
      END

      SUBROUTINE FUNCTIE (X,FX)

C  FUNCTIA F(X)= EXP(-X*X)

      FX=EXP(-X*X)
      RETURN
      END
      CAPETELE INTERVALULUI A=  0.00000 B=  1.00000
```


Scanned with OKEN Scanner

```
PASUL PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL 4, H=  0.00100
EROAREA IMPUSA, EPSILON=0.00001000

VALOAREA MAXIMA A DERIVATEI FP4M=2386.51410
NR= NUMARUL DE NODURI =  17
NOUL PAS H1=  0.05882353

VALOAREA INTEGRALEI VAL =  0.74682414

      SUBROUTINE FUNCTIE(X,FX)

C     FUNCTIA F(X)= 1/(1+X*X)

      FX=1/(1+X*X)
      RETURN
      END
CAPETELE INTERVALULUI A=  0.00000 B=  1.00000
PASUL PT. CALCULAREA DERIVATEI DE ORDINUL 4, H=  0.00100
EROAREA IMPUSA, EPSILON=0.00001000
VALOAREA MAXIMA A DERIVATEI FP4M= 305.59022
NR= NUMARUL DE NODURI =  11
NOUL PAS H1= 0.09090909
VALOAREA INTEGRALEI VAL=  0.78539816
```

Fig. 245.

237. Valoarea funcției $x \to f(x) = \cos x$ într-un punct x, se aproximează prin $S_{2m}(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$. Să se scrie algoritmul de calcul, organigrama și programul în FORTRAN pentru aproximarea valorilor funcției f în punctele $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Soluție. Formulele de recurență pentru determinarea sumei $S_{2m}(x_i)$, $x_i \in \{x_i \mid i \in \overline{1, n}\}$, sînt $T_{ji} = \frac{-x_i^2}{j(j-1)} T_{j-2i}$, $S_{ji} = S_{j-2i} + T_{ji}$, cu condițiile inițiale $S_{oi} = 1$, $T_{oi} = 1$, și valorile indicilor $j \in \{2, 4, \ldots, 2m\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; aproximările valorilor funcției sînt $f(x_i) = S_{2mi}$. S-a obținut algoritmul de rezolvare:

$$T_{ji} = \frac{-x_i^2}{j(j-1)} T_{j-2i}, \quad S_{ji} = S_{j-2i} + T_{ji}, \quad S_{oi} = 1, \quad T_{oi} = 1, \quad j \in \{2, 4, \ldots, 2m\}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Se folosește notarea cu majuscule a variabilelor, păstrîndu-se în notare dependența de argumentele cu valori naturale. În acest mod atribuirile își păstrează sensul și ca notații pentru relații matematice; spre exemplu, se păstrează atribuirea $S(J, I) = S(J-2, I) + T(J, I)$, care are sensul matematic de mai sus (din relația de recurență), deși ar putea fi transcrisă sub forma $S = S + T$, înțelegînd atribuirea valorii noi $S+T$ variabilei cu indicatorul S. Singura atribuire acceptată și care nu are sens matematic este cea care asigură parcurgerea valorilor indicilor.

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste observaţii se scrie organigrama (fig. 246 *a*).

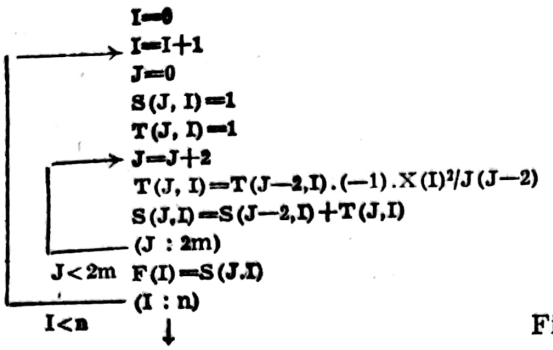


Fig. 246*a*.

Observaţii. 1) Notaţia $(J : 2m)$ corespunde comparării valorilor lui J cu valoarea maximă $2m$; ordinea naturală corespunde cazului $J \geqslant 2m$. 2) Funcţia $C\varnothing S$ este inclusă în funcţiile standard. 3) Considerăm că adoptarea acestor notaţii prezintă avantaje, cum ar fi: simplifică scrierea programului în FORTRAN, permite verificarea problemei (inclusiv aspectele matematice) pe programul scris în FORTRAN.

Programul în FORTRAN este (fig. 246 *b*):

```
. . . . . .
I=0
DØ p I=1,n
J=0
S(J,I)=1
T(J,I)=1
DØ r J=2,2m,2
T(J,I)=T(J−2,I)*(−1)*X(I)*  X(I)/J*(J−2)
r S(J,I)=S(J−2,I)+T(J,I)
p F(I)=S(J,I)
. . . . . .
```

Fig. 246 *b*.

238. Se consideră progresia geometrică infinită, determinată de primul termen $a_1=1$, şi raţia $r=-x^2$. Se cere:

1) Suma progresiei pentru $r\in[0, 1)$.

2) Să se demonstreze că pentru $x\in(-1, 1)$ are loc relaţia $\frac{1}{1+x^2}=F_n(x)+R(x)$, $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$, $R(x)=(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^a R(x)dx=0$, $a\in(0, 1)$.

3) Să se arate că $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x\in(-1, 1)$, admite aproximarea de forma $f(x)\approx\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$; să se formuleze algoritmul de calcul, să se reprezinte organigrama şi să se scrie programul corespunzător în FORTRAN, pentru aproximarea valorilor lui f pe mulţimea $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

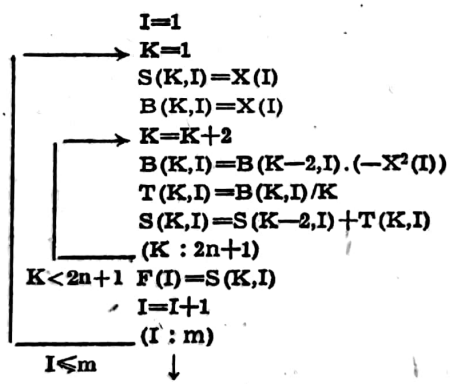
4) Să se determine o formulă de aproximare a lui f pentru $|x|>1$.

Soluţie. 1) Progresia este $1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$. şi deoarece $r\in[0, 1)$, rezultă că $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$.

2) Se scrie $\frac{1}{1+x^2}=F_n(x)+(-1)^{n+1}x^{2n+2}+(-1)^{n+2}x^{2n+4}+\ldots$, se obține $R(x)=(-1)^{n+1}x^{2n+2}(1-x^2+x^4-\ldots)=(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$. Se evaluează $\int_0^a R(x)dx$, $\left|\int_0^a R(x)dx\right| \leqslant \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx < \int_0^a x^{2n+2}dx = \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$. Deoarece $a\in(0, 1)$, $a^n\to 0$, rezultă că $\int_0^a R(x)dx\to 0$, $n\to\infty$.

3) Este adevărată egalitatea funcțiilor $\frac{1}{1+t^2}=F_n(t)+R(t)$, $t\in(-1, 1)$. Integrăm pe intervalul $[0, x)$, $x\in(-1, 1)$: $\operatorname{arctg} x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+$ $+\int_0^x R(t)dt$; deoarece $\lim_{n\to\infty}\int_0^x R(t)dt=0$, se satisface $(\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon))((\forall n>N(\varepsilon))$ $\Rightarrow\left|\int_0^x R(t)dt\right|<\varepsilon)$. În concluzie, $\operatorname{arctg} x_i\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x_i^{2k+1}}{2k+1}=S(2n+1, i)$. Algoritmul de calcul pentru $\operatorname{arctg} x_i$ este

$B(k, i)=B(k-2, i)\cdot(-x_i^2)$, $T(k, i)=B(k, i)/k$, $S(k, i)=S(k-2, i)+T(k, i)$, $B(1, i)=x_i$, $S(1, i)=x_i$, $\operatorname{arctg} x_i=S(2n+1, i)$, $k\in\{3, 5, \ldots, 2n+1\}$, $i\in\{1, 2, \ldots, m\}$. Urmează organigrama și programul în FORTRAN (fig. 247).




```
. . . . . .
I=1
DØ p I=1,m
K=1
S(K,I)=X(I)
B(K,I)=X(1)
DØ r K=1,2m+1,2
B(K,I)=B(K−2,I)*(−1)*X(I)*X(I)
T(K,I)=B(K,I)/K
r S(K,I)=S(K−2,I)+T(K,I)
p F(I)=S(K,I)
. . . . . .
```

Fig. 247.

Scanned with OKEN Scanner

4) Folosind procedeul de la 1), 2), deoarece există f' pe R, rezultă

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{x^{2n}}+\ldots\right)=\frac{1}{x^2}-$$

$$-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{x^{2n+2}}+\ldots=F_1^*(x)+R^*(x).$$

Funcția f se aproximează prin $\int_a^a F_n^*(t)\,dt$, $x\in(1,\infty)$, $a>x$; deoarece

$$\int_x^a F_n^*(t)\,dt=\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{5t^5}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)t^{2n+1}}\right)\Bigg|_x^a=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots+$$

$+\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,x^{2n+1}}+G(a)$, extinzînd intervalul la $(x,\ \infty)$ rezultă $\lim_{a\to\infty}G(a)=0$ și deci

$$f(x)\approx\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)x^{2n+1}}$$

Se observă că aproximarea funcției f pe $(1,\ \infty)$ se obține din aproximarea lui f pe $(0,\ 1)$, înlocuind x prin $\frac{1}{x}$ (simetrie pe $(0,\ \infty)$ în raport cu 1).

239. Se dă mulțimea $M=\{a_j|\ a_j\geqslant 0,\ j\in\overline{1,\ m}\}$. Să se scrie algoritmul de calcul, organigrama și programul în FORTRAN pentru determinarea elementului maximal $\max\limits_{a_j\in M} a_j$.

Soluție. 1) Algoritmul

Se consideră valorile inițiale $j=1$, $k=2$ și se calculează $d_{jk}=a_j-a_k$. Dacă $d_{jk}\geqslant 0$, se trece la $d_{jk+1}=a_j-a_{k+1}$; dacă $d_{jk}<0$ se face $a_j=a_k$ și se trece la $d_{jk+1}=a_j-a_{k+1}$, $k\in\{2,\ 3,\ \ldots,\ m\}$, iar $j\in J$, unde J este mulțimea indicilor termenilor care satisfac $a_1<a_{j_1}<a_{j_2}<\ldots<a_{j_p}$, cu $a_{j_p}\leqslant\max\limits_{a_j\in M} a_j$.

2) Organigrama (fig. 248. a)

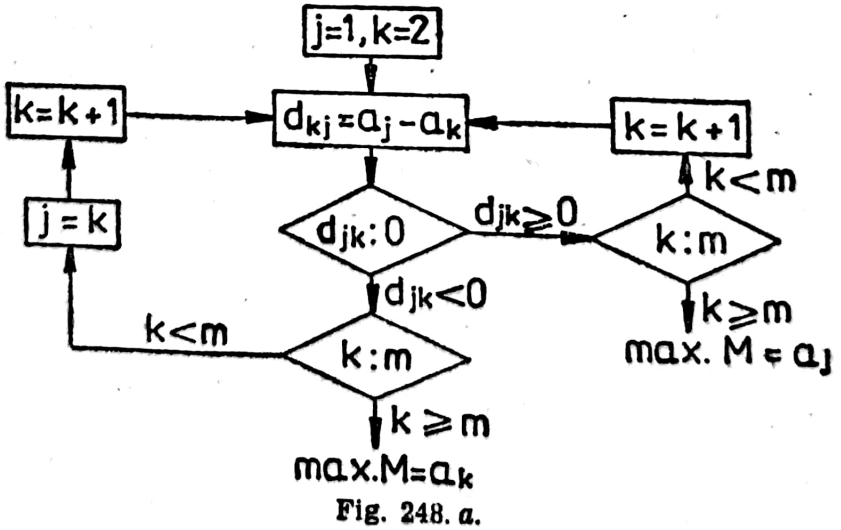


Fig. 248. a.

```
   MAX (M, A(J))
   INTEGER J, K
   REAL A(J), D, T
   DIMENSIØN A(m)
   READ ( γ, γ1) J, K, D, (A(J), J=1, m), T
γ1 FØRMAT(31m0, (m+1)Fw. d)
. . . . . .
   J=1
   K=2
γ1 D=A(J)—A(K)
   IF(D. GE. 0) G Ø T Ø β1
   IF(K. GE. m) G Ø T Ø β2
   J=K
   K=K+1
   G Ø T Ø α1
β1 IF(K. GE. m) G Ø T Ø β3
   K=K+1
   G Ø T Ø α1
β2 T=A(K)
   WRITE ( δ,δ1 ) T, K
δ2 FORMAT (F7. 3, Im0)
   STOP
β3 T=A(J)
   WRITE ( δ, δ2) T, J
δ2 FØRMAT (F7.3, Im0)
   STOP
   END
```

Comentarii

Declaraţiile 2, 3 pot lipsi (se subînţeleg din notarea variabilor).

S-a notat $T=max\ a_j$, $a_j \in M$

Dacă programul se utilizează ca „funcţie" (subprogram), atunci nu se mai scriu instrucţiunile de ieşire, ci

```
RETURN
END
```

Fig. 248. *b*.

3) Programul (fig. 248 *b*).

Probabilităţi

(I) Fie $\mathscr{X}$ o mulţime şi $\mathscr{B}$ — mulţimea nevidă de părţi ale lui $\mathscr{X}$ cu proprietăţile:

$$\forall A \in \mathscr{B} \Rightarrow \overline{A} \in \mathscr{B},$$

$$\forall (A_j)_{j \in N} \subset \mathscr{B} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{B};$$

$(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ este un σ — cîmp de evenimente, iar A, A_j — evenimente.

(II) Pe $\mathscr{B}$ se defineşte o funcţie P care satisface

$$\forall A \in \mathscr{B} \Rightarrow P(A) \geqslant 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru orice familie numărabilă sau finită de evenimente incompatibile, din $\mathfrak{K}$, $\{A_j | j \in I \subset N\}$, $A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$ ($\emptyset$ — eveniment imposibil), $P(\bigcup_{j \in I} A_j) = \sum_{j \in I} P(A_j)$,

$$P(\mathfrak{K}) = 1.$$

Tripletul $(\mathfrak{K}, \mathfrak{B}, p)$ este σ — cîmp de probabilitate, iar aplicația P — probabilitate.

(III) Dacă pentru $(\mathfrak{K}, \mathfrak{B}, p)$, $\mathfrak{K} = \{E_j | j \in \overline{1, n},\ E_k \cap E_j = \emptyset,\ k \neq j\}$ este mulțime de evenimente elementare egal probabile, atunci $P(\mathfrak{K}) = P(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) = nP(E_j) = 1$ și deci $P(E_j) = \frac{1}{n}$, $j \in \overline{1, n}$. Pentru orice $A \in \mathfrak{B}$ se presupune că $A = \bigcup_{k=1}^{m} E_k$, $m \leqslant n$ (deoarece E_j sînt evenimente elementare); rezultă că

$$P(A) = \sum_{k=1}^{m} P(E_k) = \frac{m}{n}$$ (Cazul probabilității în „sens clasic").

240. Un muncitor a lucrat patru piese pe care le notăm cu 1, 2, 3 și 4. Fie A_i evenimentul care constă în faptul că piesa i este defectă. Utilizînd pe A_i și $\overline{A_i}$ să se scrie următoarele evenimente:

1) nici una dintre piese nu este defectă;
2) cel puțin una dintre piese este defectă,
3) numai una dintre piese este defectă,
4) exact două piese sînt defecte,
5) cel puțin două piese nu sînt defecte,
6) cel mult două piese sînt defecte.

Soluție. Dacă A_i este evenimentul că piesa i este defectă, atunci $\overline{A_i}$ este evenimentul că piesa i nu este defectă.

1)—2) Avînd în vedere notațiile precedente evenimentul „nici una dintre piesele lucrate nu este defectă" se scrie $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$. Evenimentul „cel puțin una dintre piesele lucrate este defectă" se exprimă prin $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Evident $\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$, adică cele două evenimente sînt complementare.

3) Dacă $E = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4$, $F = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap \overline{A_4}$, $G = \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$ și $H = A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$, atunci $E \cup F \cup G \cup H$ este evenimentul „numai una dintre piesele lucrate este defectă".

4) Analog evenimentul „exact două piese sînt defecte" este $(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4}) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap \overline{A_4}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4)$.

5) Evenimentul „cel puțin două piese nu sînt defecte" este complementarul evenimentului „cel mult o piesă este defectă" = sau „nici o piesă nu-i defectă" sau „numai una dintre piesele lucrate este defectă", adică $(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) \cup (E \cup F \cup G \cup H)$.

Scanned with OKEN Scanner

6) Evenimentul „cel mult două piese sînt defecte" se compune din: sau o piesă nu este defectă" sau „numai o piesă este defectă" sau „numai două piese sînt defecte".

241. Se consideră un lot de 24 produse de același tip, dar de 6 calități diferite cîte 4 de fiecare calitate. Se probează la întîmplare 3 produse; care este probabilitatea ca cele 3 produse să fie de aceeași calitate?

Soluție. A — evenimentul extragerii celor trei produse; numărul total al evenimentelor C_{24}^3, numărul evenimentelor favorabile $(1.\ C_{20}^2)\cdot C_4^1$. Deci $P(A)=\dfrac{C_4^1\cdot C_{20}^2}{C_{24}^3}\approx 0{,}37$.

(IV). Dacă $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, P)$, cîmp de probabilitate și $A, B\in\mathscr{B}$, atunci $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$; dacă $A\cap B=\varnothing$, atunci rezultă „teorema de adunare", $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

242. O țintă are 10 zone, probabilitatea de a nimeri ținta dintr-o încercare este: 0,01 pentru zona I, 0,011 pentru zona II, . . |. , 0,019 pentru zona X. Care este probabilitatea de a nu nimeri ținta dintr-o încercare?

Soluție. Evenimentele: A_j — se nimerește zona j dintr-o încercare,
A — se nimerește ținta (dintr-o încercare).

Deci $A=\bigcup_{j=1}^{10}A_j$, $A_k\cap A_i=\varnothing$, $k\neq i$, și $P(A)=P(\bigcup_{j=1}^{10}A_j)=\sum_{j=1}^{10}P(A_j)=0{,}145$. Interesează evenimentul contrar, $\overline{A}$ — nu se nimerește ținta; $P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}855$.

243. Fie A și B două evenimente definite pe un cîmp de probabilitate. Utilizînd $P(A)$, $P(B)$ și $P(A\cap B)$ să se determine:

1) probabilitatea ca dintre evenimentele A și B să se producă: nici unul ($k=0$); exact unul ($k=1$); exact două ($k=2$),

2) probabilitatea să se producă cel puțin $k=0, 1, 2$ evenimente.

3) probabilitatea să se producă cel mult $k=0, 1, 2$ evenimente,

4) probabilitatea să se producă evenimentul A și să nu se producă evenimentul B.

Soluție. 1) Evenimentul „exact o" se scrie $\overline{A}\cap\overline{B}$. Fiind complementar cu $A\cup B$, adică $(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cup B)=E$, $(\overline{A}\cap\overline{B})\cap(A\cup B)=\varnothing$, găsim $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1+P(A\cap B)-P(A)-P(B)$.

Evenimentul „exact 1" este $C=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$. Pe de altă parte $C\cup(A\cup B)=A\cup B$ și $C\cap(A\cap B)=\varnothing$. De aceea $P(C)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$.

Evenimentul „exact 2" se scrie $A\cap B$ și coincide cu „cel puțin 2".

2) Evenimentul „cel puțin o" este $(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cup B)=E$ și deci el apare cu probabilitatea 1.

Scanned with OKEN Scanner

Evenimentul „cel puțin 1" se scrie $A \cup B$. Rezultă $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

3) Explicit putem scrie P (cel mult o) $= P$ (exact 0), P (cel mult 1) $= P$(nu 0 sau exact 1) $= 1 + P(A \cap B) - P(A) - P(B) + P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B)$, P(cel mult 2) $= P$(nu 0 sau exact 1 sau exact 2) $= 1$.

4) Deoarece $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A$ și $(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \varnothing$ deducem $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

(V) **Probabilitatea condiționată.** Fie $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P)$ și $A, B \in \mathfrak{B}$, dacă $P(B) \neq 0$, atunci $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ este probabilitatea evenimentului A condiționat de B.

Observăm că $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_B(A)$; dacă evenimentele A, B sînt independente, atunci $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

(VI). **Probabilitatea totală.** Se constată o descompunere a evenimentului sigur, $\mathfrak{X} = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, $A_i \cap A_k = \varnothing$, $i \neq k$, și X — arbitrar, $X \in \mathfrak{B}$.

Rezultă că $X = \bigcup_{j=1}^{n} (X \cap A_j)$ — reuniune de evenimente incompatibile și

$$P(X) = \sum_{j=1}^{n} P(X \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P_{A_j}(X).$$

(VII) **Formula Bayes.** Din $P(A_i \cap X) = P(A_i) \cdot P(X) = P(A_i) \cdot P_{A_i}(X)$ rezultă că

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i \cap X)}{P(X)} = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(X)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) P_{A_j}(X)}.$$

244. Se consideră 5 urne cu conținutul în 3 variante: 2 urne cu cîte 8 bile albe și 2 negre, o urnă cu 10 bile negre, 2 urne cu cîte 4 bile albe și 6 negre.

1) Arbitrar se alege o urnă și se scoate o bilă. Care este probabilitatea că această bilă este neagră?

2) Arbitrar se alege o urnă și se extrage o bilă, care se constată că este albă. Care este probabilitatea că provine dintr-o urnă de tipul al 3-lea?

Soluție. 1) Evenimentul B — bila extrasă este neagră, A_j — alegerea urnei de tip j. Cu aceste notații, $B = B \cap (\bigcup_{j=1}^{3} A_j) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$ și $B \cap A_k$, $B \cap A_i$ sînt incompatibile pentru $k \neq j$.

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(A_j) \cdot P_{A_j}(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{25} = 0{,}52.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Evenimentul A — bila extrasă este albă

$$P_A(A_3)=\frac{P(A_3)\cdot P_{A_3}(A)}{\sum_{j=1}^{3}P(A_j)\cdot P_{A_j}(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33.$$

245. Trei muncitori produc același tip de piese; primul rebutează cu probabilitatea 0,05, al doilea cu 0,04, al treilea cu 0,03. Dintr-un lot de 100 piese, 40 sînt făcute de primul muncitor, 30 de al doilea, 30 de al treilea. Se extrage o piesă oarecare din lot și se supune testărilor de calitate. Care este probabilitatea că piesa este bună?

Soluție. Evenimentul A_j — piesa aleasă este produsă de muncitorul j, $=1, 2, 3$; evenimentul A — piesa extrasă este bună. Se consideră că $P(A_1)=\frac{4}{10}$, $P(A_2)=P(A_3)=\frac{3}{10}$; se constată că $P_{A_1}(A)=0{,}95$, $P_{A_2}(A)=0{,}96$, $P_{A_3}(A)=0{,}97$. Rezultă $P(A)=\sum_{j=1}^{3}P(A_j)\cdot P_{A_j}(A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{95}{100}+\frac{3}{10}\cdot\frac{86}{100}+\frac{3}{10}\cdot\frac{97}{100}=0{,}959.$

246. Aparatele dintr-o serie pot fi montate numai din piese de calitatea I-a sau numai din piesa de calitatea a II-a. Probabilitatea de funcționare pe intervalul de timp $[0, T]$ este pentru primul caz 0,9, iar pentru al doilea 0,7; 40% dintre aparate se montează din piese I, 60% din piese II.

Se testează un aparat arbitrar din serie și se constată că funcționează pe $[0, T]$. Să se determine probabilitatea că este montat cu piese de categoria I.

Soluție. Evenimentele: X — aparatul funcționează pe $[0, T]$, A_1 — aparatul este făcut din piese I, A_2 — aparatul este făcut din piese II. Se consideră $P(A_1)=0{,}4$, $P(A_2)=0{,}6$; se dau valorile $P_{A_1}(X)=0{,}9$, $P_{A_2}(X)=0{,}7$.

Rezultă $P_X(A_1)=\frac{P(A_1)\cdot P_{A_1}(X)}{P(A_1)\cdot P_{A_1}(X)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(X)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}9}{0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}7}=0{,}69.$

247. Doi trăgători trag independent cîte un foc asupra aceleiași ținte. Primul (I) — nimerește cu probabilitatea 0,8, al doilea (II) nimerește cu 0,6. Se constată că ținta este nimerită o singură dată. Care este probabilitatea că ținta a fost nimerită a) de trăgătorul (I), b) de trăgătorul (II)?

Soluție. Evenimentele: X — s-a nimerit ținta o singură dată, A_1 — ținta este nimerită de către (I), A_2 — ținta este nimerită de către (II). $B_1=\overline{A}_1\cap A_2$, $B_2=A_1\cap\overline{A}_2$, $B_3=\overline{A}_1\cap A_2$, $B_4=A_1\cap A_2$; $(B_j)_{j\in\overline{1,4}}$ determină evenimentul sigur. Se dau: $P(A_1)=0{,}8$, $P(A_2)=0{,}6$; rezultă $P(\overline{A}_1)=0{,}2$, $P(\overline{A}_2)=0{,}4$ și $P(B_1)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)=0{,}08$, $P(B_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}48$, $P(B_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}12$, $P(B_4)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)=0{,}32$. De asemenea $P_{B_1}(X)=0$, $P_{B_2}(X)=$

$=0$, $P_{B_3}(X)=1$, $B_{B_4}(X)=1$; este imposibilă nimerirea ţintei o singură dată, dacă au nimerit ţinta ambii trăgători sau nici unul.

Se obţine $P_X(B_4)=\dfrac{P(B_4)\cdot P_{B_4}(X)}{\sum_{j=1}^{4}P(B_j)\cdot P_{B_j}(X)}=\dfrac{0{,}32\cdot 1}{0{,}32\cdot 1+0{,}12\cdot 1}\approx 0{,}72.$

$$P_X(B_3)=\frac{P(B_3)\cdot P_{B_3}(X)}{P(B_j)\cdot P_{B_j}(X)}=\frac{0{,}12\cdot 1}{0{,}44}\approx 0{,}28.$$

(VIII) **Variabilă aleatoare discretă.** Se consideră $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P)$, σ — cîmp de probabilitate, unde $\mathfrak{X}$ este mulţime finită sau numărabilă. Aplicaţia $\xi:\mathfrak{X}\to R$ este variabilă aleatoare discretă. Fiecărui $x\in\mathfrak{X}$ îi corespunde $\xi(x)=a_i$; $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ este mulţimea valorilor variabilei aleatoare.

Un eveniment $A\in\mathfrak{B}$ se defineşte ca fiind submulţimea din $\mathfrak{X}$ pe care ξ ia valoarea a_i, $A=\{\xi=a_i\}=\{x\mid x\in\mathfrak{X},\ \xi(x)=a_i\}$. Se consideră că $P(A)=p_i=P\{\xi=a_i\}=\sum_{\{x\mid\xi(x)=a_i\}}P(x)$, $p_i\geqslant 0$.

Tabelul $\begin{pmatrix}a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, & \ldots\\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_n, & \ldots\end{pmatrix}$ se numeşte tabel de repartiţie al variabilei aleatoare ξ; se satisface condiţia $\sum_n p_n=\sum_n P\{\xi=a_n\}=\sum_{x\in\mathfrak{X}}P(x)=P(\mathfrak{X})=1$.

Pentru variabila aleatoare $\xi:\mathfrak{X}\to R$ se consideră seria $\sum_{x\in\mathfrak{X}}\xi(x)\cdot P(x)$; dacă seria este absolut convergentă, atunci suma seriei $M\xi=\sum_{x\in\mathfrak{X}}\xi(x)\cdot P(x)$ este valoarea medie a variabilei ξ. (Dacă $\mathfrak{X}$ este mulţime finită, seria se reduce la o sumă finită.)

248. Se consideră ecuaţia $ax+by=c$ în care fiecare dintre coeficienţii a, b, c se determină prin aruncarea unui zar şi luarea numărului de puncte obţinut. Care este probabilitatea ca dreapta astfel obţinută să treacă prin punctul (1, 1).

2) Un mobil se mişcă rectiliniu după legea $x=at^2+bt+c$, unde t este timpul, iar x este spaţiul parcurs. Constantele a, b, c se determină pe rînd prin extragerea unei bile dintr-o urnă cu $n+1$ bile numerotate de la 0 la n şi luarea numărului înscris pe bila extrasă. Să se determine probabilitatea ca: (1) mişcarea să fie uniform accelerată, (2) mişcarea să fie uniformă, (3) viteza să fie 5 m/s cînd mobilul se mişcă uniform.

(G.M.B., Corina Reischer)

Soluţie. 1) Variabilele aleatoare independente a, b, c au respectiv tabelul de repartiţie

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dreapta trece prin punctul (1, 1) dacă $a+b=c$, iar problema cere să găsim $P(a+b=c)$. Deoarece a, b, c sînt variabile aleatoare independente, avem $P(a+b+c)=\sum_{k=1}^{6}P[(a+b=k)\cap(c=k)]=\sum_{k=1}^{6}P(a+b=k)P(c=k)$. Pe de altă parte $P(c=k)=\frac{1}{6}$, $k=1, 2, \ldots, 6$, iar $\sum_{k=1}^{6}P(a+b=k)=P(a+b\leqslant 6)$ este probabilitatea ca suma punctelor obținute la aruncarea a două zaruri să fie cel mult 6. Se observă însă că $P(a+b\leqslant 6)=P(a=1)\cdot[P(b=1+P(b=2)+P(b=3)+P(b=4)+P(b=5)]+P(a=2)\cdot[P(b=1)+P(b=2)+P(b=3)+P(b=4)]+P(a=3)\cdot[P(b=1)+P(b=2)+P(b=3)]+P(a=4)\cdot[P(b=1)+P(b=2)]+P(a=5)\cdot P(b=1)=\frac{1}{6}\left[\frac{5}{6}+\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right]=\frac{15}{16}$. De aceea găsim $P(a+b=c)=\frac{1}{6}\cdot\frac{15}{36}=\frac{5}{72}$.

2) Coeficienții a, b, c sînt variabile aleatoare independente cu același tabel de repartiție

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n \\ 1/(n+1) & 1/(n+1) & \ldots & 1/(n+1) \end{pmatrix}.$$

(1) Mișcarea este uniform accelerată dacă $a\neq 0$. De aceea calculăm $P(a\neq 0)=1-P(a=0)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

(2) Mișcarea este uniformă numai în condițiile $a=0$, $b\neq 0$. Avem $P[(a=0)\cap(b\neq 0)]=P(a=0)P(b\neq 0)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n}{(n+1)^2}$.

(3) Deoarece mișcarea este uniformă, avem $x=bt+c$. Prin derivare obținem viteza $x'=b$. Cu acestea problema cere $P(b=5)=\frac{1}{n+1}$.

249. Fie ξ o variabilă aleatoare care poate lua valorile $1, 2, \ldots, n$. Probabilitatea ca ξ să ia valoarea j este proporțională cu j. Se cere:

1) să se determine $P(\xi=j)$,

2) să se calculeze $P(\xi=1/\xi=1 \text{ sau } \xi=n)$.

Soluție. 1) Prin ipoteză $P(\xi=j)=\alpha j$. Dar $\sum_{j=1}^{n}P(\xi=j)=1$. Deci $\sum_{j=1}^{n}\alpha j=\alpha\sum_{j=1}^{n}j=\alpha\frac{n(n+1)}{2}=1$. Rezultă $P(\xi=j)=\frac{2j}{n(n+1)}$.

2) Succesiv găsim

$$P(\xi=1/\xi=1 \text{ sau } \xi=n)=\frac{P(\xi=1)}{P(\xi=1 \text{ sau } \xi=n)}=\frac{P(\xi=1)}{P(\xi=1)+P(\xi=n)}=$$

$$=\frac{\frac{2}{n(n+1)}}{\frac{2}{n(n+1)}+\frac{2n}{n(n+1)}}=\frac{1}{1+n}.$$

250. Într-o urnă se află a bile albe și b bile negre. Se scoate o bilă la întîmplare.

1) Ce evenimente pot să aibă loc și cu ce probabilitate?

2) Să se definească o variabilă aleatoare ξ și să se întocmească repartiția corespunzătoare.

Soluție. 1) Notăm cu A evenimentul apariției unei bile albe și cu B evenimentul apariției unei bile negre. Se observă că $\overline{B}=A$ și că $A\cup B=E$, $A\cap B=\varnothing$. De aceea

$$P(A)=\frac{a}{a+b}=p, \quad P(B)=\frac{b}{a+b}=q, \quad p+q=1.$$

2) Pe sistemul de evenimente $\{A, B\}$ definim variabila aleatoare ξ care ia valorile $a_1=1$ sau $a_2=0$ după cum se produce evenimentul A sau B. Probabilitățile corespunzătoare sînt $P(A)=P(\xi=1)=p$, $P(B)=P(\xi=0)=q$, iar repartiția este $\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & q\end{pmatrix}$.

251. Din 100 de piese, 10 sînt defecte. Luăm la întîmplare 5 piese. Care este probabilitatea ca între cele 5 să fie și piese defecte?

Soluție. Probabilitatea ca să scoatem cinci piese bune este C_{90}^5/C_{100}^5. Dar evenimentele A=toate cele 5 piese sînt bune și B=între cele 5 piese cel puțin o piesă este defectă, sînt complementare, adică $A\cup B=E$, $A\cap B=\varnothing$. Rezultă $P(B)=1-\dfrac{C_{10}^5}{C_{100}^5}$.

252. Într-un lot de 200 piese prelucrate de o mașină sînt 10 piese cu defecte. Se scot la întîmplare 20 de piese. Care este probabilitatea ca între cele 20 de piese extrase să se afle piese cu defecte?.

Soluție. Fie A evenimentul că toate cele 20 de piese extrase sînt fără defecte și B evenimentul că între cele 20 de piese extrase cel puțin una este cu defect. Deoarece $A\cup B=E$, $A\cap B=\varnothing$, evenimentele A și B sînt complementare. Evident, avem de aflat $P(B)$.

Numărul cazurilor posibile pentru A este C_{200}^{20}, iar numărul cazurilor favorabile lui A este $C_{10}^0\cdot C_{190}^{20}=C_{190}^{20}$. Rezultă $P(A)=\dfrac{C_{190}^{20}}{C_{200}^{20}}$ și deci $P(B)=1-P(A)=1-\dfrac{C_{190}^{20}}{C_{200}^{20}}$.

253. Se trage asupra unei ținte pînă la prima nimerire. Probabilitatea de a nimeri pentru oricare încercare este p. Se definește variabila aleatoare ξ, avînd ca valori numărul de încercări pînă la nimerire.

1) Să se determine tabelul de repartiție a probabilității.

2) Să se calculeze valoarea medie.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1) Evenimentele: B_j se fac j încercări pînă la nimerire, A_j — se nimerește la încercarea j, $j\in N$. Rezultă că $B_j=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\ldots\cap\overline{A}_{j-1}\cap A_j$, $j\in N$, iar $P(B_j)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_{j-1})\cdot P(A_j)$. Tabelul de repartiție este $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ p & pq & pq^2 & \ldots & pq^{n-1}\end{pmatrix}$, unde $q=1-p$. Se constată că se satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{\xi=a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}pq^{n-1}=p(1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots)=\frac{p}{1-q}=1.$$

2) valoarea medie se calculează

$$M\xi=\sum_{n=1}^{n}n\cdot pq^{n-1}=p(1+2q+3q^2+\ldots nq^{n-1}+\ldots)=$$

$$=p\left(\frac{1}{1-q}+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q}+\ldots\right)=\frac{p}{1-q}(1+q+q^2+\ldots)=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$$

254. Se testează un material izolant la străpungere; testul cuprinde n încercări, probabilitatea de străpungere fiind pentru fiecare încercare egală cu p. Se consideră o variabilă aleatoare ξ, avînd valorile egale cu numărul de străpungeri din cele n încercări.

Să se determine tabelul de repartiție pentru variabila ξ.

Soluție. Evenimentul: A_j se străpunge în încercarea j, $j\in\overline{1,n}$. Problema se încadrează în „schema Bernoulli". Tabelul de repartiție este în acest caz

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \ldots & n\\ C_n^0q^n & C_n^1pq^{n-1} & C_n^2p^2q^{n-2} & \ldots & C_n^np^n\end{pmatrix},\quad q=1-p.$$

Se verifică $\sum_j P\{\xi=a_j\}=\sum_{j=0}^{n}C_n^jp^jq^{n-j}=(q+p)^n=1.$

255. Joc de două persoane

Se definește jocul ca o experiență repetată.

Dacă în repetarea k a jocului cîștigul jucătorului I este ξ_k, atunci în n repetări cîștigul este $\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. Se presupune că repartiția pentru ξ_k, $k\in\overline{1,n}$ este aceeași în fiecare joc:

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \ldots\\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots\end{pmatrix},\quad P\{\xi=a_i\}=p_i.$$

Se consideră media aritmetică $m=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$; $N(a_i)$ este numărul jocurilor (din n jocuri) în care $\xi_k=a_i$. Pentru n suficient de mare se consideră că $p_i\approx\frac{N(a_i)}{n}$; deci valoarea medie $\sum_{\{a_i\}}a_i\cdot\frac{N(a_i)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\approx\sum_{i\in I}a_ip_i=M\xi_k$. Se observă că valoarea medie $M\xi_k$ este „cîștigul" jucătorului I.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Fie I care are în dotare dispozitive de valoare 15 și 25 și folosește unul; dacă adversarul II determină antidotul corect (eficient), atunci I „cîștigă" — 15 sau —25, corespunzător. Dacă II nu găsește antidotul, atunci I cîștigă +20. Se pune problema determinării unei strategii (în sens probabilistic), care să maximizeze cîștigul.

Soluție. (fig. 249). Matricea cîștigurilor pentru jucătorul I este

II \ I	15	25
15	−15	+20
25	+20	−25

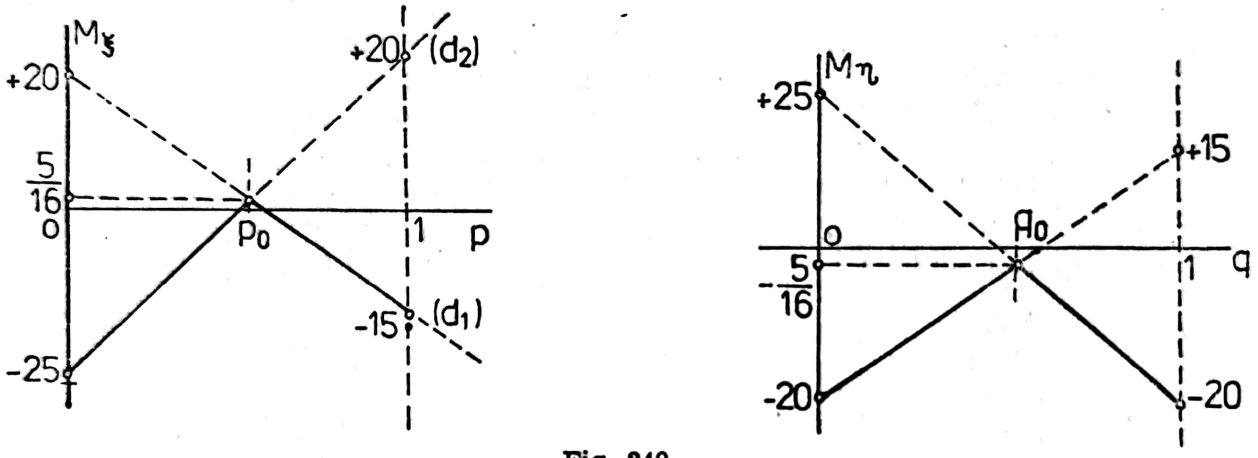


Fig. 249.

Strategia pentru I.

Fie, se alege 15 cu probabilitatea p și 25 cu probabilitatea $1-p$; se cere determinarea lui p optim. Se determină valoarea medie (a cîștigului) $M\xi$; dacă II alege 15, atunci: — cu probabilitatea p valoarea „cîștigului" lui I este −15,

— cu probabilitatea $1-p$, I cîștigă +20;

dacă II alege 25, atunci: — cu probabilitatea p, I cîștigă +20 și

— cu probabilitatea $1-p$, I „cîștigă" −25.

Valoarea medie este $M\xi'=(-15)p+20(1-p)=20-35p$ — pentru primul caz, $M\xi''=20p-25(1-p)=45p-25$ — pentru al doilea caz. Deci I are garantat cîștigul mediu pentru o încercare, $\varphi(p)=min\,(20-35p, 45p-25)$, $p\in[0, 1]$. Strategia lui I urmărește alegerea parametrului p, încît să obțină $\max\limits_{p} \varphi(p)=\max\limits_{p} min\,(20-35p, 45p-25)$.

Determinarea soluției prin metoda grafică; rezultă $p_0=\frac{9}{16}$ (din condiția $20-35p=45p-25$) și deci $\max\limits_{p} \varphi(p)=\varphi(p_0)=\frac{5}{16}$. În concluzie, dacă I alege 15 cu $p=\frac{9}{16}$ și 25 cu $1-p=\frac{7}{16}$, își asigură o valoare a cîștigului $M\xi=\frac{5}{16}$.

Deoarece II pierde („cîştig" negativ), urmăreşte minimizarea pierderii. Se determină valoarea medie dacă cu probabilitatea q II alege 15 şi cu probabilitatea $1-q$ alege 25. Dacă I a ales 15, atunci: II cîştigă $+15$ cu probabilitatea q şi cu probabilitatea $1-q$ II „cîştigă" -20; dacă I a ales 25, atunci: II „cîştigă" -20 cu probabilitatea q şi cu probabilitatea $1-q$, II cîştigă $+25$ Valoarea medie pentru c ele două cazuri este:

$M\eta' = 15q - 20(1-q) = 35q - 20$, respectiv $M\eta'' = -20q + 25(1-q) = 25 - 45q$.

Matricea jocului este pentru II:

II \ I	15	25
15	$+15$	-20
25	-20	$+25$

Observăm că II are garantat cîştigul mediu pentru o încercare: $\psi(p) = min\,(35q-20,\ 25-45q)$. Pentru valoarea optimă rezultă $q_0 = \frac{9}{16}$ şi $\psi(q_0) = -\frac{5}{16}$. În concluzie, dacă II alege 15 cu probabilitatea $q = \frac{9}{16}$ şi 25 cu probabilitatea $1-q = \frac{7}{16}$, îşi asigură un „cîştig" de valoare $M\eta = -\frac{5}{16}$.

(IX) **Probabilitate geometrică.** Se spune că avem o problemă de probabilitate geometrică dacă mulţimea evenimentelor elementare $\mathfrak{X}$ este un domeniu dintr-un spaţiu euclidian, admiţînd „volum". Probabilitatea oricărei submulţimi A din $\mathfrak{X}$ se defineşte prin $P(A) = \frac{măs(A)}{măs(X)}$; observăm că de fapt este vorba de o submulţime boreliană A din $\mathfrak{X}$, iar prin „volum" trebuie înţeleasă măsura Lebesgue.

256. Un fenomen apare cu probabilitatea $p \leqslant 1$, în intervalul de timp $[0, T]$. Care este probabilitatea ca acest fenomen să apară în intervalul $[t, T]$ ştiind că el nu a apărut în intervalul $[0, t]$.

Soluţie (fig. 250). Fie $[0, \tau]$ intervalul pe care evenimentul apare sigur. Deoarece probabilitatea de apariţie a fenomenului pe $[0, T]$ este $p = \frac{T}{\tau}$,

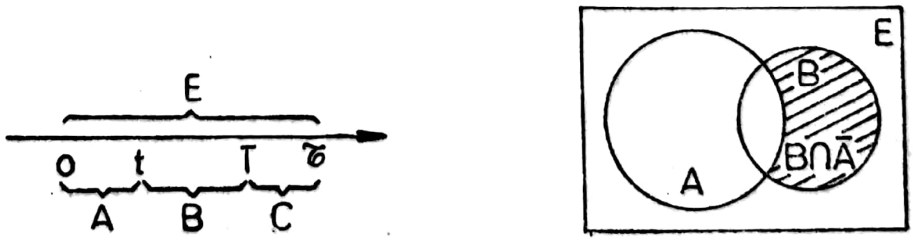


Fig. 250.

rezultă că probabilitatea de apariţie pe $[0, t]$ este $\frac{t}{\tau}=\frac{t}{T}\frac{T}{\tau}=p\frac{t}{T}$. Fie acum A evenimentul apariţiei fenomenului pe $[0, t]$ şi B evenimentul apariţiei pe $[t, T]$. Cunoaştem $P(A\cup B)=p\leqslant 1$ şi se cere $P(B/\overline{A})$. Ţinînd seama că $P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P((A\cup B)-A)}{P(\overline{A})}=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{P(\overline{A})}$, $P(A)=p\frac{t}{T}$ şi $P(\overline{A})=1-$ $-P(A)=1-p\frac{t}{T}$ găsim $P(B/\overline{A})=\frac{p\left(1-\frac{t}{T}\right)}{1-\frac{t}{T}p}$. Dacă $t=0$, atunci $P(B/\overline{A})=p$; dacă $p=1$, atunci $P(B/\overline{A})=1$.

257. Un dispozitiv electronic este acţionat de două semnale care pot sosi la momente de timp întîmplătoare dacă intervalul dintre două semnale succesive este mai mic decît τ. Să se găsească probabilitatea ca dispozitivul să fie acţionat într-un interval de timp mai mare decît τ.

Soluţie (fig. 251). Fie $T>\tau$. Notăm cu t_1 momentul de apariţie al primului semnal şi cu t_2 momentul de apariţie al celui de al doilea semnal. Evident $0<t_1<T$, $0<t_2<T$ şi $|t_2-t_1|<\tau$. Considerăm mulţimile $\Omega=\{(t_1, t_2)/\, 0<t_1<T, 0<t_2<T\}$ şi $\omega=\{(t_1, t_2)/\, |t_2-t_1|<$ $<\tau\}$ şi observăm că avem o corespondenţă biunivocă între cazurile posibile şi Ω. De aceea dacă A este evenimentul ca dispozitivul să fie acţionat într-un interval mai mare decît τ atunci $P(A)=\frac{\text{aria}(\omega)}{\text{aria }\Omega}=\frac{T^2-2\frac{1}{2}(T-\tau)^2}{T^2}=$ $=1-\left(1-\frac{\tau}{T}\right)^2$.

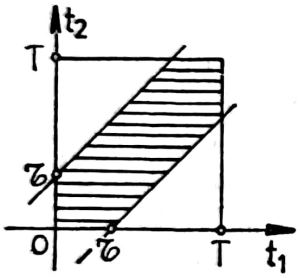


Fig. 251.

258. O bară de lungime l este frîntă la întîmplare în două locuri. Care este probabilitatea ca din cele trei bucăţi obţinute să se poată forma un triunghi.

Soluţie. Fie $AP=x$, $PQ=y$ (fig. 252, 253). Mulţimea cazurilor posibile este $\Omega=\{(x, y)/x>0,\ y>0,\ x+y\leqslant a\}$. Pe de altă parte, pentru a putea forma

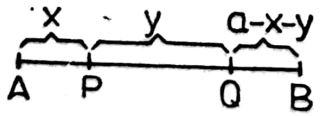


Fig. 252.

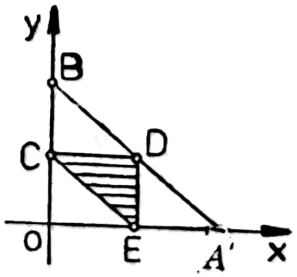


Fig. 253.

un triunghi cu segmentele AP, PQ și QB este necesar să fie îndeplinite condițiile $AP \leqslant PQ+QB$, $PQ \leqslant AP+QB$, $QB \leqslant AP+PQ$, adică $x \leqslant \frac{a}{2}$, $y \leqslant \frac{a}{2}$, $x+y \geqslant \frac{a}{2}$. De aceea mulțimea cazurilor favorabile este $\omega = \{(x, y)/0 < x \leqslant \frac{a}{2}, x < y \leqslant \frac{a}{2}, x+y \geqslant \frac{a}{2}\}$.

Rezultă

$$p = \frac{\text{aria}(CDE)}{\text{aria}(AOB)} = \frac{1}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Miron Nicolescu şi colectiv, *Manual de analiză matematică*, Ed. did. şi ped. Bucureşti, 1971.
2. Marcel Roşculeţ, *Manual de analiză matematică*, Ed. did. şi ped., Bucureşti, 1966/1967.
3. George Ţiţeica, *Culegere de probleme de geometrie*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1965.
4. *Colecţia Alef*, Ed. did. şi ped., Bucureşti, 1973.
5. *Gazeta matematică*, 1970—1978.
6. *The American Mathematical Monthly*, 1970—1978.
7. *Journal de mathematiques elementaires*, 1970—1978.
8. *Matematica v. şcole*, 1970—1978.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

I. Probleme date la concursurile de admitere în învăţământul superior 7

Capitolul 1

Admitere subingineri şi institute pedagogice 8

1. Algebră 8
2. Geometrie plană 17
3. Trigonometrie 24

Capitolul 2

Admitere matematicieni, ingineri, economişti, fizicieni, chimişti etc...... 31

1. Algebră şi Elemente de analiză matematică..... 31
   Algebră 31
   Elemente de analiză matematică 60
2. Geometrie şi Trigonometrie 102
   Geometrie plană 102
   Geometrie analitică 124
   Geometrie în spaţiu 135
   Trigonometrie 151

II. Probleme de sinteză şi observaţii metodologice 173

1. Aritmetică. Algebră. Analiză matematică 174
Poziţia rădăcinilor ecuaţiei de gradul doi cu coeficienţi reali..... 176
Ecuaţii bipătrate 181
Precizări asupra definiţiilor puterii şi radicalului..... 192
Inegalităţi pătratice 195

Inegalitatea geometrică 198
Asupra zerourilor unor funcţii 200
Identităţi 206
Fracţii simple 208
Independenţa unor expresii elementare în raport cu unele variabile 210
Inversa unei matrice 213
Valori şi vectori proprii 217
Relaţii binare 221
Margini pentru submulţimi de numere reale 224
Valori extreme ale funcţiilor reale 225
Teoreme referitoare la convergenţa şirurilor reale 231
Ecuaţii liniare cu diferenţe finite 237
Progresii 239
Seria geometrică 240
Limita unei funcţii compuse 243
Funcţii unimodale 245
Prelungirea prin continuitate a unei funcţii 247
Funcţii lipschitziene 248
Funcţii cu punct fix 249
Prelungirea firească a unei funcţii 253
Formula lui Leibniz 254
Ramuri infinite. Asimptote. Puncte asimptotice 255
Funcţii pare şi funcţii impare 259
Extremele funcţiilor derivabile 261
Funcţii original 265
Funcţia „signum" 266
Funcţia „parte întreagă" 267
Funcţii hiperbolice 269
Funcţii convexe 272
Funcţii periodice 276
Soluţie supraabundentă în justificări colaterale 278
Problemă şi soluţie cu greşeli 279
Problemă şi soluţie incorectă 280
Primitive „elementare" 282
Sume Riemann-Darboux 289
2. Trigonometrie. Geometrie. 299
Matrice ortogonală 301
Ecuaţii trigonometrice liniare 302
Conuri. Ecuaţii omogene 303
Ecuaţii polinomiale ale căror rădăcini sînt valori ale unor funcţii trigonometrice 306
Ecuaţia binomă 319
Rădăcinile unităţii 321
Geometrie plană şi numere complexe 327
Unghiul dintre două curbe 336
Polinoame trigonometrice 338
Cercul lui Euler 357
Curbe în plan 361

Scanned with OKEN Scanner

Locuri geometrice 363
Distanţa de la un punct la o mulţime 375
Distanţa dintre două mulţimi 376
Segment sferic, calotă sferică, zonă sferică, sector sferic..... 392
3. Programe liniare în două variabile. Metode de aproximare. Probabilităţi 395
Programe liniare în două variabile 395
Metode de aproximare 401
Formule de cvadratură 407
Probabilităţi 419
Teorema de adunare a probabilităţilor..... 421
Probabilităţi condiţionate 422
Probabilitate totală, formula Bayes 422
Variabilă aleatoare discretă 424
Probabilitate geometrică 429
Bibliografie 432

Scanned with OKEN Scanner

Redactor: ION ILIN
Tehnoredactor: IOAN I. IANCU

Bun de tipar: 28. 11. 1980
Apărut: 1980
Coli tipar: 27,25

Întreprinderea Poligrafică „Crișana"
Oradea, str. Moscovei nr. 5
Comanda nr. 159
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea conține probleme date la concursurile de admitere în învățămîntul superior în perioada 1970–1978, probleme de sinteză, observații metodologice și prezentări succinte ale unor noțiuni, ce permit o mai bună înțelegere a materiilor predate în liceu, precum și o apropiere de disciplinele matematice predate în primul an de facultate.

Problemele de concurs sînt selecționate de la examenele de admitere la toate formele de învățămînt, cum ar fi: subingineri, ingineri, matematicieni, fizicieni, chimiști, economiști etc. Gruparea lor este corespunzătoare principalelor capitole ale matematicii predate în liceu, urmărindu-se o ordonare ascendentă după gradul de dificultate.

Multiplele observații metodologice și precizări, făcute în legătură cu unele noțiuni, completează conținutul lucrării și îi dau o notă de originalitate. Caracterul de sinteză al problemelor solicită cunoștințele acumulate la toate disciplinele matematice predate în liceu. În acest fel se elimină demarcația strictă dintre algebră-analiză-trigonometrie-geometrie, creată de necesitățile procesului de instruire al elevilor.

Se adresează în primul rînd elevilor de liceu, constituind un material util în testarea nivelului de pregătire al acestora, cadrelor didactice din învățămîntul liceal ca material didactic în pregătirea curentă a elevilor la clasă, în orientarea studiului absolvenților de liceu pentru examenele de admitere, cît și în eliminarea unor lacune ce se constată cu ocazia acestor examene.

Lei

Scanned with OKEN Scanner